۱۱

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

آمار و احتمال

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

آمار و احتمال (یازدهم ریاضی)

۱

آشنایی با منطق ریاضی

فهرست	صفحه

۱ مفاهیم پایه

در مبحث منطق ریاضی، احکام ریاضی دقیق‌تر بیان شده، استدلال‌های مربوطه بیان می‌شود و همچنین اعتبار یک استدلال مشخص خواهد شد. مفهوم محوری این مبحث:

گزاره:
یک جمله خبری است که دقیقاً «درست» یا «نادرست» است. گزاره‌ها را معمولاً با حروف p، q، r و ... نام گذاری می‌کنند. پس:
ارزش گزاره فقط یکی از دو حالت زیر است:
درست: د نادرست: ن

(گاهی درستی و نادرستی گزاره را به ترتیب با T و F نشان می‌دهیم.)

چند نمونه از گزاره‌ها:
الف) تعداد ماه‌های سال ۱۲ است.
ب) تمام عددهای اول، فرد هستند.
پ) عدد $2^{3^{1403}}+1$ عددی اول است.

توجه کنید:

۱) ممکن است ارزش گزاره در این لحظه قابل تعیین نبوده و تعیین آن به بررسی خاص نیاز داشته یا با گذشت زمان در آینده وضعیت آن مشخص گردد. (مانند مورد «پ» بالا)

۲) طبق تعریف، جملات از انواع زیر گزاره محسوب نمی‌شوند:
- جملاتی که در آن‌ها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و . . .
  نمونه: لطفاً در اتاق را ببندید.
- جملات خبری که درست یا نادرست بودن آن‌ها به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.
  نمونه: زبان فرانسه از زبان انگلیسی جذاب‌تر است.
- جملات خبری که تعیین درست یا نادرست بودن آن‌ها غیر ممکن باشد.
  نمونه: ریاضی از شیمی دشوارتر است.

مثال: تعیین کنید کدام مورد زیر گزاره است و دلیل بیاورید.
الف) تهران پر جمعیت‌ترین شهر ایران است.
ب) رامسر زیباترین شهر کشورمان است.
پ) چه هوای آلوده‌ای!

پاسخ

الف) یک گزاره است، چون یک خبر بیان شده و درست یا نادرستی آن قابل تعیین است.

ب) گزاره نیست؛

این جمله خبر است، ولی درست یا نادرست بودن آن به سلیقه‌ی افراد بستگی دارد.

پ) گزاره نیست؛ چون جمله عاطفی بوده و خبری محسوب نمی‌شود.

مثال: تعیین کنید هر مورد زیر گزاره است یا خیر؛ ارزش هر گزاره را نیز مشخص کنید.

الف) برخی از اعداد اول، زوج هستند.

ب) هر معادله‌ی درجه دوم، دو ریشه حقیقی دارد.

پ) آیا عدد ۹۱ اول است.

ت) در انتخاب یک عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰، احتمال انتخاب یک عدد اولِ زوج برابر ۰/۰۰۱ است.

پاسخ

الف) گزاره است؛ چون عدد اولِ ۲ زوج است، ارزش گزاره «د» است.

ب) گزاره است؛ چون در حالت $\Delta < 0$ معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد، ارزش این گزاره «ن» است.

پ) گزاره نیست؛ چون جمله سؤالی است. (توجه: عدد $۹۱ = ۷ \times ۱۳$ اول نیست.)

ت) گزاره است؛

چون کلاً ۹۹۹ عدد برای انتخاب داشته‌ایم و حالت مطلوب فقط یک مورد است، احتمال $\frac{۱}{۹۹۹}$ خواهد شد و ارزش گزاره «ن» است.

یک روش ضروری و کاربردی ساخت گزاره‌ی جدید از یک گزاره‌ی موجود، به صورت زیر است.

نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی p را با نماد $\sim p$ نوشته و آن را «نقیض p» یا «چنین نیست که p» می‌خوانیم.

همیشه:

ارزش درستی $\sim p$ دقیقاً برعکس ارزش درستی p است.

برای نمونه؛

گزاره «تبریز مرکز استان زنجان است.» را به همه‌ی روش‌های زیر می‌توان نقیض کرد:

- چنین نیست که تبریز مرکز استان زنجان است.
- تبریز مرکز استان زنجان نیست.

نمونه‌های دیگر:

الف) نقیض گزاره‌ی « ۵ عددی فرد است.» به صورت: « ۵ عددی زوج است.» قابل بیان است؛ (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابل هم هستند.)

ب) نقیض گزاره‌ی « $\sqrt{2}$ عدد حقیقی گنگ است.» به صورت: « $\sqrt{2}$ عددی گنگ نیست.» قابل بیان است. ولی چون گنگ و گویا بودن مخالف هم هستند، نقیض را می‌توان به صورت: « $\sqrt{2}$ عددی گویا است.» نیز نوشت.

توجه کنید:

a را یک عدد معلوم بگیرید. نقیض گزاره‌ی « a عددی مثبت است.» به صورت: « a عددی منفی است.» صحیح نیست.

باید خلافِ خبر را بیان کنید.

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن این است که عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همه‌ی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که a عددی مثبت است.
- a عددی مثبت نیست.
- a عددی منفی یا برابر صفر است.

روشی مفید برای نمایش ارزش گزاره‌ها، استفاده از یک جدول به صورت زیر است.

جدول ارزش گزاره:

در چنین جدولی، تمام حالت‌هایی ممکن برای ارزش یک گزاره نمایش داده می‌شود. وقتی یک گزاره‌ی p داریم، ارزش آن دو حالت ممکن دارد که در یک جدول دو سطری به صورت زیر تشکیل می‌شود.

p
د
ن

برای نمونه؛

ارزش نقیض یک گزاره، یعنی $\sim p$ را بر حسب ارزش p می‌توان در یک جدول نشان داد:

p	~p
د	ن
ن	د

چنان‌که می‌بینید:

در جدول، امکان مقایسه‌ی ارزش گزاره‌ها وجود دارد.

نمونه‌ی دیگری ببینید.

مثال: (از کتاب) با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش درستی $\sim(\sim p)$ و p را مقایسه کنید.

پاسخ

باید توسط p، ارزش $\sim p$ و سپس ارزش $\sim(\sim p)$ را مشخص کنیم:

p	~p	~(~p)
د	ن	د
ن	د	ن

می‌بینید:

ارزش گزاره‌های p و $\sim(\sim p)$ یکسان است.

(بررسی و کاربرد بیشتر جدول در بخش بعد - گزاره‌های مرکب - انجام خواهد شد.)

توجه کنید:

به دلیل ارزش کاملاً یکسان دو گزاره‌ی p و $\sim(\sim p)$، می‌نویسیم: $\sim(\sim p)\equiv p$ و آن دو را «**هم‌ارز**» گوئیم. (بررسی کامل هم‌ارزی گزاره‌ها کمی پیش‌تر.)

مورد بعد ارتباط نزدیکی با مفهوم یک گزاره دارد:

گزاره نما:

یک جمله‌ی خبری است که در آن یک یا چند متغیر داریم با شرط زیر:

وقتی جای متغیرها مقدار قرار دهیم، به یک گزاره تبدیل می‌شود.

نمونه‌هایی ببینید:

- عبارت $۲x+۶=۰$ یک گزاره‌نما با یک متغیر است که:
  برای مقدار $x=-۳$ ارزش درست «د» و برای سایر مقادیر ارزش نادرست «ن» دارد.
- عبارت $x^۲+y^۲=۰$ یک گزاره‌نمای دو متغیره است.
  واضح است که برای مقادیر $x=۰$ و $y=۰$ ارزش درست «د» و برای سایر مقادیر ارزش نادرست «ن» دارد.

توجه کنید:

هر چند گزاره‌نما خبر است، ولی گزاره محسوب نمی‌شود. (چرا؟!)

دامنه و جواب:

مجموعه‌ی D شامل تمام مقادیری که وقتی جای متغیر یک گزاره‌نما قرار گیرند، آن را به یک گزاره تبدیل می‌کنند، «**دامنه**» آن گزاره‌نما نامیده می‌شود. برای نمونه:

$$۲x+۶=۰:\quad D=\mathbb{R}$$

چون در عبارت $۲x+۶=۰$ هر عددی را می‌توان جای x قرار داد.

بعلاوه:

مجموعه مقادیری از D که گزاره‌نما را به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌کند، «**مجموعه جواب**» نام داشته و آن را با S نشان می‌دهیم. پس: $S\subseteq D$. برای نمونه، در گزاره نمای $۲x+۶=۰$ داریم:

$$۲x=-۶\ \to\ x=-۳\ \Rightarrow\ S=\{-۳\}$$

مثال: چند مورد تعیین دامنه و مجموعه جواب گزاره‌نما ببینید:

الف) در گزاره‌نمای « x مضرب ۷ است.» دامنه را می‌توانید $D=\mathbb{N}$ یا $D=\mathbb{Z}$ بگیرید.

- اگر $\mathbb{Z}$ دامنه باشد، مجموعه جواب $S=\{\dots,-۷,۰,۷,۱۴,۲۱,\dots\}$ و

- اگر دامنه را $\mathbb{N}$ بگیریم، مجموعه جواب $S=\{۷,۱۴,۲۱,...\}$ خواهد بود.

ب) در گزاره‌نمای «$x^۲+۸x+۷=۰$»، چون هر عددی را می‌توان جای x قرار داد، به صورت معمول دامنه را $\mathbb{R}$ می‌گیریم و با حل معادله، مجموعه جواب $S=\{-۱,-۷\}$ حاصل می‌شود. ولی اگر دامنه را $\mathbb{N}$ بگیریم، مجموعه جواب $S=\varnothing$ است.

مثال: دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نمای $x^۲\geq ۹$ را مشخص کنید.

پاسخ

دامنه را $\mathbb{R}$ می‌گیریم. برای تعیین S، می‌توان نامعادله را به صورت $x^۲-۹\geq ۰$ نوشت و با تعیین علامت $x^۲-۹$ جواب را مشخص کرد. روش کوتاه‌تری هم طبق خواص نامساوی‌ها وجود دارد:

$$x^۲\geq ۹ \Rightarrow \quad x\leq -\sqrt{۹}=۳ \quad \text{یا} \quad x\geq \sqrt{۹}=۳$$

بنابراین:

$$S=(-\infty,-۳]\cup[۳,+\infty)$$

مثال: اگر دامنه‌ی متغیر گزاره نماهای زیر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب را تعیین کنید.

الف) $n^۲-۸n+۱۵<۰$ ب) $n+\frac{۱}{n}\leq ۲$

پاسخ

الف) ابتدا تعیین ریشه‌های $n^۲-۸n+۱۵=۰$:

$$(n-۳)(n-۵)=۰ \Rightarrow n=۳,۵$$

چون بین دو ریشه قبول است، $S=\{۴\}$ خواهد بود.

ب) طرفین را در n ضرب کرده و نامعادله‌ی حاصل را حل می‌کنیم:

$$n^۲+۱\leq ۲n \rightarrow n^۲-۲n+۱\leq ۰ \rightarrow (n-۱)^۲\leq ۰$$

چون سمت چپ منفی نمی‌شود، فقط $(n-۱)^۲=۰$ قابل قبول است:

$$(n-۱)^۲=۰ \rightarrow n-۱=۰ \rightarrow n=۱ \Rightarrow S=\{۱\}$$

مثال: (از کتاب) مجموعه جواب گزاره‌نمای زیر با دامنه‌ی $D=\{۱,۲,\dots,۶\}$ را مشخص کنید.

تاس را پرتاب می‌کنیم و $P(\{x\})=\frac{۱}{۶}$.

پاسخ

احتمال مشاهده‌ی هر عضو D برابر $\frac{۱}{۶}$ است و در نتیجه:

$$S=\{۱,۲,\dots,۶\}$$

مثال: در گزاره‌نمای زیر، دامنه و مجموعه جواب را مشخص کنید.

«احتمال رخ دادن پیشامد A در پرتاب یک تاس $\frac{۲}{۳}$ است.»

پاسخ

فضای نمونه‌ای در پرتاب تاس $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است و جای A هر پیشامد می‌تواند قرار گیرد؛ پس دامنه متشکل از تمام زیر مجموعه‌های فضای نمونه‌ای است. چون $\frac{۴}{۶}=\frac{۲}{۳}$ است، جواب‌ها پیشامدهای چهار عضوی هستند؛ پس:

مجموعه جواب: متشکل از تمام زیر مجموعه‌های ۴ عضوی $\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ است.

پاسخ دهید (۱)

۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش درستی یا نادرستی آن باید بر ما مشخص باشد.

ب) مجموعه جواب معادله‌ی $۲x+۱=۰$ با دامنه اعداد صحیح برابر تهی است.

۲- تعیین کنید کدام موارد گزاره هستند و ارزش هر یک را تعیین کنید.

الف) فصل ترکیبات دشوارترین مبحث کتاب ریاضی دهم است.

ب) دنباله‌ی $۴,۴,۴,\ldots$ هم حسابی و هم هندسی است.

پ) اختلاف دو عدد اول حداقل برابر ۲ است.

۳- نقیض گزاره «عدد ۲ اول است.» به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟

الف) عدد ۲ اول نیست.　　ب) چنین نیست که ۲ اول باشد.　　پ) عدد ۲ مرکب است.

۴- جمله‌ی احتمال وقوع پیشامد A برابر $\frac{۲}{۵}$ است.» یک .... است. (گزاره-گزاره‌نما)

۵- در گزاره‌نمای زیر، اگر $A=\{\qquad\}$ باشد، یک گزاره‌ی درست خواهیم داشت.

در پرتاب یک تاس، احتمال رخ دادن پیشامد A برابر $\frac{۱}{۳}$ است.

در کل، جای A چه پیشامدهایی می‌توان قرار داد که ارزش گزاره‌ی تشکیل شده درست شود؟

منتخب کتاب:

۱- دامنه‌ی متغیر در گزاره‌نماهای زیر، مجموعه‌ی اعداد صحیح است. مجموعه جواب هر کدام را تعیین کنید:

الف) a یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است.　　ب) x مربع کامل است.

پ) $\frac{۲x+۱}{۳}\leq -۱$　　ت) $\{n(n+۱)=۰ \mid n\in W\}$

۲ ترکیب گزاره‌ها

در ابتدا به معرفی چند مفهوم توجه کنید.

گزاره ساده و مرکب:

گزاره‌ی **«ساده»** فقط از یک خبر تشکیل می‌شود، مانند:

«عدد ۹۱ بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی است.»

در مقابل، انواع بسیار مهمی از گزاره‌ها با ترکیب دو یا چند گزاره‌ی ساده ساخته می‌شوند که به آن‌ها گزاره‌ی **«مرکب»** گفته می‌شود. نمونه‌ای ببینید:

«هوای اهواز در فصل تابستان گرم است و دمای شهر بیشتر روزها بالاتر از ۴۰ درجه سانتی‌گراد است.»

یک گزاره‌ی مرکب، بسته به درست یا نادرست بودن هر یک از گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن، درست یا نادرست خواهد شد. یک روش تعیین درستی آن، استفاده از جدول است که در بخش قبل معرفی شد.

تعداد سطرهای جدول: (مهم)

وقتی یک گزاره‌ی ساده‌ی p داریم، ارزش آن دو حالت ممکن دارد که در یک جدول دو سطری به صورت روبه‌رو نمایش داده می‌شود.

p
د
ن

وقتی گزاره مرکب از دو گزاره‌ی ساده تشکیل شده باشد، چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت دارد، باید تعداد $۲\times۲=۲^۲=۴$ سطر در جدول در نظر گرفت تا تمام حالت‌های ممکن پوشش داده شوند.

بعلاوه:

با رعایت مراحل زیر، نمایش در جدول به صورت منظم و استاندارد خواهد بود.

- در ستون اول، ابتدا نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
- در ستون‌های بعدی، تعداد دوباره تعداد نصف می‌شود تا آخر.

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

اگر سه گزاره‌ی ساده‌ی p، q و r با هم ترکیب شده باشند، باید $۲\times۲\times۲=۲^۳=۸$ سطر در جدول در نظر بگیریم.

جدول مربوطه با رعایت نظم گفته شده را ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

(کاربرد جدول را در ادامه برای نمایش ارزش گزاره‌های مرکب می‌بینیم.)

واضح است که:

اگر تعداد n گزاره‌ی ساده داشته باشیم، تعداد سطرهای جدول $\underbrace{۲\times۲\times\cdots\times۲}_{n \text{ بار}}=۲^n$ خواهد بود.

مفهوم هم‌ارزی، مانند آن‌چه در مورد p و $\sim(\sim p)$ دیدیم را دقیق‌تر معرفی می‌کنیم.

گزاره‌های هم‌ارز:

وقتی دو گزاره‌ی ساده یا مرکب P و Q، دارای ارزش یکسان باشند، گوئیم این دو گزاره هم‌ارز (منطقی) هستند. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

توجه داشته باشید:

بر حسب جدول، هم‌ارزی $P \equiv Q$ وقتی برقرار است که ستون‌های P و Q کاملاً یکسان باشند.

هم‌ارزی $p \equiv (\sim p)\sim$ را قبلاً توسط جدول دیده‌ایم.

در ادامه، موضوع اصلی این بخش، یعنی بیان چند روش برای ترکیب گزاره‌ها بیان و بررسی می‌شود.

ترکیب فصلی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q حرف ربط «**یا**» قرارگیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$p \vee q$ نوشته شده و به صورت « p یا q» خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «**ترکیب فصلی**» و نماد $\vee$ را «**فاصل**» گویند.

(علائمی چون $\vee$ که برای ترکیب گزاره‌ها به‌کار می‌روند را «آدات ربط» گویند.)

بعلاوه:

ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی p و q نادرست باشند؛
در غیر این صورت همواره درست است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن

توجه:

چون) $p \vee q$ توسط دو گزاره‌ی ساده p و q ساخته شده، جدول ارزش آن
$2^2 = 4$ سطر یا حالت دارد.)

برای نمونه؛ به بررسی ارزش گزاره‌های زیر توجه کنید:

الف) $\sqrt{2}$ عددی گویا است یا ۹ عددی اول است.

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی « $\sqrt{2}$ عددی گویا است» و « ۹ عددی اول است» نادرست هستند.

ب) ۳ عددی زوج است یا ۹ عددی فرد است.

این گزاره درست است،

چون گزاره « ۹ عددی فرد است.» درست می‌باشد.

مثال: جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee p$ را رسم می‌کنیم.

چون این گزاره فقط از یک گزاره‌ی ساده‌ی p ساخته شده، تعداد ۲ (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.

چنان‌که می‌بینید:

ارزش گزاره‌ی مرکب $p \vee p$ با ارزش p یکسان است.

(یعنی: هم‌ارزی $p \vee p \equiv p$ برقرار است.)

p	p	p ∨ p
د	د	د
ن	ن	ن

مثال: جدول ارزش گزاره‌ی $p \vee \sim q$ و حالت نادرست بودن آن را تعیین کنید.

پاسخ

تعداد $۲^۲ = ۴$ حالت برای جدول در نظر گرفته، مانند محاسبات ریاضی، از ساده‌ترین گزاره‌ها شروع کرده و در پایان کل گزاره تشکیل می‌شود:

شروع: p **بعد:** q

بعد: $\sim q$ **در پایان:** $p \vee \sim q$

p	q	~ q	p ∨ ~ q
د	د	ن	د
د	ن	د	د
ن	د	ن	ن
ن	ن	د	د

نتیجه‌ی جدول:

گزاره‌ی $p \vee \sim q$ وقتی نادرست است که p نادرست و q درست باشد.

روش دیگری برای ترکیب گزاره‌ها به صورت زیر است.

ترکیب عطفی:

وقتی بین دو گزاره‌ی p و q رابط «**و**» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$p \wedge q$ نوشته شده و به صورت « p و q » خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را **«ترکیب عطفی»** و نماد $\wedge$ را **«عاطف»** گویند.

بعلاوه:

چنان‌که انتظار داریم و در جدول زیر هم دیده می‌شود، ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی p و q درست باشند؛ در غیر این صورت، دارای ارزش «ن» است.

p	q	p ∧ q
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

برای نمونه؛

جدول ارزش درستی گزاره‌ی $p \wedge \sim p$ به صورت روبه‌رو است:

p	~ p	p ∧ ~ p
د	ن	ن
ن	د	ن

توجه:

چنان‌که می‌بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: **تناقض**)

مثال: (از کتاب) مقادیر x و y را طوری تعیین کنید که تساوی $(2x-y)^2+(x-1)^2=0$ برقرار باشد.

پاسخ

چون $(2x-y)^2 \geq 0$ و $(x-1)^2 \geq 0$ است، باید:

$$(2x-y)^2=0 \ \wedge \ (x-1)^2=0$$

لازم است هر دو درست باشند:

$$\begin{cases} (x-1)^2=0 \ \rightarrow \ x-1=0 \ \Rightarrow \ x=1 \\ (2x-y)^2=0 \ \rightarrow \ 2x-y=0 \ \xrightarrow{x=1} \ 2-y=0 \ \Rightarrow \ y=2 \end{cases}$$

مثال: با تشکیل جدول، هم‌ارزی $\sim(p\vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ را نشان دهید.

پاسخ

در یک جدول، با ترتیب مناسب، ابتدا ارزش $\sim(p\vee q)$ و سپس ارزش $\sim p\wedge\sim q$ را مشخص می‌کنیم:

p	q	p ∨ q	~ (p ∨ q)	~ p	~ q	~ p ∧ ~ q
د	د	د	ن	ن	ن	ن
د	ن	د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	د	ن	ن
ن	ن	ن	د	د	د	د

چنان‌که می‌بینید:
ستون‌های مربوط به این دو گزاره یکسان بوده و در نتیجه هم‌ارزی برقرار است.

مطلب بعدی هنگام نقیض کردن گزاره‌های مرکب کاربرد فراوان دارد.

قوانین دمورگان:

چنان‌که در مثال قبل دیدیم، هم ارزی $\sim(p\vee q) \equiv \sim p\wedge\sim q$ برقرار است. به صورت مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\sim(p\wedge q) \equiv \sim p\vee\sim q$$

بنابراین:

طبق قوانین دمورگان، هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی؛

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و رابط‌های $\wedge$ و $\vee$ به هم تبدیل می‌شوند.

برای نمونه؛

نقیض گزاره‌های زیر را طبق نکته‌ی قبل می‌نویسیم:

الف) ۵ عددی زوج است و π عددی گنگ است.

۵ عددی فرد است یا π عددی گویا است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.

ماه به دور خورشید نمی‌گردد و زمستان هوا گرم نیست.

روش مهمی برای ترکیب گزاره‌ها که در بیان احکام ریاضی کاربرد زیادی دارد:

ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی p و q، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$p \Rightarrow q$ نوشته شده و به صورت «اگر p، آنگاه q» خوانده می‌شود.

در ترکیب شرطی $p \Rightarrow q$، به p **«مُقدَم»** (فرض) و به q **«پیرو»** (حکم) گفته می‌شود.

بعلاوه:

مطابق جدول، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که p درست، ولی q نادرست باشد. ارزش $p \Rightarrow q$ در سایر حالت‌ها درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

در نتیجه:

استنتاج $p \Rightarrow q$ هنگامی صحیح است که:

درست بودن p، حتماً درستی q را نتیجه دهد.

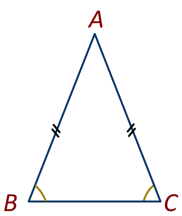
به همین دلیل:

قضایای ریاضی که استنتاج‌های درستی هستند را می‌توانیم به صورت شرطی بیان کنیم. (یعنی: با درستی فرض، حکم قطعاً درست خواهد بود.) نمونه‌هایی ببینید:

الف) اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، زوایای پای ساق‌ها برابرند.

به صورت نمادین:

$$\overset{\Delta}{ABC}\ :\quad AB = AC \ \Rightarrow\ \hat{B} = \hat{C}$$



ب) بر عهده‌ی دانش‌آموز:

قضیه‌ی فیثاغورس را مانند بالا به صورت زبانی و همچنین نمادین بنویسید.

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

اگر ۵ زوج باشد، آنگاه $\sqrt{۲} = -۱$ است.

پاسخ

درست است؛

چون گزاره شرطی و به صورت «ن $\Rightarrow$ ن» بوده و طبق جدول درست است.

مثال: با استفاده از جدول، نشان دهید گزاره‌ی $p \Rightarrow (p \vee q)$ همواره درست است.

پاسخ

کافی است جدول چهار حالتی مربوطه را تشکیل دهیم:

p	q	$p \vee q$	$p \Rightarrow (p \vee q)$
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	د
ن	ن	ن	د

چنان‌که می‌بینید؛
طبق جدول، گزاره شرطی داده شده همواره درست است.
در چنین حالتی می‌نویسیم:

$$p \Rightarrow (p \vee q) \equiv T$$

حالت ویژه‌ای از ترکیب شرطی:

قانون انتفای مقدم:

چنان‌که در جدول ارزش $p \Rightarrow q$ می‌بینید:
اگر p نادرست باشد، بدون توجه به ارزش q، ارزش گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ درست است.
این خاصیت را «**قانون انتفای مقدم**» گویند.

یعنی:
اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را بپذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است.
برای نمونه؛
استناج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر -۲ عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

اگر ۸ فرد باشد، آنگاه $\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\cdots}}} = ۱/۹۹۹\ldots$ است.

پاسخ

طبق انتفای مقدم درست است.

توجه کنید: (از بررسی درستی تساوی $\sqrt{۲+\sqrt{۲+\sqrt{۲+\cdots}}} = ۱/۹۹۹\ldots$ بی نیاز هستیم!)

توسط مورد بعدی، ترکیب شرطی به فصلی تبدیل می‌شود.

هم‌ارزی شرطی:

هم‌ارزی مهمی برای گزاره‌های شرطی با کاربرد فراوان به صورت زیر است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ را با جدول نشان دهید.

پاسخ

کافی است ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان داده و مقایسه کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim p \vee q$
د	د	د	ن	**د**
د	ن	ن	ن	**ن**
ن	د	د	د	**د**
ن	ن	د	د	**د**

می‌بینید:
ستون‌های مربوط به دو گزاره یکسان هستند.

---✧---

مثال: جاهای خالی را به صورت مناسب کامل کنید:

الف) «اگر ....، آنگاه $2^5 - 1$ عددی اول نیست.» گزاره‌ای نادرست است.

ب) نقیض گزاره‌ی «اگر a^2 مضرب ۵ باشد، آنگاه a مضرب ۵ است.» عبارت است از ....

پاسخ

الف) چون $2^5 - 1 = 31$ اول است، گزاره به صورت «$\Leftarrow$ ن ...» است. پس کافی است جای خالی را با یک گزاره درست کامل کنیم تا گزاره‌ی شرطی نادرست شود. یک جواب: « ۳ عددی فرد است».

ب) چون نقیض $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است، پس:

« a^2 مضرب ۵ است و a مضرب ۵ نیست».

---✧---

مثال: الف) توسط جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید:

نقیض گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ به صورت $p \wedge \sim q$ است؛ یعنی: $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$.

ب) هم‌ارزی قسمت قبل را بدون استفاده از جدول ثابت کنید.

پاسخ

الف) با نمایش ارزش هر دو گزاره در یک جدول، هم‌ارزی آن‌ها مشاهده می‌شود:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim(p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$
د	د	د	**ن**	ن	**ن**
د	ن	ن	**د**	د	**د**
ن	د	د	**ن**	ن	**ن**
ن	ن	د	**ن**	د	**ن**

ب) ابتدا هم‌ارزی شرطی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ و سپس استفاده از قوانین دمورگان:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv \sim (\sim p \vee q) \equiv \sim (\sim p) \wedge (\sim q) \equiv p \wedge \sim q$$

قبل از معرفی آخرین روش ترکیب گزاره‌ها، مورد بعد را ببینید.

مثال: با تشکیل جدول، ارزش گزاره‌ی مرکب $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ را تعیین کنید. چه هنگام این گزاره درست است؟ درستی این گزاره چه چیزی را نشان می‌دهد؟

پاسخ

در جدول، ابتدا ارزش $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ را مشخص کرده و سپس ترکیب عطفی آن دو را تشکیل می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن
ن	د	د	ن	ن
ن	ن	د	د	د

چنان که می‌بینید:

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ وقتی درست است که p و q ارزش یکسان داشته باشند. بعلاوه، درستی این گزاره نشان می‌دهد که: گزاره‌های p و q هر کدام دیگری را نتیجه می‌دهد.

با توجه به مثال قبل، روش دیگری برای ترکیب گزاره‌ها بیان می‌شود:

ترکیب دو شرطی:

گزاره‌ی دوشرطی را با $p \Leftrightarrow q$ نشان داده و هم‌ارز $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ بگیرید. بعلاوه:

$p \Leftrightarrow q$ را به صورت « p **اگر و تنها اگر** q » یا «**اگر** p **آنگاه** q **و برعکس**» بخوانید.

در واقع:

هر دوی p و q باید یکدیگر را نتیجه دهند تا ترکیب دوشرطی درست باشد.

طبق آن‌چه گفتیم:

ترکیب دو شرطی وقتی درست است که p و q ارزش یکسان داشته باشند. (هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.)

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال: ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

الف) ۷ مربع کامل است اگر و تنها اگر ۵ عدد اول باشد.

ب) $۱۰ > ۱۵ \Leftrightarrow -۱۵ > -۱۰$

پاسخ

الف) گزاره به صورت دو شرطی «ن $\Leftrightarrow$ د» بوده و ارزش آن نادرست است.

ب) گزاره به صورت دو شرطی «**ن** $\Leftrightarrow$ **ن**» و ارزش آن درست است.

تذکر مجدد:

طبق مفهوم و جدول ترکیب دو شرطی، درستی عبارت $p \Leftrightarrow q$ به این معنی است که:

p و q هر کدام درستی دیگری را نتیجه می‌دهد.

دقیق‌تر:

درستی $p \Leftrightarrow q$ یعنی: هر دوی گزاره‌های $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ درست هستند. (و برعکس)

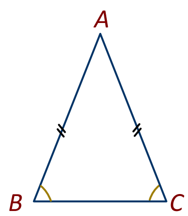
به همین دلیل:

قضایای ریاضی که عکسشان هم درست باشد، به صورت دو شرطی بیان می‌شوند. نمونه‌هایی ببینید:

الف) مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر زوایای پای ساق‌ها برابر باشند.

به صورت نمادین:

$$\overset{\Delta}{ABC}:\quad AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

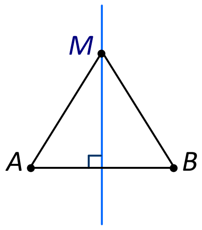


ب) طبق محتوای هندسه ۱:

نقطه‌ی M روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار دارد، اگر و فقط اگر فاصله‌ی M تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.

به صورت نمادین:

$MA = MB \Leftrightarrow$ M روی عمود منصف AB است.



مثال: با تشکیل جدول، نشان دهید نقیض ترکیب دو شرطی $p \Leftrightarrow q$ با $\sim p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز است. یعنی:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

پاسخ

تشکیل جدول و مشاهده‌ی هم‌ارزی به آسانی انجام می‌شود:

p	q	$p \Leftrightarrow q$	$\sim (p \Leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim p \Leftrightarrow q$
د	د	د	ن	ن	ن
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	ن	د	د	د
ن	ن	د	ن	د	ن

توجه:

در کل، هم‌ارزی‌های $\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv p \Leftrightarrow \sim q$ **صحیح است.**

مثال: فرض کنید گزاره‌ی $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (q \vee r)$ نادرست باشد.

الف) ارزش هر کدام از p، q و r را مشخص کنید.

ب) نشان دهید گزاره‌ی $\sim p \wedge r$ نادرست و گزاره‌ی $r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ درست است.

پاسخ

الف) باید گزاره شرطی به صورت «د $\Rightarrow$ ن» بوده و بنابراین $q \vee r$ نادرست است؛ یعنی: q و r هر دو نادرستند. از طرفی، گزاره‌ی $p \Leftrightarrow \sim q$ درست به صورت «د $\Leftrightarrow p$» است، در نتیجه p باید درست باشد.

ب) چون r نادرست است، گزاره $\sim p \wedge r$ نادرست و گزاره‌ی شرطی $r \Rightarrow (p \wedge \sim q)$ طبق قانون انتفای مقدم درست است.

پاسخ دهید (۲)

۱- جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.

الف) ترکیب شرطی زمانی نادرست است که ....

ب) ارزش گزاره «۲ عددی گویا نیست و π عددی گنگ است.» برابر ....

۲- جدول زیر را کامل کنید.

گزاره p	گزاره q	ارزش p	ارزش q	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هر دنباله یا حسابی است یا هندسی	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$				
....	$x = 1$ تابع نیست	ن			
$\sqrt[5]{-32} = -2$	....		ن		
....	....	ن	ن		
$\sqrt{x} - 1$ چندجمله ای است.	....			د	

۳- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) گزاره «$9 = 8 - (-1) \Rightarrow -3 < -1$» درست است.

ب) گزاره «اگر n^2 مضرب ۲ باشد، آنگاه n مضرب ۲ است.» نادرست است.

۴- ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف) $(\frac{۱}{۲} \neq ۰/۵) \vee (۱ \in \{۲,۳,۴\})$

ب) $(\cos ۰ = -۱) \Leftrightarrow (\tan \frac{\pi}{۶} = \sqrt{۳})$

۵- اگر p گزاره‌ای درست، q نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی: $[(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r] \vee q$

☐ همواره درست است. ☐ همواره نادرست است. ☐ هم‌ارز با r است. ☐ هم‌ارز با q است.

۶- معادله‌ی $(x+۲)^۲ + (۲y-۳x)^۲ = ۰$ را تبدیل به یک گزاره‌ی مرکب کرده و سپس آن را حل کنید.

منتخب کتاب:

۱- ارزش هر گزاره‌ی مرکب را تعیین کنید:

الف) $(\frac{۱}{۲} \neq \frac{۳}{۶}) \vee (۱ \in \{۲,۳,۴\})$

ب) $(۲ < ۳) \wedge (۴ + ۳ = ۱۰)$

پ) اگر $a \in \{b\}$ آنگاه $a = b$ و برعکس.

ت) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست.

ث) $۲ > ۳ \Leftrightarrow -۲ < -۳$

۲- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.

ب) $a \in \{b,c,d\}$

پ) ۲ عددی زوج است یا عدد π گویاست.

ت) اگر ۳ زوج باشد، آنگاه ۲ فرد است.

ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.

۳ قوانین هم‌ارزی

در این بخش، هم‌ارزی گزاره‌ها را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

دو حالت خاص:

برخی گزاره‌ها در تمام حالت منطقی درست هستند، مانند:

$$p \Rightarrow p \quad \text{و} \quad p \vee \sim p$$

چنین گزاره‌ای را هم‌ارز با $\mathbf{T}$ قرار می‌دهیم. پس داریم: $p \vee \sim p \equiv \mathbf{T}$

به صورت مشابه؛

اگر گزاره‌ای مانند $p \wedge \sim p$ در تمام حالت منطقی نادرست باشد، آن را هم‌ارز با $\mathbf{F}$ می‌نویسیم: $p \wedge \sim p \equiv \mathbf{F}$

بنابراین:

T معرف یک گزاره‌ی همیشه درست و F معرف گزاره‌ای همیشه نادرست است.

نمونه‌ی دیگر:

گزاره‌ی $p \Rightarrow (p \vee q)$ همیشه درست (یعنی: هم‌ارز با $\mathbf{T}$) است، زیرا اگر p درست باشد، $p \vee q$ نیز درست خواهد بود؛ بنابراین ارزش گزاره‌ی شرطی همواره درست است.

مثال: با تشکیل جدول، درستی هم‌ارزی $[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q \equiv T$ را نشان دهید.

پاسخ

ارزش گزاره‌های مرکب را با ترتیب $p \Rightarrow q$، سپس $q \vee p$، سپس ترکیب عطفی و در پایان ترکیب دو شرطی را مشخص می‌کنیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$q \vee p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)$	$[(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)] \Leftrightarrow q$
د	د	د	د	د	د
د	ن	ن	د	ن	د
ن	د	د	د	د	د
ن	ن	د	ن	ن	د

چنان که می‌بینید:
گزاره‌ی دو شرطی همواره درست بوده و هم‌ارز $\mathbf{T}$ است.

مثال: بدون تشکیل جدول، تعیین کنید هر یک از گزاره‌های مرکب زیر، با چه گزاره‌ی ساده‌ای هم‌ارز است و برای آن دلیل ذکر کنید.

الف) $p \vee \sim p$ ب) $p \wedge \sim p$ پ) $p \vee (p \wedge q)$ ت) $p \wedge (p \vee q)$

پاسخ

الف) چون در هر صورت یکی از p یا $\sim p$ درست است، $p \vee \sim p \equiv T$ خواهد بود. (با استدلال مشابه: $p \wedge \sim p \equiv F$)

پ) اگر p درست باشد، کل گزاره‌ی $p \vee (p \wedge q)$ نیز درست است. اگر p نادرست باشد، چون $p \wedge q$ نیز نادرست می‌شود، ارزش گزاره‌ی $p \vee (p \wedge q)$ نادرست خواهد شد. پس ارزش کل گزاره همواره با ارزش p یکسان است؛ یعنی: $p \vee (p \wedge q) \equiv p$.

با استدلال مشابه داریم:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

مثال: برای درستی هم‌ارزی زیر (بدون تشکیل جدول) دلیل بیاورید.

$$(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q) \equiv \mathbf{F}$$

پاسخ

چون $p \vee \sim p$ همواره درست و $q \wedge \sim q$ همواره نادرست است، بنابراین ترکیب شرطی به صورت $\mathbf{T} \Rightarrow \mathbf{F}$ تبدیل می‌شود و همواره نادرست است.

مثال: اگر ارزش گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p)$ درست باشد، نشان دهید ارزش گزاره‌ی $\sim p \vee q$ نادرست است.

پاسخ

چون $p \wedge \sim p$ نادرست است، باید $p \Rightarrow q$ نیز نادرست باشد؛ یعنی: p درست و q نادرست بوده است. واضح است که در چنین حالتی، $q \Rightarrow p$ درست خواهد بود.

توجه کنید:

ترکیب گزاره‌های با ارزش **T** و **F** با یک گزاره‌ی دلخواه p قابل ساده شدن است.

برای نمونه‌های زیر دلیل ذکر کنید.

$$p \vee T \equiv T \quad و \quad p \vee F \equiv p \quad و \quad p \wedge T \equiv p \quad و \quad p \wedge F \equiv F \quad و \quad p \Rightarrow T \equiv T \quad و \quad p \Rightarrow F \equiv p$$

در موارد مشابه، جای p دو حالت ممکن «د» و «ن» را قرار داده و ساده شده‌ی گزاره را تشخیص دهید.

مثال: با استفاده از خواص هم‌ارزی (بدون استفاده از جدول) نشان دهید: $(p \Leftrightarrow F) \equiv \sim p$.

پاسخ

جای ترکیب دو شرطی، تعریف اولیه‌ی آن را جایگزین کرده و توضیحات بالا را به‌کار می‌بریم:

$$(p \Leftrightarrow F) \equiv (p \Rightarrow F) \wedge \underbrace{(F \Rightarrow p)}_{T} \equiv (p \Rightarrow F) \equiv \sim p \vee F \equiv \sim p$$

هم‌ارزی دیگری برای گزاره‌های شرطی با کاربردی مفید وجود دارد.

قانون عکس نقیض:

منظور از «عکسِ نقیضِ» گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ این است که گزاره‌ها جابجا شده و هر دو نقیض شوند:

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

بعلاوه؛

هم‌ارزی مهم زیر به نام «**قانون عکس نقیض**» برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

برای نمونه:

هم‌ارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:

اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

دلیل هم‌ارزی فوق با رسم جدول دیده می‌شود:

p	q	p ⇒ q	~ p	~ q	~ q ⇒ ~ p
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

توجه کنید:

عکس گزاره‌ی شرطیِ $p \Rightarrow q$، به صورت $q \Rightarrow p$ است و بعلاوه؛

درست یا نادرست بودن $p \Rightarrow q$ و $q \Rightarrow p$ ربطی به هم ندارند.

مثال: عکس نقیض گزاره‌ی «اگر $x > 1$ باشد، آنگاه $x^2 \le 1$ است.» را بنویسید.

پاسخ

گزاره‌ی شرطی به صورت: «$x > 1 \Rightarrow x^2 \le 1$» است. طبق مفهوم مربوطه:

$$x^2 > 1 \Rightarrow x \le 1$$

کاربردی از هم‌ارزی $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$ را ببینید.

مثال: (از کتاب) ثابت کنید اگر a عدد صحیح و a^2 فرد باشد، آنگاه a فرد است.

پاسخ

گزاره را طبق هم‌ارزی بالا به صورت معادل می‌نویسیم:

(a^2 زوج است. $\Rightarrow$ a زوج است.) $\equiv$ (a فرد است. $\Rightarrow$ a^2 فرد است.)

پس کافی است فرض کنیم a زوج است و نشان دهیم a^2 نیز زوج است:

$$a=2k \;\rightarrow\; a^2=4k^2=2\times\underbrace{2k^2}_{m} \;\rightarrow\; a^2=2m$$ (a^2 زوج است.)

در ادامه، سه خاصیت هم‌ارزی مربوط به ترکیب فصلی و عطفی ببینید.

❖ **خواص جابجایی:**

$$p\vee q\equiv q\vee p \quad \text{و} \quad p\wedge q\equiv q\wedge p$$

❖ **خواص شرکت‌پذیری:**

$$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r \quad \text{و} \quad p\wedge(q\wedge r)\equiv(p\wedge q)\wedge r$$

در نتیجه:

وقتی همه ترکیب‌ها $\wedge$ یا $\vee$ باشد، می‌توانید پرانتزها را حذف کرده و حتی گزاره‌ها را جابجا کنید.

$$p\vee(q\vee r)\equiv(p\vee q)\vee r\equiv p\vee q\vee r$$

❖ **خواص توزیع پذیری:**

کاملاً شبیهِ توزیع‌پذیری ضرب اعداد نسبت به جمع: $a\times(b+c)=a\times b+a\times c$، هر دوی ترکیب‌های فصلی و عطفی نسبت به هم توزیع می‌شوند:

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r) \quad \text{و} \quad p\wedge(q\vee r)\equiv(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$$

دلیل هر سه مورد بالا با جدول قابل بیان است. یک مورد را می‌آوریم:

$$p\vee(q\wedge r)\equiv(p\vee q)\wedge(p\vee r)$$

p	q	r	$q\wedge r$	$p\vee(q\wedge r)$	$p\vee q$	$p\vee r$	$(p\vee q)\wedge(p\vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

تذکر:

چنان‌که تاکنون دیده‌ایم، می‌توان از قوانین گفته شده، برای تشخیص یا اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها به روش کوتاه‌تر (به جای رسم جدول) استفاده کرد. در ادامه چند نمونه‌ی دیگر ببینید.

مثال: نشان دهید گزاره‌ی $\sim(p\Rightarrow\sim q)$ با گزاره‌ی $p\wedge q$ هم‌ارز است.

پاسخ

هم‌ارزی شرطی با فصلی را به‌کار برده و سپس قانون دمورگان:

$$\sim(p\Rightarrow\sim q)\equiv\sim(\sim p\vee\sim q)\equiv\sim(\sim p)\wedge\sim(\sim q)\equiv p\wedge q$$

مثال: نشان دهید هم‌ارزی $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$ برقرار است.

پاسخ

با استفاده از توزیع‌پذیری و سایر خواص گفته شده:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_{\equiv T} \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

مثال: نقیض گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$ را به صورت ساده شده بنویسید.

پاسخ

نقیض را تشکیل داده و قوانین را بر حسب نیاز به‌کار می‌بریم:

$$\sim[(p \Rightarrow q) \Rightarrow q] \equiv \sim[\sim (p \Rightarrow q) \vee q] \equiv (p \Rightarrow q) \wedge \sim q \equiv (\sim p \vee q) \wedge \sim q$$
$$\equiv (\sim p \wedge \sim q) \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{F} \equiv \sim p \wedge \sim q$$

پاسخ دهید (۳)

۱- اگر p یک گزاره دلخواه و $\mathbf{F}$ یک گزاره‌ی همواره نادرست باشد، آنگاه: (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

$$p \vee \mathbf{F} \equiv \,.....$$

۲- عکس نقیض گزاره زیر را بنویسید و آن را ارزش گذاری کنید:

«اگر عدد ۳ − فرد باشد، آنگاه ۷ یک مقسوم علیه اول عدد ۲۱ است.»

۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$$\sim (p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

۴- طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید:

الف) $\sim (p \Rightarrow q) \equiv \,.........$

ب) $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \,.........$

پ) $p \wedge \sim [p \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \,.........$

۵- ارزش گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

۶- بدون استفاده از جدول هم ارزی زیر را ثابت کنید

$$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۷- نقیض گزاره‌ی $(p \vee q) \wedge \sim p$ را بنویسید.

منتخب کتاب:

۱- با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) $p \wedge T \equiv p$

ب) $p \Rightarrow p \equiv T$

پ) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$

ت) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$

ث) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$

۲- ثابت کنید هرگاه n عددی صحیح و n^2 مضرب ۳ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۳ است.

۴ سورها

در بیان احکام یا ادعاهای مختلف توسط گزاره نماها، گاهی آن ادعا در مورد تمام اعضاء مطرح می‌شود.

برای نمونه:

- همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین هم هستند.
- همه عددهایی که بر ۶ بخش‌پذیرند، بر ۲ و ۳ هم بخش‌پذیر هستند.

برای بیان عبارات بالا، از «سور» زیر استفاده می‌شود.

سور عمومی:

نماد این سور « $\forall$ » بوده و آن را «به ازای هر» یا «برای همه» می‌خوانیم. برای نمونه، عبارت

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ x^2 > 0$$

خوانده می‌شود: «به ازای هر x عضو $\mathbb{R}$ داریم: $x^2 > 0$» که البته گزاره‌ای نادرست است. (چرا؟!)

توجه کنید:

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور عمومی فقط وقتی درست است که:

گزاره‌نما، برای هر عضو از دامنه‌ی متغیر، به یک حکم صحیح تبدیل شود.

برای نمونه؛

درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) $\forall x \in P$; x عددی فرد است. (P مجموعه اعداد اول)

نادرست است؛ زیرا عدد ۲ عضو P بوده و عددی فرد نیست.

ب) $\forall x \in \mathbb{R}\ ;\ \tan x \cdot \cot x = 1$

نادرست است؛ زیرا برای عددهای به صورت: $x = \frac{k\pi}{2}$، تانژانت یا کتانژانت تعریف نشده بوده و تساوی معنی ندارد.

پ) $\forall x \in \mathbb{Z}\ ;\ x^2 + 1 \in \mathbb{N}$

درست است؛ زیرا $x^2 \geq 0$ بوده و در نتیجه $x^2 + 1 \geq 1$ همواره عددی طبیعی خواهد بود.

مثال: ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R}\ ;\quad \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

پاسخ

ساده شده‌ی کسر به درستی نوشته شده است: $\frac{x^2-1}{x-1} = \frac{(x-1)(x+1)}{x-1} = x+1$. با این حال، گزاره نادرست است؛ زیرا برای $x = 1$ کسر تعریف نشده، ولی سمت راست بامعنی است. پس برای $1 \in \mathbb{R}$، تساوی برقرار نیست.

گاهی یک حکم برای برخی اعضای دامنه مطرح می‌شود، مانند:

برخی عددهایی که بر ۳ بخش‌پذیرند، بر ۶ هم بخش‌پذیر هستند.

در چنین حالت‌هایی از سور دیگری استفاده می‌شود:

سور وجودی:

نماد این سور «$\exists$» بوده و «به ازای بعضی» یا «وجود دارد» خوانده می‌شود. نمونه:

$$\exists x \in \mathbb{N} \; ; \; x^2 = x$$

خوانده می‌شود: «به ازای بعضی مقادیر x عضو $\mathbb{N}$ داریم: $x^2 = x$» که ادعایی درست است. (چرا؟)

توجه کنید:

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور وجودی فقط وقتی درست است که:

گزاره‌نما، لااقل برای یک عضو از دامنه‌ی متغیر، به یک حکم صحیح تبدیل شود.

برای نمونه؛ درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف) $\exists x \in \mathbb{N} \; ; \; |x| - 1 < 0$

نادرست است، زیرا:

گزاره‌نما معادل $|x| < 1$ است و چون هیچ عدد طبیعی در آن صادق نیست، مجموعه جواب تهی بوده و گزاره‌ی سوری صحیح نیست.

ب) $\exists x \in \mathbb{Z} \; ; \; |x| - 1 < 0$

درست است، زیرا:

عدد $x = 0$ عضو $\mathbb{Z}$ در گزاره‌نمای $|x| < 1$ صدق می‌کند.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

گزاره‌ی زیر را با استفاده از نماد سورها ($\forall$ یا $\exists$) نوشته و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.

«هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است.»

پاسخ

واضح است که باید سور عمومی به‌کار رود:

$$\forall n \in \mathbb{N} \;\; ; \;\; n < n^2$$

این گزاره نادرست است، زیرا:

گزاره‌نما به ازای $n = 1$ صحیح نمی‌شود.

مثال: ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. ($x \in \mathbb{R}$)

الف) $\exists x \, ; \, x^2 + x + 1 < 0$

ب) $\exists x \, ; \, \dfrac{1}{x-1} = 0$

پ) $\forall x \in \{x \,|\, 0 < x \leq 1 \;,\; x \in \mathbb{R}\} \;\; ; \;\; x^2 \leq x$

پاسخ

الف) نادرست است؛ زیرا عبارت درجه دوم دارای $\Delta < 0$ و ضریب x^2 مثبت بوده و همواره مثبت است (مجموعه جواب تهی).

ب) نادرست است؛ باید صورت کسر صفر شود که هیچ‌گاه رخ نمی‌دهد.

پ) درست است؛ می‌دانیم برای $0 < x < 1$ همواره $x < x^2$ است و در حالت $x = 1$، تساوی $x = x^2$ برقرار است.

مثال: گزاره‌ی $\exists x \in \mathbb{N} ; \sim (x \in P \wedge x \in E)$ را به فارسی روان بیان کنید. (P مجموعه‌ی اعداد اول و E مجموعه‌ی اعداد زوج است.)

پاسخ

ابتدا توسط قانون دمورگان، گزاره نما را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\exists x \in \mathbb{N} ;\ \ (x \notin P \vee x \notin E)$$

چنین خوانده می‌شود:

برخی عددهای طبیعی، یا اول نیستند $(x \notin P)$ یا زوج نیستند $(x \notin E)$.

اکنون روش نقیض کردن گزاره‌های سوری را می‌آوریم. واضح است که، نقیض: «درست بودن همیشگی یک ادعا» این است که: «آن ادعا لااقل یک‌بار نادرست شود.» و به عبارت دیگر:

لااقل یک‌بار نقیض آن ادعا درست باشد.

بنابراین:

❖ **نقیض سور عمومی**

اگر $P(x)$ یک گزاره‌نما در مورد متغیر x باشد:

$$\sim (\forall x \ ; \ P(x)) \ \equiv \ \exists x \ ; \ \sim P(x)$$

به صورت مشابه:

❖ **نقیض سور وجودی**

خلاف ادعای: « $P(x)$ حداقل برای یک x درست است.» این است که $P(x)$ همیشه نادرست باشد؛ به عبارت دیگر، « $\sim P(x)$ همیشه درست است.» بنابراین:

$$\sim (\exists x \ ; \ P(x)) \ \equiv \ \forall x \ ; \ \sim P(x)$$

نمونه‌هایی ببینید:

- نقیض گزاره‌ی «تمام انسان‌ها فناپذیرند.» با نقیض کردن سور عمومی به صورت زیر بیان می‌شود:

  لااقل یک انسان هست که فناپذیر نباشد. (فناناپذیر باشد.)

- نقیض گزاره‌ی «حداقل یک عدد اولِ زوج وجود دارد.» با نقیض کردن سور وجودی به صورت زیر بیان می‌شود:

  هر عدد اول فرد است.

مثال: نقیض گزاره‌ی زیر را نوشته و ارزش گزاره‌ی اولیه و نقیض را مشخص کنید.

$$\forall y \in \mathbb{R}; \quad |y|+۱ \neq ۰$$

پاسخ

واضح است عبارت $|y|+۱$ همواره مثبت بوده و گزاره درست است. نقیض گزاره:

$$\exists y \in \mathbb{R}; \quad \sim(|y|+۱ \neq ۰) \equiv \exists y \in \mathbb{R}; \quad |y|+۱ = ۰$$

طبق انتظار، ارزش نقیض نادرست است؛ زیرا:

عدد حقیقی y یافت نمی‌شود که $|y|+۱=۰$ یا $|y|=-۱$ باشد.

مثال: ابتدا ارزش گزاره‌ی زیر را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\exists x \in \mathbb{N}; \quad \frac{۳+x}{۴} = ۰$$

پاسخ

باید $\frac{۳+x}{۴} = ۰$ که فقط $x=-۳$ جواب است. چون -۳ طبیعی نیست، گزاره نادرست است. نقیض گزاره:

$$\forall x \in \mathbb{N}; \quad \sim(\frac{۳+x}{۴} = ۰) \equiv \forall x \in \mathbb{N}; \quad \frac{۳+x}{۴} \neq ۰ \qquad \text{(گزاره درست)}$$

مثال: نقیض گزاره‌ی $(\exists x \in \mathbb{R}; \quad ۳x > ۲) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ > ۰)$ را بنویسید.

پاسخ

طبق قوانین گفته شده تا اینجا:

$$\begin{aligned}
\sim[(\exists x \in \mathbb{R}; \quad ۳x > ۲) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ > ۰)] &\equiv \sim(\exists x \in \mathbb{R}; \quad ۳x > ۲) \wedge \sim(\forall x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ > ۰)] \\
&\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; \quad ۳x \not> ۲) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ \not> ۰)] \\
&\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; \quad ۳x \leq ۲) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ \leq ۰)] \\
&\equiv (\forall x \in \mathbb{R}; \quad x \leq \frac{۲}{۳}) \wedge (\exists x \in \mathbb{R}; \quad x^۲ \leq ۰)]
\end{aligned}$$

پاسخ دهید (۱۴)

۱- گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای سوری نوشته و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) حاصل جمع هر عدد طبیعی با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

ب) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی x داریم: $x^{۳}=x$.

۲- جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

$$\sim(\exists x\in\mathbb{R}\,;\sim p(x))\equiv\ ....$$

۳- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کرده و نقیض هر یک را بنویسید:

الف) $\forall n\in\mathbb{N}\,;\ (۲^{n}+۱)\in P$

ب) $\exists x\in(-\infty,۰)\,;\ x-\frac{۱}{x}\leq -۲$

۴- اگر گزاره‌ی زیر صحیح باشد، برای A چه جواب‌هایی وجود دارد؟

$$\forall x\in A\,;\ x^{۲}\leq ۲x$$

۵- ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کرده و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\forall m\in P\,;\ m=۲k\ \ (k\in\mathbb{N})$$

۶- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (در قسمت «ب»، ارزش گزاره‌ی نقیض را مشخص کنید.)

الف) $\forall x\in\mathbb{R}\,;\ (x^{۲}\neq x)\vee(x^{۲}=۷)$

ب) $\exists x\in\mathbb{R}\,;\ (x<۰)\wedge(x^{۲}\leq ۱)$

۷- نقیض گزاره‌ی زیر را نوشته و ارزش گزاره‌ی اولیه و نقیض را مشخص کنید.

$$\exists y\in\mathbb{Q}'\,;\ \ y^{۲}\in\mathbb{Q}$$

۸- ارزش گزاره زیر را بیابید و سپس نقیض آن را بنویسید:

$$(\forall x\in(-\infty,۰)\,;\ x+\frac{۱}{x}\leq -۲)\ \Rightarrow\ (\exists x\in\mathbb{N}\,;\ x^{۲}+x=۰)$$

منتخب کتاب:

۱- گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها نوشته و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) همه‌ی اعداد اول فرد هستند.

پ) عدد صحیح مثبتی مانند x وجود دارد به طوری که $۱-۲x>۵$.

ت) حاصل‌جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوس آن، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۲- هرگاه $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid ۰<x\leq ۵\}$ دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

الف) $\exists x\in A\,;x+۳\leq ۴$

ب) $\forall x\in A\,;x+۱\geq ۶$

۳- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کرده و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

الف) $\exists x\in\mathbb{R}\,;\dfrac{x-۳}{۵}=۰$

ب) $\forall n\in\mathbb{N}\,;(۲^n+۱)\in P$

پ) $\forall x\in(-\infty,۰)\,;x+\dfrac{۱}{x}\leq -۲$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴