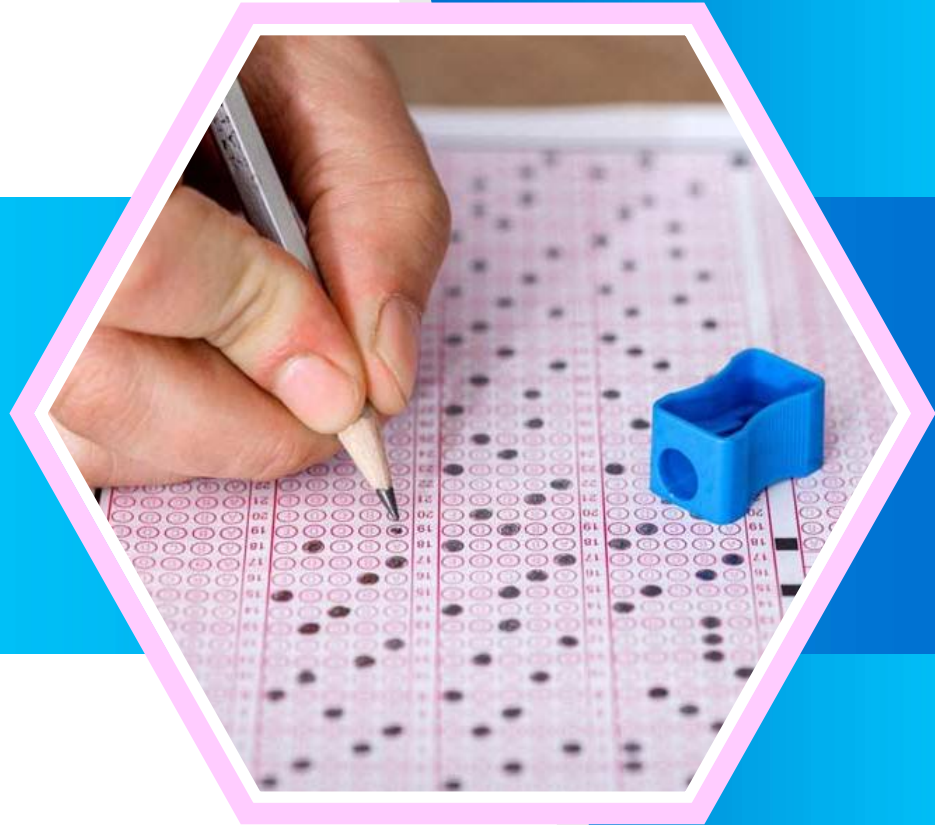


نمونه نکته و تست:

آمار و احتمال

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴



گروه علمی درس آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش آموزان کشور (نهایی ۲۰)



کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

۵:

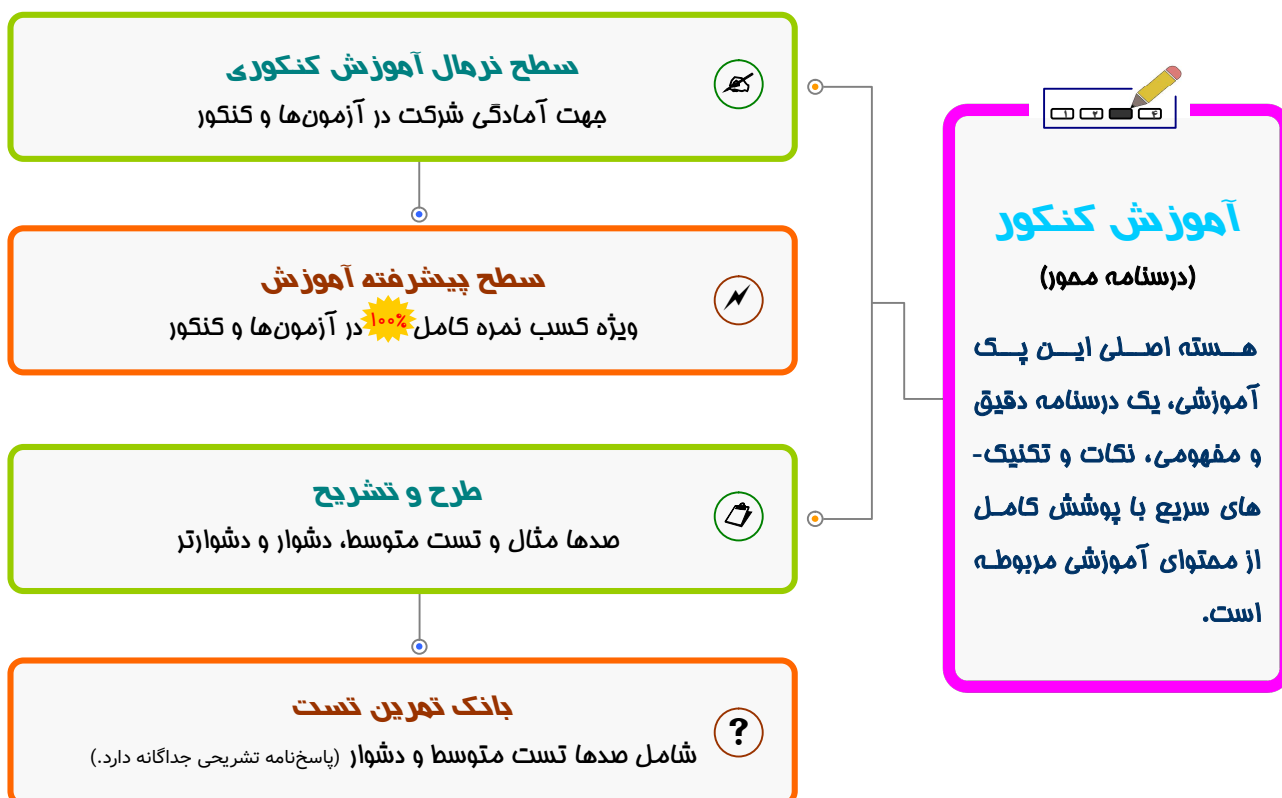
آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس آموز؛ (منحصر به فرد)

جزئیات این مجموعه



پوشش آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها
Up to date

۲	منطق گزاره‌ها گزاره و جدول، ترکیب و هم‌ارزی، گزاره سوری	۱
۳۳	مجموعه و زیرمجموعه مفاهیم مجموعه و زیرمجموعه، آشنایی با افراز	۲
۵۴	بهر مجموعه‌ها بررسی اجتماع، اشتراک، تفاضل و ضرب دکارتی	۳
۸۱	احتمال (۱) احتمال در فضاهای هم‌شانس و غیرهم‌شانس	۴

۵	احتمال (۲) بررسی احتمال شرطی، قوانین احتمال کل و بیز	۱۱۰
۶	آمار توصیفی (۱) سازمان‌دهی داده‌ها با جدول و نمودارهای آماری	۱۳۸
۷	آمار توصیفی (۲) بررسی معیارهای مرکزی و پراکندگی داده‌ها	۱۵۵
۸	آمار استنباطی داده و گردآوری، برآورد نقطه‌ای و بازه‌ای میانگین	۱۸۲



منطق گزاره‌ها

صفحه	فهرست
۳	مفاهیم پایه
۷	ترکیب گزاره‌ها
۱۴	گزاره‌های هم‌ارز
۲۳	سورها
۲۸	تمرین تست

مفهوم محوری در مبحث گزاره‌ها:

نکته 1

گزاره:

یک جمله خبری است که (در حال و آینده) دقیقاً «درست» یا «نادرست» باشد و آن را معمولاً با یکی از حروف p ، q ، r و ... نام گذاری می‌کنند. پس توجه کنید:

- گزاره باید حتماً خبر باشد و درستی یا نادرستی آن با بررسی قابل تعیین باشد.
- ارزش گزاره دقیقاً یکی از دو حالت زیر است:

درست: د نادرست: ن

(گزاره‌ی «ساده» فقط از یک خبر و گزاره‌ی «مرکب» از دو یا چند خبر تشکیل می‌شود.)

بنابر بیان بالا؛

جملات از انواع زیر گزاره محسوب نمی‌شوند:

- جملاتی که در آن‌ها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و ...
- جملات خبری که درست یا نادرست بودن آن‌ها به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.

مثال: زبان فرانسه از زبان انگلیسی جذاب‌تر است.

- جملات خبری که تعیین درست یا نادرست بودن آن‌ها غیر ممکن باشد.

مثال: ریاضی از شیمی دشوارتر است.

توجه:

ممکن است ارزش یک گزاره در این لحظه قابل تعیین نباشد، ولی با گذشت زمان در آینده معلوم گردد.

کدام مورد گزاره محسوب می‌شود؟

- 1 ای کاش در کنکور قبول شوم.
- 2 چه هوای خوبی.
- 3 در پرتاب تاس، پنجاه درصد احتمال دارد ۶ بیاید.
- 4 پنجره را باز کن.

گزینه ۳

فقط در مورد سوم یک جمله‌ی خبری داریم که درستی یا نادرستی آن قابل بررسی است.

کدام مورد گزاره محسوب می‌شود؟

- 1 سعدی برترین شاعر شیرازی است.
- 2 آیا عدد ۲۰۲۲ زوج است؟
- 3 عدد $9^{18} + \dots + 3^{12} + 2^{11}$ بر ۲۳ بخش پذیر است.
- 4 استرالیا کشور خوبی برای زندگی است.

گزینه ۳

موارد اول و چهارم به نظر اشخاص بستگی دارند و مورد دوم هم سؤالی است.

---◇---

نکته ۲

استدلال:

هر استدلال دارای دو بخش زیر است:

❖ مفروضات:

یک یا چند گزاره، مفروضات یا همان فرض‌های استدلال را تشکیل می‌دهند.

❖ نتیجه:

معمولا نتیجه از یک گزاره تشکیل می‌شود.

معتبر بودن:

یک استدلال وقتی معتبر است که:

اگر مفروضات، گزاره‌هایی درست باشند، نتیجه نیز یک گزاره‌ی درست باشد.

به یک نمونه استدلال درست توجه کنید:

مفروضات:

- هر عدد مثبت از صفر بزرگ‌تر است.
- مربع هر عدد غیر صفر، عددی مثبت است.
- $x \neq 0$ است.

نتیجه: x^2 از صفر بزرگ‌تر است.

نکته ۳

گزاره نما:

هرگاه در یک جمله‌ی خبری، یک یا چند متغیر داشته باشیم به شرطی که:

وقتی جای متغیرها مقدار قرار دهیم، به یک گزاره تبدیل شود؛

آن جمله‌ی خبری یک «گزاره‌نما» است.

برای نمونه؛

عبارت $2x + 6 = 0$ یک گزاره‌نما با یک متغیر است که:

برای مقدار $x = -3$ ارزش درست «د» و برای سایر مقادیر ارزش نادرست «ن» دارد.



نکته ۴

دامنه و جواب:

- ❖ مجموعه مقادیری که وقتی جای متغیرهای یک گزاره‌نما قرار گرفته، آن را به یک گزاره تبدیل می‌کند، «دامنه» آن گزاره‌نما گفته و آن را با D نمایش می‌دهند.
- ❖ مجموعه مقادیری از D در یک گزاره‌نما که آن را به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌کند، «مجموعه جواب» نام داشته و آن را با S نشان می‌دهیم. پس: $S \subseteq D$.

برای نمونه:

$$\text{در گزاره‌نمای } 2x + 6 = 0,$$

چون هر عددی را می‌توان جای x قرار داد، $D = \mathbb{R}$ بوده و مجموعه جواب $S = \{-3\}$ است.

❖ در کدام مورد، دامنه‌ی گزاره‌نما نادرست است؟

1 $D = \mathbb{R} : x^2 - 8x = 0$

2 $D = \mathbb{Z}$ مضرب x است.

3 $D = \mathbb{N}$ عددی اول است.

4 احتمال رخ دادن پیشامد A در پرتاب یک تاس $\frac{2}{3}$ است. $D = \{1, 2, 3, 4\}$

گزینه ۴

در مورد آخر، جای A تمام پیشامدهای تصادفی که زیر مجموعه‌ی فضای نمونه‌ای $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ هستند، می‌توانند قرار گیرند. پس:

دامنه: مجموعه‌ی تمام زیر مجموعه‌های $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است.

سایر موارد صحیح هستند.

--- ❖ ---

❖ اگر دامنه‌ی متغیر گزاره‌نماهای زیر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، آنگاه مجموعه جواب کدام گزاره‌نما تهی است؟

1 $2^n < n^2$ 2 $n^2 - 8n + 15 < 0$ 3 $n + \frac{1}{n} \leq 2$ 4 $(n+1)! < 2^n$

گزینه ۴

با شناختی که از عبارات داریم، می‌توان (مورد دوم، حل سریع نامعادله و مورد سوم، خاصیت جمع عدد با معکوس خود) برای سه گزینه‌ی اول، جواب‌هایی به ترتیب: $n = 3$ ، $n = 4$ و $n = 1$ بیان کرده. مورد چهارم هیچ جوابی ندارد:

$2! \not< 2^1$ ، $3! \not< 2^2$ ، $4! \not< 2^3$ ، $5! \not< 2^4$ ، ...

--- ❖ ---



دامنه‌ی گزاره‌نمای «مجموعه‌ی $\{a, b\}$ تعداد $n^2 - 3n$ زیرمجموعه دارد.» اعداد طبیعی است. مجموعه جواب چند عضوی است؟ (متغیر گزاره‌نما را n بگیرید.)

۴ ۱

۳ ۰ یا ۱

۲ ۰ یا ۲

۱ ۲

گزینه ۳

اگر $a = b$ باشد، مجموعه تعداد $2^1 = 2$ زیرمجموعه و اگر $a \neq b$ باشد، مجموعه تعداد $2^2 = 4$ زیرمجموعه خواهد داشت. بررسی هر دو حالت:

$a = b$: $n^2 - 3n = 2 \rightarrow$ بدون جواب طبیعی \Rightarrow مجموعه جواب تهی است.

$a \neq b$: $n^2 - 3n = 4 \rightarrow (n-4)(n+1) = 0 \rightarrow n = -1, n = 4 \Rightarrow \{4\}$: مجموعه جواب:

---◇---

از یک یا چند گزاره می‌توان با روش‌هایی که در این بخش می‌بینیم، گزاره‌هایی جدید ساخت. ساده‌ترین روش:

نکته ۵

نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی p را با نماد $\sim p$ نوشته و آن را «نقیض p » یا «چنین نیست که p » می‌خوانیم. همیشه:

p	$\sim p$
د	ن
ن	د

ارزش درستی $\sim p$ دقیقاً برعکس ارزش درستی p است.

این مطلب در جدول مقابل، به نام «جدول ارزش» گزاره‌ها دیده می‌شود:

برای نمونه؛

گزاره «۴ عددی فرد است.» را به همگی روش‌های زیر می‌توان نقیض کرد:

- چنین نیست که ۴ عددی فرد است.
- ۴ عددی فرد نیست.
- ۴ عددی زوج است. (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابل هم هستند).

توجه کنید:

نقیض گزاره‌ی «۱ عددی مثبت است.» به صورت «۱ عددی منفی است.» صحیح نیست.

باید دقیقاً خلافِ خبر را بیان کنید.

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن این است که عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همگی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که ۱ عددی مثبت است.
- ۱ عددی مثبت نیست.
- ۱ عددی منفی یا برابر صفر است.

نکته ۶

گزاره‌های هم‌ارز:

دو گزاره‌ی ساده یا مرکب P و Q هم‌ارز (منطقی) هستند، هرگاه جدول ارزش آن‌ها کاملاً یکسان باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

(بررسی دقیق و کامل هم‌ارزی گزاره‌ها در بخش بعد انجام می‌شود.)



برای نمونه؛

$\sim(\sim p) \equiv p$ است. زیرا، چنان که می‌بینید:

ستون مربوط به p و $\sim(\sim p)$ ارزش درستی یکسان دارند.

p	$\sim p$	$\sim(\sim p)$
د	ن	د
ن	د	ن

در ادامه، چند روش برای ترکیب گزاره‌ها می‌بینیم.

نکته ۷

ترکیب فصلی:

در این نوع ترکیب، بین دو گزاره‌ی p و q رابط «یا» قرار گرفته، گزاره‌ی حاصل به صورت:
 $p \vee q$ نوشته شده و به صورت « p یا q » خوانده می‌شود.

نماد \vee را «فصلی» گویند.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند؛ در غیر این صورت همواره درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

برای نمونه؛

به بررسی ارزش گزاره‌های زیر توجه کنید:

الف) ۲ عددی فرد است یا ۹ عددی اول است.

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی «۲ عددی فرد است» و «۹ عددی اول است» نادرست هستند.

ب) ۳ عددی زوج است یا ۹ عددی فرد است.

این گزاره درست است.

چون گزاره «۹ عددی فرد است» درست می‌باشد.

پس توجه کنید:

برای درست بودن $p \vee q$ ، کافی است لاقلاً یکی از p و q درست باشد.

تشکیل جدول:

موارد زیر را رعایت کنید:

- به تعداد گزاره‌های ساده p ، q ، و r ... که یک گزاره‌ی مرکب را تشکیل داده‌اند، توجه کنید: چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت «د» و «ن» دارد،
- وقتی فقط یک گزاره داریم، تعداد ۲ حالت (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.

مانند:

p	p	$p \vee p$
د	د	د
ن	ن	ن

$$p \vee p$$

- وقتی دو گزاره p و q داریم، $2 \times 2 = 2^2 = 4$ سطر خواهیم داشت؛ مانند جدول ارزش $p \vee q$ که قبلاً دیدیم.
 - پس برای سه گزاره، $2^3 = 8$ حالت و در کل وقتی n گزاره‌ی ساده در گزاره‌ی مرکب موجود باشد، تعداد 2^n حالت (سطر جدول) داریم.
 - برای این که جدول منظم تشکیل شود:
 - در ستون اول، نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
 - در ستون‌های بعدی تعداد دوباره نصف می‌شود تا آخر.
- مثلاً برای سه گزاره، در کل ۸ حالت داریم و شروع جدول همیشه چنین خواهد بود:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

برای نمونه؛

جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee \sim q$ و حالت نادرست بودن این گزاره را تعیین می‌کنیم. تعداد $2^2 = 4$ حالت برای جدول در نظر گرفته، مانند محاسبات ریاضی، از ساده‌ترین گزاره‌ها شروع کرده و در پایان کل گزاره تشکیل می‌شود:

p	q	$\sim q$	$p \vee \sim q$
د	د	ن	د
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د

شروع: p

بعد: q

بعد: $\sim q$

پایان: $p \vee \sim q$

می بینید که:

گزاره‌ی $p \vee \sim q$ وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.

نکته ۸

ترکیب عطفی:

در این نوع ترکیب، بین دو گزاره‌ی p و q رابط «و» قرار گرفته، گزاره‌ی حاصل به صورت: $p \wedge q$ نوشته شده و به صورت « p و q » خوانده می‌شود.

نماد \wedge را «عاطف» گویند.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی p و q درست باشند و در غیر این صورت همواره نادرست است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

نمونه‌هایی ببینید:

- جدول ارزش درستی گزاره‌ی: $p \wedge \sim p$

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

توجه کنید:

چنان که می‌بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: تناقض)

- جدول ارزش درستی گزاره‌ی: $p \vee (q \wedge r)$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$
د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د
د	ن	د	ن	د
د	ن	ن	ن	د
ن	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	ن	ن

❓ اگر گزاره‌ی $p \vee \sim q$ درست و گزاره‌ی $\sim(\sim p)$ نادرست باشد، ارزش گزاره‌ی $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ با کدام مورد

یکسان است؟

د ④

ن ③

$\sim r$ ②

r ①

گزینه ۱

طبق فرض p نادرست بوده و با توجه به درستی $p \vee \sim q$ ، باید $\sim q$ درست و در نتیجه q نادرست می‌باشد. پس می‌دانیم $p \wedge q$ نادرست است و؛

- اگر r درست باشد، $\sim p \wedge r$ نیز درست و در نتیجه $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ درست خواهد شد.
- اگر r نادرست باشد، $\sim p \wedge r$ نادرست شده و در نتیجه $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ نیز نادرست خواهد شد.

در نتیجه؛

ارزش $(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge r)$ و r یکی است.

--- ---

نکته ۹

ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره p و q ، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$p \Rightarrow q$ نوشته شده و به صورت «اگر p ، آنگاه q » خوانده می‌شود.

در این ترکیب شرطی، به p «مقدم» و به q «پیرو» گفته می‌شود.

بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که p درست، ولی q نادرست باشد. به عبارت دیگر، هنگامی یک استنتاج $p \Rightarrow q$ صحیح است که:

درست بودن p ، حتماً درستی q را نتیجه دهد.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

از درستی گزاره‌های $t \vee \sim s$ ، $r \Rightarrow s$ ، $\sim t \vee u$ ، $\sim u$ و $\sim p \Rightarrow r$ ، درستی کدام گزاره نتیجه می‌شود؟

t 4

s 3

r 2

p 1

گزینه ۱

باید u نادرست باشد؛ چون $\sim t \vee u$ درست است، $\sim t$ درست و در نتیجه t نادرست است. چون $t \vee \sim s$ درست است، باید $\sim s$ درست، و این یعنی s نادرست است. اکنون طبق درستی $s \Rightarrow r$ باید r نیز نادرست باشد؛ بالاخره طبق درستی $\sim p \Rightarrow r$ ، باید $\sim p$ نادرست و در نتیجه p درست بوده باشد.

--- ---



حالت ویژه‌ای در ترکیب شرطی:

نکته ۱۰

قانون انتقای مقدم:

چنان‌که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید:

اگر p نادرست باشد، بدون توجه به ارزش q ، ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ درست است.

این خاصیت را «**قانون انتقای مقدم**» گویند.

یعنی:

اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را بپذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است.

برای نمونه:

استنتاج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر $۲ -$ عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور ۱۴۰۵ رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

❖ اگر دامنه‌ی متغیر گزاره‌نمای: « $\sqrt{x} < ۳ \Rightarrow x < ۲۵$ » به صورت $D = [۰, +\infty)$ باشد، آنگاه مجموعه جواب این گزاره‌نما

کدام است؟

- ① $[۰, ۹)$ ② $[۲۵, +\infty)$ ③ $[۰, ۹) \cup [۲۵, +\infty)$ ④ $(۰, ۲۵)$

گزینه ۳

با توجه به دامنه‌ی متغیر و گزاره‌ی شرطی، باید دو حالت در نظر گرفت:

(الف) اگر $۰ \leq x < ۲۵$ باشد، برای درست بودن گزاره، باید $\sqrt{x} < ۳$ نیز درست باشد:

$$\sqrt{x} < ۳ \rightarrow x < ۹$$

جواب در این حالت به صورت $[۰, ۹)$ است.

(ب) اگر $x \geq ۲۵$ باشد، گزاره‌ی شرطی به انتقای مقدم همواره درست خواهد بود.

پس مجموعه جواب برابر است با:

$$S = [۰, ۹) \cup [۲۵, +\infty)$$

--- ❖ ---

نکته ۱۱

ترکیب دو شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q ، گزاره‌ی دوشروطی به صورت:

$p \Leftrightarrow q$ نوشته شده و به صورت «**اگر و تنها اگر q** » یا «**اگر p آنگاه q و برعکس**» خوانده می‌شود.

در واقع:

هر دوی p و q باید یکدیگر را نتیجه دهند تا ترکیب دوشروطی درست باشد.



بعلاوه:

مطابق جدول زیر، ترکیب دو شرطی وقتی درست است که p و q ارزش یکسان داشته باشند.

p	q	$p \leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

کدام مورد گزاره‌ای نادرست است؟

① 7 مربع کامل است اگر و تنها اگر 5 عدد اول باشد.

② اگر 4 عددی فرد باشد، آنگاه 4 مربع کامل نیست.

③ $(\frac{2}{3} \neq \frac{10}{15}) \vee (-1 \in \{\dots, 999-2, 998-2, 997-2, \dots, 0-2\})$

④ $-15 > -10 \Leftrightarrow 10 > 15$

گزینه ۱

تمام گزینه‌ها را دقیق بررسی می‌کنیم.

• **گزینه ۱:** گزاره به صورت دو شرطی «ن \Leftrightarrow د» بوده و ارزش آن نادرست است. (جواب تست)

• **گزینه ۲:** گزاره به صورت شرطی «ن \Rightarrow ن» بوده و ارزش آن درست است.

• **گزینه ۳:** گزاره به صورت فصلی «د \vee ن» بوده و ارزش آن درست است.

• **گزینه ۴:** گزاره به صورت دو شرطی «ن \Leftrightarrow ن» بوده و ارزش آن درست است.

اگر ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p)$ درست باشد، کدام یک از گزاره‌های زیر همواره درست است؟

① $p \wedge q$ ② $q \Rightarrow p$ ③ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ④ $\sim p \wedge q$

گزینه ۲

چون $p \wedge \sim p$ همیشه نادرست است، باید $p \Rightarrow q$ نیز نادرست باشد؛ یعنی p درست و q نادرست بوده است. واضح است که در چنین حالتی، $q \Rightarrow p$ درست خواهد بود.

با توجه به جدول ارزش زیر، کدام گزاره نمی‌تواند در ستون آخر قرار گیرد؟

p	q	r	$p \leftrightarrow q$	$\sim r \vee q$...
...	ن	...	ن	ن	د

① $q \Leftrightarrow \sim r$ ② $p \wedge \sim q$

③ $\sim p \vee r$ ④ $p \Rightarrow \sim r$

گزینه ۴

با توجه به ارزش $q \Leftrightarrow p$ ، گزاره‌ی p درست بوده و با توجه به ارزش $\sim r \vee q$ ، گزاره‌ی $\sim r$ نادرست، و در نتیجه r نیز درست است. با بررسی هر گزینه،

به آسانی می‌بینید که فقط $p \Rightarrow \sim r$ نادرست است و نمی‌تواند در ستون آخر قرار گیرد.

دو گزاره‌ی مرکب (یا ساده‌ی) P و Q که همواره ارزش یکسان دارند، «هم‌ارز» هستند و می‌نویسیم: $P \equiv Q$. برای نمونه:

هم‌ارزی مهم $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ را طبق جدول روبه‌رو می‌بینید:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

دو نوع گزاره خاص:

همیشه درست:

برخی گزاره‌ها در تمام حالت منطقی درست هستند، مانند:

$$p \vee \sim p \quad \text{و} \quad p \Rightarrow p$$

چنین گزاره‌ای را با T نشان می‌دهند. پس:

$$p \vee \sim p \equiv T$$

همیشه نادرست:

برخی گزاره‌ها در تمام حالت منطقی نادرست هستند، مانند:

$$p \wedge \sim p$$

چنین گزاره‌ای را با F نشان داده و می‌نویسیم:

$$p \wedge \sim p \equiv F$$

نمونه‌ای دیگر:

یک گزاره‌ی مرکب همیشه نادرست را در زیر می‌بینید.

$$(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q) \equiv F$$

p	q	$\sim p$	$p \vee \sim p$	$\sim q$	$q \wedge \sim q$	$(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)$
د	د	ن	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د	ن	ن

روش دیگر:

چون $p \vee \sim p$ همواره درست و $q \wedge \sim q$ همواره نادرست است، بنابراین ترکیب شرطی $T \Rightarrow F$ همواره نادرست است.

اگر $\sim(p \vee q) \Rightarrow r \equiv F$ باشد، کدام گزینه در مورد ارزش p ، q و r به ترتیب درست است؟

② نادرست - درست - نادرست

① نادرست - نادرست - نادرست

④ درست - درست - نادرست

③ درست - نادرست - نادرست

گزینه ۱



پایده $(p \vee q) \sim$ درست و r نادرست باشد؛ پس $p \vee q$ نادرست بوده، یعنی هر دوی p و q نادرست بوده‌اند.

---◇---

در ادامه، قوانین هم‌ارزی گزاره‌ها را می‌آوریم:

نکته ۱۲

(۱) هم‌ارزی‌های بدیهی:

موارد ساده‌ی زیر، با توجه به تعریف ترکیب‌ها همواره برقرار هستند:

- ترکیبات بدیهی یک گزاره با خودش:

$p \vee p \equiv p$	$p \wedge p \equiv p$	$p \Rightarrow p \equiv T$	$p \Leftrightarrow p \equiv T$
---------------------	-----------------------	----------------------------	--------------------------------
- ترکیبات بدیهی یک گزاره با **T** یا **F**:

$p \vee T \equiv T$	$p \wedge T \equiv p$	$p \vee F \equiv p$	$p \wedge F \equiv F$
---------------------	-----------------------	---------------------	-----------------------
- ترکیبات بدیهی گزاره با نقیض خودش:

$p \vee \sim p \equiv T$	$p \wedge \sim p \equiv F$	$\sim(\sim p) \equiv p$
--------------------------	----------------------------	-------------------------
- ترکیبات بدیهی گزاره با فصلی و عطفی:

$p \vee (p \wedge q) \equiv p$	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$
--------------------------------	--------------------------------

◇ ارزش کدام گزاره درست نیست؟

$$p \vee (\sim q \wedge T) \equiv p \vee \sim q \quad \text{②}$$

$$(p \wedge q) \vee (q \vee F) \equiv q \quad \text{④}$$

$$\sim p \wedge (q \vee T) \equiv \sim p \quad \text{①}$$

$$(p \vee \sim q) \wedge (\sim p \wedge T) \equiv p \quad \text{③}$$

گزینه ۳ ✓

تک تک گزینه‌ها را چک می‌کنیم:

گزینه ۱: هم‌ارزی صحیح است؛

گزینه ۲: هم‌ارزی صحیح است؛

گزینه ۳: هم‌ارزی صحیح نیست؛

گزینه ۴: هم‌ارزی صحیح است؛

$$\sim p \wedge \underbrace{(q \vee T)}_T \equiv \sim p \wedge T \equiv \sim p$$

$$p \vee \underbrace{(\sim q \wedge T)}_{\sim q} \equiv p \vee \sim q$$

$$(p \vee \sim q) \wedge \underbrace{(\sim p \wedge T)}_{\sim p} \equiv \underbrace{(p \wedge \sim p)}_F \vee (\sim q \wedge \sim p) \equiv \sim q \wedge \sim p$$

$$(p \wedge q) \vee \underbrace{(q \vee F)}_q \equiv (p \vee q) \wedge \underbrace{(q \vee q)}_q \equiv q$$

---◇---

◇ کدام گزاره‌ی زیر با **T** هم‌ارز است؟ (یعنی همیشه درست است.)

$$q \wedge (p \Rightarrow \sim p) \quad \text{④}$$

$$q \Rightarrow (p \wedge q) \quad \text{③}$$

$$p \Rightarrow (p \vee q) \quad \text{②}$$

$$p \Rightarrow \sim q \quad \text{①}$$

گزینه ۲ ✓

با قدری دقت می‌بینید که غیر از گزینه‌ی دوم، سایر گزینه‌ها گاهی نادرست هم هستند.

• گزینه ۱: اگر p و q هر دو «د» باشند، گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است.



• **گزینه ۱۳:** اگر p «ن» و q «د» باشد، گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow q$ نادرست است.

• **گزینه ۱۴:** اگر q «ن» باشد، گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim p) \wedge q$ نادرست است.

---◇---

نکته ۱۳

۱) قوانین دمورگان:

با تشکیل جدول به آسانی می‌توان دید که همواره:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{و} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

بنابراین:

هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی؛

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و همچنین \wedge و \vee به هم تبدیل می‌شوند.

توجه کنید:

هنگام کاربرد قوانین دمورگان، هم‌ارزی $p \equiv \sim(\sim p)$ کاربرد فراوانی دارد.

برای نمونه:

نقیض گزاره‌های زیر را طبق نکته‌ی قبل می‌نویسیم:

الف) 5 عددی زوج است و π عددی گنگ است.

5 عددی فرد است یا π عددی گویا است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.

ماه به دور خورشید نمی‌گردد و زمستان هوا گرم نیست.

چند هم‌ارزی مهم دیگر:

نکته ۱۴

۱) خواص جابجایی:

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad \text{و} \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

۲) خواص شرکت پذیری:

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad \text{و} \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

در نتیجه:

وقتی همه ترکیب‌ها \wedge یا \vee باشد، می‌توانید پرانتزها را حذف کرده و حتی گزاره‌ها را جابجا کنید.

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

۳) خواص توزیع پذیری:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{و} \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

روش توزیع پذیری را فراموش نکنید:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c \quad \text{کاملاً شبیه بخش ضرب نسبت به جمع:}$$

گزاره‌ی $p \vee (\sim p \wedge q)$ هم‌ارز کدام است؟

$p \vee q$ ④

p ③

$p \wedge q$ ②

q ①

گزینه ۴ ✓

با استفاده از توزیع پذیری و سایر خواص گفته شده:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_{\equiv T} \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

--- ⓧ ---

گزاره‌ی $\sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \wedge [\sim q \vee (p \wedge q)]$ هم‌ارز کدام گزاره است؟

p ④

$\sim p$ ③

$\sim q$ ②

q ①

گزینه ۲ ✓

ابتدا هر یک از گروه‌ها را ساده می‌کنیم:

$$\sim [p \wedge (\sim p \vee q)] \equiv \sim p \vee (p \wedge \sim q) \equiv \underbrace{(\sim p \vee p)}_T \wedge (\sim p \vee \sim q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

$$[\sim q \vee (p \wedge q)] \equiv (\sim q \vee p) \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_T \equiv \sim q \vee p$$

چاپگذاری، چاپچاپی و فاکتورگیری:

$$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv (\sim q \vee \sim p) \wedge (\sim q \vee p) \equiv \sim q \vee \underbrace{(\sim p \wedge p)}_F \equiv \sim q$$

--- ⓧ ---

توجه کنید:

برای تشخیص هم‌ارزی گزاره‌ها در شرایط دشوار (مانند تست قبل)، دو روش کارآمد در انتهای این بخش آورده‌ایم.

هم‌ارزی مهمی برای گزاره‌های شرطی:

نکته ۱۵

۴) قانون عکس نقیض:

هرگاه در گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ جای گزاره‌ها عوض شده و هر دو نقیض شوند:

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

عکس نقیض گزاره‌ی شرطی حاصل می‌شود. بعلاوه، هم‌ارزی مهم زیر به نام «قانون عکس نقیض» برقرار است:

$$p \Rightarrow q \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$



یعنی:

می‌توان هر دو گزاره را نقیض کرده و آن‌ها را جابجا کرد.

برای نمونه:

هم‌ارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:
اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

توجه کنید:

عکس گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ ، به صورت $q \Rightarrow p$ است و بعلاوه:
درست یا نادرست بودن $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ ربطی به هم ندارند.

❓ در بیان هم‌ارز گزاره‌ی «اگر n^2 مضرب ۶ باشد، آنگاه n مضرب ۶ است.» به روش عکس نقیض، حکم کدام است؟
(n عدد صحیح)

② n^2 مضرب ۶ است.① n مضرب ۶ است.④ n مضرب ۶ نیست.③ n^2 مضرب ۶ نیست.

گزینه ۳ ✓

طبق توضیح بالا،

نقیض « n مضرب ۶ است» در فرض و نقیض « n^2 مضرب ۶ است» در حکم قرار می‌گیرد.

پس جواب چنین است:

 n^2 مضرب ۶ نیست.

--- ❓ ---

نکته ۱۶

۷) هم‌ارزی شرطی:

هم‌ارزی بسیار مهمی برای گزاره‌های شرطی را همواره در ذهن داشته باشید:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

❓ گزاره‌ی $\sim(p \Rightarrow \sim q)$ هم‌ارز کدام است؟④ $\sim p \wedge q$ ③ $q \vee \sim p$ ② $p \wedge q$ ① $p \vee \sim q$

گزینه ۲ ✓

با استفاده از نکته‌ی قبل و سپس قانون دمورگان:

$$\sim(p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim(\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$$

--- ❓ ---

گزاره‌ی $\sim(p \Rightarrow q)$ با کدام گزاره‌ی زیر، هم‌ارزش است؟ (کنکور ۹۸)

④ $\sim p \wedge q$

③ $p \wedge \sim q$

② $p \vee \sim q$

① $\sim p \vee q$

گزینه ۳

هم‌ارزی شرطی و سپس دموگان:

$$\sim(p \Rightarrow q) \equiv \sim(\sim p \vee q) \equiv p \wedge \sim q$$

---◇---

گزاره‌ی $(p \wedge q) \Rightarrow r$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

② $r \Rightarrow (\sim p \Rightarrow \sim q)$

① $p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

④ $\sim r \Rightarrow (p \Rightarrow q)$

③ $\sim p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$

گزینه ۱

پاسخ با چندپار استفاده از هم‌ارزی: $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$

$$(p \wedge q) \Rightarrow r \equiv \sim(p \wedge q) \vee r \equiv (\sim p \vee \sim q) \vee r$$

چون همه رابطه یکسان (\vee) هستند، می‌توانیم پرانترها را برداشته و چاپچایی انجام دهیم.
بنابراین:

$$\sim p \vee (r \vee \sim q) \equiv p \Rightarrow (r \vee \sim q) \equiv p \Rightarrow (\sim r \Rightarrow \sim q)$$

---◇---

نکته ۱۷

۸) هم‌ارزی دو شرطی:

گزاره‌ی دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ دقیقاً هنگامی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.
بنابراین هر دوی $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ هم درست خواهند بود و در نتیجه:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

بعلاوه:

اطلاع زیر از نقیض گزاره‌ی دوشروطی نیز ممکن است مفید واقع شود:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$$

کدام گزاره‌ی زیر هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $(\sim p \vee q) \Leftrightarrow q$ است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

④ $\sim p \Leftrightarrow q$

③ q

② $p \vee q$

① p

گزینه ۲

طبق نکته‌ی قبل هم‌ارز آن را نوشته و ساده می‌کنیم:



$$[(\sim p \vee q) \Rightarrow q] \wedge \underbrace{[q \Rightarrow (\sim p \vee q)]}_T \equiv \sim(\sim p \vee q) \vee q \equiv (p \wedge \sim q) \vee q$$

$$\equiv (p \vee q) \wedge \underbrace{(\sim q \vee q)}_T \equiv p \vee q$$

(توجه: درستی کروشیه‌ی دوم بدیهی است، چون اگر q درست باشد، $p \vee q \sim$ نیز درست است.)



جمع‌بندی:

برای تشخیص هم‌ارز بودن گزاره‌ها، مانند آنچه تاکنون دیده‌ایم، مراحل زیر انجام می‌شود.

- به هم‌ارزی‌های بدیهی توجه کرده و آن‌ها را در صورت وجود، به کار می‌بریم.
- قوانین بالا را به صورت مناسب به کار برده تا موارد هم‌ارز شناسایی شوند.

البته:

در شرایط دشوار یا محدودیت زمان، دو روش بسیار مفید زیر بر مبنای مقدارگذاری وجود دارد؛ مخصوصاً روش دوم!

نکته ۱۸

مقدارگذاری:

- در گزاره مرکب سؤال، جای گزاره‌های ساده «د» یا «ن» قرار داده و ارزش کل گزاره را تعیین کنید.
- همان مقادیر را در گزینه‌ها نیز قرار داده و هر گزاره‌ای که ارزش متفاوت با جواب مرحله‌ی قبل داشت، رد می‌شود.
- در صورت لزوم، مقادیر «د» و «ن» گزاره‌ها را تغییر داده تا فقط یک گزینه باقی بماند.

توجه کنید:

هنگام جایگذاری گزاره‌ها، پراتزها باید دقیقاً رعایت شوند.

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ هم‌ارز کدام است؟

① p ② $\sim p$ ③ $\sim q$ ④ q

گزینه ۴

اگر جای هر دوی p و q را «د» قرار دهیم، گزاره‌ی سؤال:

رد گزینه‌های ۲ و ۳ → درست : $(د \vee د) \wedge (د \Rightarrow د)$

برای انتخاب بین گزینه‌های اول و چهارم، p را «د» و q را «ن» قرار می‌دهیم؛

رد گزینه‌ی ۱ → نادرست : $(د \vee د) \wedge (ن \Rightarrow د)$



کدام گزاره همواره درست است؟

- ① $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$ ② $p \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q \Rightarrow p))$
- ③ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$ ④ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

گزینه ۲

اگر p را «ن» و q را «د» قرار دهیم؛
گزینه‌های اول و سوم هر دو به صورت $(n \Leftrightarrow d)$ تبدیل شده، هر دو نادرست و رد می‌شوند.
اکنون اگر هر دوی p و q را «ن» قرار دهیم، گزینه‌ی چهارم؛
رد گزینه‌ی ۴ \rightarrow نادرست : $n \Rightarrow (n \Rightarrow n)$

--- ❖ ---

روش (نه چندان علمی)، ولی بسیار مفید تستی:

نکته ۱۹

شبیه سازی:

- از تشخیص برابری عبارات مجموعه‌ای (گفته شده در فصل سوم) به روش عددی استفاده می‌کنیم:
- در گزاره‌های مورد نظر، نماد « \sim » را تبدیل به «متمم»، نماد « \vee » را تبدیل به « \cup » و نماد « \wedge » را تبدیل به « \cap » می‌کنیم.
 - نمودار ون مربوطه را رسم کرده و با گزینه‌ها مقایسه می‌کنیم.

نمونه‌هایی از شبیه سازی:

گزاره‌ی $\sim(p \vee \sim q)$ را به صورت $(p \cup q')$ و گزاره‌ی $(q \wedge p) \wedge (\sim p \vee q)$ را به صورت $(p \cup q) \cap (q \cap p)$ در نظر می‌گیریم.

توجه کنید:

اگر در گزاره رابط \Rightarrow یا \Leftrightarrow وجود داشت، باید قبل از کاربرد تکنیک فوق، آن‌ها را طبق هم‌ارزی‌های مربوطه، بر حسب \sim و \wedge و \vee بیان کنید!

برای آشنایی بیشتر شما با روش‌های تشخیص هم‌ارزی، تست بعد را به هر سه روش بالا پاسخ می‌دهیم.

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟

④ p

③ $\sim p$

② $\sim q$

① q

گزینه ۱

روش اول) استفاده از قوانین:

$$\overbrace{(\sim p \vee q)}^{\sim p \vee q} \wedge \overbrace{(\sim p \vee q)}^{p \vee q} \equiv \overbrace{(\sim p \wedge p)}^F \vee q \equiv q$$

روش دوم) مقدار گذاری:

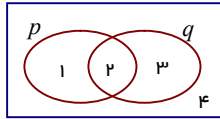
- اگر q درست باشد، هر دوی $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ بدون توجه به ارزش p ، درست بوده و $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ درست خواهد شد.



- اگر q نادرست باشد، دقیقاً یکی از $p \Rightarrow q$ و $\sim p \Rightarrow q$ درست و دیگری نادرست می‌شود. در نتیجه گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (\sim p \Rightarrow q)$ نادرست خواهد بود. پس هم‌ارز با q است.

روش سوم شبیه سازی:

حاصل گزاره با توجه به شکل مقابل:



$$\overbrace{(\sim p \cup q)}^{3,4 \cup 2,3} \cap \overbrace{(p \cup q)}^{1,2,3} = \{2,3,4\} \cap \{1,2,3\} = \{2,3\} = q$$

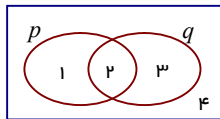
---◇---

◇ گزاره‌ی $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی کدام گزاره است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

- ① $(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)$ ② $\sim [(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)]$
- ③ $(\sim p \vee q) \vee (\sim p \wedge q)$ ④ $\sim [(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)]$

گزینه ۴ ✓

با توجه به هم‌ارزی: $\sim p \Leftrightarrow q \equiv \overbrace{(\sim p \Rightarrow q)}^{p \vee q} \wedge \overbrace{(q \Rightarrow \sim p)}^{\sim q \vee \sim p}$ ، آن را به صورت $(p \cup q) \cap (q' \cup p')$ در نظر می‌گیریم. استفاده از نمودار ون به روش فصل سوم:



$$(p \cup q) \cap (q' \cup p') = \{1,2,3\} \cap \{1,3,4\} = \{1,3\}$$

اکنون باید گزینه‌ها را به سرعت چک کنیم؛ هر کدام حاصل $\{1,3\}$ شود، جواب است. به آسانی دیده می‌شود که فقط مورد چهارم صحیح است:

$$\begin{aligned} \sim [(\sim p \wedge q) \wedge (\sim p \vee q)] &\equiv (\sim p \wedge q) \vee (p \wedge \sim q) \\ &\equiv (p' \cap q) \cup (p \cap q') = \{3\} \cup \{1\} = \{1,3\} \end{aligned}$$

---◇---

در بیان گزاره‌ها یا ادعاهای مختلف توسط گزاره نماها، معمولاً آن ادعا در مورد تمام یا برخی از اعضاء مطرح می‌شود. برای

نمونه؛

- همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین هم هستند.
- همه عددهایی که بر ۶ بخش پذیرند، بر ۲ و ۳ هم بخش پذیر هستند.
- برخی عددهایی که بر ۳ بخش پذیرند، بر ۶ هم بخش پذیر هستند.

استفاده از «سور» در کنار یک گزاره‌نما، گزاره تشکیل می‌دهد.

نکته ۲۰

سور عمومی:

نماد این سور « \forall » بوده و آن را «به ازای هر» یا «برای همه» می‌خوانیم. نمونه:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$$

خواننده می‌شود: «به ازای هر x عضو \mathbb{R} داریم: $x^2 > 0$ » که البته گزاره‌ای نادرست است.

واضح است که:

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور عمومی فقط وقتی درست است که:

برای هر عضو از دامنه‌ی متغیر، گزاره‌نما درست باشد.

برای نمونه؛

درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) $\forall x \in P$; x عددی فرد است.

(P مجموعه اعداد اول)

نادرست است؛ زیرا عدد ۲ عضو P بوده و عددی فرد نیست.

ب) $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \cdot \cot x = 1$

نادرست است؛ زیرا برای عددهای په صورت: $x = \frac{k\pi}{2}$ ، تانژانت یا کتانژانت تعریف نشده بوده و تساوی معنی ندارد.

پ) $\forall x \in \mathbb{N}; x^2 - x \in \mathbb{N}$

نادرست است؛ زیرا برای $x=1$ مقدار $x^2 - x$ برابر صفر بوده و در \mathbb{N} قرار ندارد.



وقتی یک حکم برای برخی موارد مطرح می‌شود، سور دیگری وجود دارد:

نکته ۲۱

سور وجودی:

نماد این سور « \exists » بوده و «به ازای بعضی» یا «وجود دارد» خوانده می‌شود. نمونه:

$$\exists x \in \mathbb{N} ; x^2 = x$$

خوانده می‌شود: «به ازای بعضی مقادیر x عضو \mathbb{N} داریم: $x^2 = x$ » که ادعایی درست است.

بعلاوه:

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور وجودی وقتی درست است که مجموعه جواب گزاره‌نما تهی نباشد.

برای نمونه:

درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) $\exists x \in \mathbb{N} ; |x| - 1 < 0$

نادرست است، زیرا:

گزاره‌نما معادل $|x| < 1$ است و چون هیچ عدد طبیعی در آن صادق نیست، مجموعه جواب تهی بوده و گزاره‌ی سوری صحیح نیست.

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} ; |x| - 1 < 0$

درست است، زیرا:

عدد $x = 0$ عضو \mathbb{Z} در گزاره‌نمای $|x| < 1$ صدق می‌کند.

کدام یک از گزاره‌های سوری زیر از لحاظ ارزش با بقیه متفاوت است؟ ($x \in \mathbb{R}$)

۲) $\exists x ; x^2 + x + 1 < 0$

۱) $\forall x ; (x+1)^2 > 0$

۴) $\exists x ; \frac{1}{x-1} = 0$

۳) $\forall x ; x^2 + 3x + 3 > 0$

گزینه ۳

مورد اول یا $x = -1$ نقض می‌شود؛ مورد دوم دارای $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت بوده و همواره مثبت است (مجموعه جواب تهی). مورد چهارم

هم دارای مجموعه جواب تهی است. در مورد سوم، $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت بوده و همواره مثبت است (مثال نقض ندارد).

ارزش چه تعداد از گزاره‌های زیر صحیح است؟

الف) $\forall x \in \mathbb{Z} ; x^2 > 0$

ب) $\forall x \in \{x | 0 < x \leq 1, x \in \mathbb{R}\} ; x^2 \leq x$

پ) $\forall x \in (0, +\infty) ; x + \frac{1}{x} > 2$

ت) $\exists x \notin \mathbb{Q} ; x^2 \notin \mathbb{Q}$



1

2

3

4

گزینه ۲

مورد اول یا $x = 0$ نقض می‌شود (نادرست)؛ مورد دوم جزء خواص عددهای پین صفر و یک بوده و همیشه درست است. مورد سوم یا $x = 1$ نقض می‌شود (نادرست)؛ مورد چهارم هم دارای جواب است؛

$$x = \sqrt[3]{2} \notin \mathbb{Q} \text{ و همچنین } x^2 = \sqrt[3]{4} \notin \mathbb{Q}$$

گزاره $(\exists x \in \mathbb{N}; \sim(x \in P \wedge x \in E))$ به فارسی چگونه بیان می‌شود؟ P مجموعه‌ی اعداد اول و E مجموعه‌ی اعداد زوج است.

- 1 عددی طبیعی وجود ندارد که اول یا زوج باشد.
 2 برخی از اعداد طبیعی، اول و زوج هستند.
 3 برخی از اعداد طبیعی، اول نیستند یا زوج نیستند.
 4 عددی طبیعی وجود ندارد که اول و زوج باشد.

گزینه ۳

ابتدا توسط قانون دموگان، گزاره‌ها را ساده‌تر می‌نویسیم؛

$$\exists x \in \mathbb{N}; (x \notin P \vee x \notin E)$$

خوانده می‌شود:

برخی عددهای طبیعی، یا اول نیستند $(x \notin P)$ یا زوج نیستند $(x \notin E)$.

اکنون به ساختن نقیض سورها توجه کنید:

نکته ۲۲

نقیض سورها:

❖ نقیض سور عمومی

نقیض ادعای «به ازای هر x ، عبارت $p(x)$ درست است» این است که:
 «وجود دارد حداقل یک x که $p(x)$ نادرست باشد.»

$$\sim(\forall x; p(x)) \equiv \exists x; \sim p(x) \quad \text{بنابراین:}$$

❖ نقیض سور وجودی

نقیض ادعای «به ازای برخی x ، عبارت $p(x)$ درست است» این است که:
 «برای هر x ، عبارت $p(x)$ نادرست است.»

$$\sim(\exists x; p(x)) \equiv \forall x; \sim p(x) \quad \text{بنابراین:}$$

❖ نقیض گزاره‌ی «تمام انسان‌ها فناپذیرند.» کدام است؟

- 1 بعضی از انسان‌ها فناپذیرند.
 2 بعضی از انسان‌ها فنا ناپذیرند.
 3 هیچ انسانی نیست که فنا ناپذیر باشد.
 4 تمام انسان‌ها فنا ناپذیرند.

گزینه ۲

گزاره‌ی داده شده با سور عمومی بیان شده و باید:
سور عمومی به سور وجودی تبدیل شود و گزاره‌ی نقیض شود.

یعنی:

وجود دارد انسانی که قنای پذیر نباشد (یعنی قنای ناپذیر باشد).

---◇---

نقیض گزاره‌ی $(\exists x \in \mathbb{R}; 3x > 2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$ کدام است؟

① $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{2}{3}) \vee (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

② $(\exists x \in \mathbb{R}; 3x \geq 2) \wedge (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0)$

③ $(\forall x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{2}{3}) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0)$

④ $(\forall x \in \mathbb{R}; 3x \leq 2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 < 0)$

گزینه ۳

طبق قوانین گفته شده تا اینجا:

$$\begin{aligned} \sim [(\exists x \in \mathbb{R}; 3x > 2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)] &\equiv \sim (\exists x \in \mathbb{R}; 3x > 2) \wedge \sim (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0) \\ &\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; 3x \not> 2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \not> 0) \\ &\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; 3x \leq 2) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0) \\ &\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; x \leq \frac{2}{3}) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; x^2 \leq 0) \end{aligned}$$

---◇---

ارزش گزاره‌ی «حداقل یک عدد طبیعی وجود دارد که اگر اول باشد، آنگاه زوج است.» چیست و نقیض آن کدام است؟

(E مجموعه اعداد طبیعی زوج، O مجموعه اعداد طبیعی فرد و P مجموعه اعداد اول است.)

① درست - $\forall n \in \mathbb{N}: n \notin P \Rightarrow n \notin E$

② درست - $\forall n \in \mathbb{N}: n \in P \wedge n \in O$

③ نادرست - $\exists n \in \mathbb{N}: n \notin E \Rightarrow n \notin P$

④ نادرست - $\exists n \in \mathbb{N}: n \in P \wedge n \notin E$

گزینه ۲

گزاره خودش چنین است:

$$\exists n \in \mathbb{N}: n \in P \Rightarrow n \in E$$

گزاره درست است، زیرا $n=1$ در آن صادق است، (انتقای مقدم)، نقیض آن به روش بالا:

$$\forall n \in \mathbb{N}: \sim (n \in P \Rightarrow n \in E) \equiv \forall n \in \mathbb{N}: n \in P \wedge n \notin E \equiv \forall n \in \mathbb{N}: n \in P \wedge n \in O$$

---◇---



❓ نقیض گزاره‌ی $(\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{R} : q(x))$ کدام است؟

$(\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : \sim q(x))$ ❷ $(\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : \sim q(x))$ ❶

$(\forall x \in \mathbb{R} : p(x)) \vee (\forall x \in \mathbb{R} : \sim q(x))$ ❹ $(\forall x \in \mathbb{R} : p(x)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : \sim q(x))$ ❸

گزینه ۱

طبق هم‌ارزی $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ و روش نقیض کردن سور وجودی، جواب چنین است:

$$(\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) \wedge \sim(\exists x \in \mathbb{R} : q(x)) \equiv (\exists x \in \mathbb{R} : p(x)) \wedge (\forall x \in \mathbb{R} : \sim q(x))$$

--- ❖ ---

۱- به جمله‌ی خبری که در حال حاضر یا آینده دارای ارزش درست یا نادرست باشد، گوئیم.

- ① گزاره‌نما ② استدلال ③ گزاره ④ مفروضات

۲- نقیض گزاره «اگر x اول و فرد باشد، آنگاه بر ۲ بخش پذیر نیست.» کدام است؟

- ① اگر x اول و فرد باشد، آنگاه بر ۲ بخش پذیر است.
 ② x اول و فرد است یا بر ۲ بخش پذیر نیست.
 ③ x اول و فرد است و بر ۲ بخش پذیر است.
 ④ x اول یا فرد است و بر ۲ بخش پذیر نیست.

۳- نقیض گزاره « a مضرب ۵ نیست یا زوج است.» کدام مورد است؟

- ① a مضرب ۱۰ است. ② a مضرب ۵ است، ولی فرد نیست.
 ③ a مضرب فرد ۵ است. ④ a فرد است، ولی مضرب ۵ نیست.

۴- اگر ارزش p نادرست و q درست باشد، آنگاه ارزش گزاره‌های $\sim(\sim p)$ و q به ترتیب کدام است؟

- ① درست - درست ② درست - نادرست
 ③ نادرست - درست ④ نادرست - نادرست

۵- گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال آن که پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{1}{3}$ است.» را در نظر بگیرید. کدام یک از

پیشامدهای زیر عضوی از مجموعه جواب این گزاره نما است؟

- ① ظاهر شدن عدد اول ② ظاهر شدن عدد زوج
 ③ ظاهر شدن عدد مضرب ۳ ④ ظاهر شدن عدد کوچک‌تر از ۴

۶- گزاره‌نمای «در پرتاب یک تاس، احتمال آن که پیشامد A رخ دهد، برابر $\frac{2}{3}$ است.» را در نظر بگیرید. مجموعه جواب این

گزاره‌نما چند عضو دارد؟

- ① ۲ ② ۴ ③ ۱۲ ④ ۱۵

۷- کدام گزاره همیشه درست است؟

- ① $\sim p \Rightarrow p$ ② $p \Rightarrow \sim p$ ③ $\sim p \wedge p$ ④ $\sim p \vee p$



۸- کدام گزینه در مورد یک استدلال در منطق ریاضی درست نیست؟

- ① هر استدلال می‌تواند شامل چندین جمله‌ی خبری باشد.
- ② نتیجه‌ی یک استدلال یک جمله‌ی خبری است.
- ③ مفروضات هر استدلال از یک جمله‌ی خبری تشکیل شده است.
- ④ هر استدلال می‌تواند ترکیبی از گزاره‌ها باشد.

۹- جدول ارزش مقابل مربوط به کدام گزاره است؟

p	q	?
د	د	ن
د	ن	د
ن	د	ن
ن	ن	ن

① $p \vee \sim q$

② $p \wedge \sim q$

③ $\sim p \wedge q$

④ $\sim p \vee q$

۱۰- نقیض گزاره «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه ۵ عددی فرد است.» کدام است؟

- ① ۲ عدد اول نیست و ۵ عددی فرد است.
- ② ۲ عدد اول است و ۵ عددی زوج است.
- ③ ۲ عدد اول است یا ۵ عددی زوج است.
- ④ ۲ عدد اول نیست یا ۵ عددی فرد است.

۱۱- از درستی گزاره‌های $\sim p$ و $q \Rightarrow p$ ، کدام گزاره همیشه درست خواهد بود؟

- ① $\sim(p \vee q)$ ② $p \wedge \sim q$ ③ $p \wedge q$ ④ $\sim p \wedge q$

۱۲- گزاره‌ی $[p \Rightarrow (q \wedge r)] \Rightarrow (p \Rightarrow r)$:

- ① فقط هنگامی درست است که p درست باشد.
- ② همواره درست است.
- ③ فقط هنگامی درست است که p و q درست باشند.
- ④ فقط هنگامی درست است که $p \Rightarrow r$ درست باشد.

۱۳- کدام گزاره همیشه درست است؟

- ① $(\sim p \vee q) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$ ② $(\sim q \Rightarrow q) \Rightarrow (p \wedge \sim p)$
- ③ $[(\sim p \vee p) \Rightarrow (q \wedge \sim q)] \Rightarrow r$ ④ $(p \vee q \vee r) \Rightarrow (\sim p \vee q \vee r)$

۱۴- اگر بدانیم ارزش گزاره‌های p و q درست است، کدام یک از گزاره‌های زیر قطعاً درست هستند؟

- ① $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ ② $(s \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \Leftrightarrow r)$
- ③ $(p \Rightarrow \sim s) \wedge (q \vee \sim r)$ ④ $(\sim p \Rightarrow s) \Leftrightarrow (q \vee \sim p)$

۱۵- ارزش کدام گزاره مرکب درست است؟



- ① ۲ اول است و $\sqrt{3}$ گنگ است.
 ② $\sqrt{16}$ گنگ است یا ۳ زوج است.
 ③ $\sqrt{31}$ گنگ است و ۳۹ مربع کامل است.
 ④ عدد $\sqrt{\frac{4-29}{5+4}}$ گویا است و عدد $\sqrt{24}$ صحیح است.

۱۶- گزاره‌نمای « a عددی مربع کامل است و باقی مانده‌ی آن بر ۵ برابر یک است.» را در نظر بگیرید. اگر دامنه‌ی متغیر این گزاره‌نما مجموعه‌ی اعداد صحیح دو رقمی باشد، مجموعه‌ی جواب آن چند عضو دارد؟

- ① ۱ ② ۴ ③ ۲ ④ ۳

۱۷- در جدول ارزش گزاره‌ای شامل p ، q ، r و s ، در چند حالت حداقل سه گزاره‌ی ساده دارای ارزش نادرست است؟

- ① ۴ ② ۵ ③ ۱۰ ④ ۱۵

۱۸- اگر a ، b و c سه عدد حقیقی باشند به طوری که: « $a > b$ یا $b < c$ »، نقیض آن در کدام گزینه آمده است؟

- ① $a < b$ و $b > c$ ② $c < a < b$
 ③ $c \leq a \leq b$ ④ $a \leq b$ و $b \geq c$

۱۹- گزاره‌ی $p \vee (\sim p \wedge q)$ هم‌ارز کدام است؟

- ① p ② $p \wedge q$ ③ $p \vee q$ ④ q

۲۰- گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ هم‌ارز کدام نیست؟

- ① $p \Rightarrow p \wedge q$ ② $\sim p \wedge q$ ③ $p \wedge \sim q \Rightarrow \sim p$ ④ $\sim p \vee q$

۲۱- گزاره‌ی $p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$ هم‌ارز کدام است؟

- ① $\sim(p \wedge q) \vee r$ ② $(p \wedge q) \wedge \sim r$ ③ $(p \vee q) \wedge \sim r$ ④ $(p \vee q) \vee r$

۲۲- گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$ هم‌ارز کدام است؟

- ① $\sim(p \wedge q) \vee r$ ② $(p \wedge q) \Rightarrow r$
 ③ $(p \vee r) \wedge (q \Rightarrow r)$ ④ $(p \wedge r) \vee (q \Rightarrow r)$

۲۳- کدام گزاره با بقیه هم‌ارز نیست؟

- ① $\sim p \vee \sim q \vee \sim r$ ② $p \Rightarrow \sim(q \wedge r)$
 ③ $p \wedge q \Rightarrow r$ ④ $(p \Rightarrow \sim q) \vee (p \Rightarrow \sim r)$

۲۴- گزاره‌ی $(\sim p \wedge (\sim q \wedge r)) \vee (q \wedge r) \vee (p \wedge r)$ هم‌ارز کدام است؟



$\sim r$ ④

$p \vee q$ ③

$p \wedge q$ ②

r ①

۲۵- نقیض گزاره‌ی سوری $x + \frac{1}{x} \leq -2$; $\forall x \in (-\infty, 0)$ کدام است؟

$\exists x \in (-\infty, 0)$; $x + \frac{1}{x} > -2$ ②

$\exists x \in (-\infty, 0)$; $x + \frac{1}{x} > -2$ ①

$\exists x \in (0, +\infty)$; $x + \frac{1}{x} > -2$ ④

$\exists x \in (0, +\infty)$; $x + \frac{1}{x} > -2$ ③

۲۶- نقیض گزاره‌ی $\exists n \in \mathbb{N}$; $((2^n)^2 + 1) \in P$ چه ارزشی دارد و به چه صورت نوشته می‌شود؟ (P مجموعه اعداد اول است.)

$\exists n \in \mathbb{N}$; $((2^n)^2 + 1) \notin P$ و نادرست ②

$\forall n \in \mathbb{N}$; $((2^n)^2 + 1) \notin P$ و درست ①

$\forall n \in \mathbb{N}$; $((2^n)^2 + 1) \notin P$ و نادرست ④

$\exists n \in \mathbb{N}$; $((2^n)^2 + 1) \notin P$ و درست ③

۲۷- هرگاه $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid -1 \leq x \leq 1\}$ دامنه‌ی متغیر گزاره‌نما باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های سوری زیر نادرست است؟

$\exists x \in A$; $x^2 > x$ ②

$\forall x \in A$; $x^2 = x$ ①

$\exists x \in A$; $x - \frac{1}{x} > 0$ ④

$\forall x \in A$; $2^x \geq x + 1$ ③

۲۸- کدام یک از گزاره‌های زیر صحیح نیست؟

$A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x ; (x \in A \Rightarrow x \in B)$ ①

$A = B \Leftrightarrow [(A \subseteq B) \vee (B \subseteq A)]$ ②

$A \not\subseteq B \Leftrightarrow \exists x ; (x \in A \wedge x \notin B)$ ③

$\forall x (x \in A \Rightarrow x \in B \vee x \in C) \Rightarrow A \subseteq B \cup C$ ④

۲۹- ارزش درستی و نقیض گزاره‌ی « $\exists y \in \mathbb{Z}$; $y < 0 \wedge y^2 < 1$ » به ترتیب کدام است؟

$\exists y \in \mathbb{Z}$; $y \geq 0 \wedge y^2 \geq 1$ و نادرست ②

$\exists y \in \mathbb{Z}$; $y \geq 0 \wedge y^2 \geq 1$ و درست ①

$\forall y \in \mathbb{Z}$; $y \geq 0 \vee y^2 \geq 1$ و درست ④

$\forall y \in \mathbb{Z}$; $y \geq 0 \vee y^2 \geq 1$ و نادرست ③

۳۰- کدام گزاره هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ است؟ (کنکور ۹۹)

$(p \vee q) \vee \sim (p \wedge q)$ ②

$(p \wedge q) \vee \sim (p \vee q)$ ①

$(p \vee q) \wedge \sim (p \wedge q)$ ④

$(p \wedge q) \wedge \sim (p \vee q)$ ③

۳۱- تاس سالمی را پرتاب می‌کنیم. مجموعه جواب گزاره‌نمای $P(A) = \frac{1}{3}$ چند عضو دارد؟

۶ ④

۱۲ ③

۱۵ ②

۶۴ ①

۳۲- گزاره‌ی: « $\forall x \in \mathbb{N}$, $\exists y \in \mathbb{N}$: $p(x, y)$ » به ازای کدام گزاره‌نمای $p(x, y)$ ارزش درست دارد؟

$x - y = -4$ ④

$x - y = 4$ ③

$\frac{x}{y} = 4$ ②

$xy = 4$ ①



۳۳- نقیض گزاره‌ی: « $\forall x \in \mathbb{R} : (x > 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2)$ » کدام است؟

$$\exists x \in \mathbb{R} : (x \leq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} < 2) \quad \text{②} \qquad \forall x \in \mathbb{R} : (x \leq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} < 2) \quad \text{①}$$

$$\exists x \in \mathbb{R} : (x > 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} < 2) \quad \text{④} \qquad \forall x \in \mathbb{R} : (x \leq 0 \Leftrightarrow x + \frac{1}{x} \geq 2) \quad \text{③}$$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴