۱۲

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

ریاضیات گسسته

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

ساختار جدید

بهینه شده ویژه نهایی

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

ریاضیات گسسته

۱

نظریه اعداد (۱)

فهرست	صفحه

۱ انواعی از استدلال

یادآوری:

«گزاره» به یک حکم (یا ادعا) گفته می‌شود که یا دقیقاً درست است و یا دقیقاً نادرست.

توجه کنید:

اگر گزاره در تمام حالات ممکن درست باشد، گوییم آن گزاره درست است، ولی:

برای نادرست بودن آن، کافی است فقط در یک مورد نادرست شود.

بنابراین، در مواجهه با یک گزاره، در کل دو راه برای روشن کردن وضعیت آن وجود دارد.

رد کردن یا **اثبات درستی**

برای رد یک ادعای کلی، روش زیر را به‌کار می‌بریم.

مثال نقض:

برای نشان دادن این‌که یک حکم کلی نادرست است، کافی است مثالی آورده شود که کلیت آن حکم را رد کند. به چنین مثالی، **«مثال نقض»** گفته می‌شود.

توجه کنید:

الف) اگر بتوانیم برای یک حکم مثال نقض بیاوریم، در واقع اثبات کرده‌ایم که آن حکم نادرست است.

ب) اگر نتوانیم مثال نقض پیدا کنیم، در گام بعدی باید به دنبال اثبات قطعی آن حکم باشیم که در ادامه دو روش کلی مستقیم و غیر مستقیم برای آن خواهیم دید. به یاد داشته باشید:

هر تعداد مثال در تأیید یک حکم آورده شود (یعنی: استدلال استقرایی)، باعث اثبات آن حکم نخواهد شد.

زیرا:

ممکن است مثال نقض وجود داشته باشد، ولی از دید ما پنهان بوده و در آینده یا توسط شخص دیگری پیدا شود.

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

برای هر عدد طبیعی n بزرگ‌تر از ۱، عدد $۲^n - ۱$ اول است.

پاسخ

نادرست؛ عدد $n = ۴$ برای این حکم یک مثال نقض است:

$۲^۴ - ۱ = ۱۶ - ۱ = ۱۵ = ۳ \times ۵$ اول نیست.

توجه:

مثالی که برای نقض یک حکم کلی آورده می‌شود، باید دارای دو شرط زیر باشد:

- فرضِ عبارت داده شده را برقرار سازد، ولی:
- حکمِ آن عبارت نادرست شود.

مثال: گزاره‌ی درست را اثبات کرده و برای گزاره‌ی نادرست مثال نقض بیاورید.

الف) مجموع دو عدد گنگ، عددی گنگ است.

ب) هیچ دو عدد صحیح مانند x و y وجود ندارد که تساوی $x^۲+y^۲=(x+y)^۲$ برقرار باشد. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰)

پاسخ

الف) نادرست است و مثال نقض دارد. عددهای $a=\sqrt{۲}$ و $b=-\sqrt{۲}$ هر دو گنگ هستند، ولی جمعشان گویا است:

$$a+b=\sqrt{۲}-\sqrt{۲}=۰\in\mathbb{Q}$$

ب) نادرست است و مثال نقض دارد. عددهای $x=۱$ و $y=۰$ وجود دارند:

$$x^۲+y^۲=۱^۲+۰^۲=۱+۰=۱ \quad \text{و} \quad (x+y)^۲=(۱+۰)^۲=۱^۲=۱$$

مثال: حکم «حاصل جمع سه عدد گنگ، عددی گنگ است.» را با مثال نقض رد کنید.

پاسخ

باید سه عدد گنگ ارائه دهیم که جمعشان گنگ نشود (گویا باشد). عددهای گنگ $\sqrt{۲}-۱$، $۲+\sqrt{۲}$ و $۳-۲\sqrt{۲}$ این شرایط را دارند:

$$۳-۲\sqrt{۲}+\sqrt{۲}+۲+\sqrt{۲}-۱=۴ \quad \text{گنگ نیست.}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

حاصل‌ضرب هر عدد گویا در یک عدد گنگ، عددی گنگ است. (درست ☐ - نادرست ☐)

جواب: نادرست است؛ مثال نقض:

گنگ: $\sqrt{۲}$ گویا: ۰ (حاصل‌ضرب: $۰\times\sqrt{۲}=۰$ گویا است!)

مثال: نشان دهید گزاره‌ی زیر نادرست است:

$$\forall x\in\mathbb{N};\sim(x\in P\wedge x\in E)$$

(P مجموعه‌ی اعداد اول و E مجموعه‌ی اعداد طبیعی زوج.)

پاسخ

ابتدا توسط قانون دمورگان، نقیض را اثر می‌دهیم:

$$\forall x\in\mathbb{N};\sim(x\in P)\vee\sim(x\in E)\equiv\forall x\in\mathbb{N};(x\notin P)\vee(x\notin E)$$

گزاره‌نمای سمت راست توسط $x=۲$ نقض می‌شود. چون $۲\notin P$ و $۲\notin E$ هر دو نادرست هستند، ترکیب فصلی هم نادرست خواهد شد.

چنان‌که گفتیم، ممکن است نتوانیم هیچ مثال نقضی پیدا کنیم و تمام مثال‌ها حکم را تایید کنند.

در این صورت، توجه کنید:

اولاً: درستی قطعی آن حکم را نمی‌توان پذیرفت، چون امکان دارد مثال بعدی، یک مثال نقض باشد.

ثانیاً: وقتی چندین مثال یک حکم را تایید می‌کنند، احتمال درست بودن حکم تقویت می‌شود.

در ریاضیات، در چنین حالتی:

حکم را به عنوان یک **«حدس»** یا **«فرضیه»** می‌پذیریم.

برای این‌که فرضیه یا حدس تایید قطعی شود، نیاز به اثبات دارد که توسط دو مؤلفه‌ی زیر انجام می‌شود.

❖ **حقایق پذیرفته شده**

اصول و احکامی که قبلاً درستی آن‌ها پذیرفته یا اثبات شده است.

❖ **روش‌های درست استنتاج**

معمولاً حقایق پذیرفته شده‌ی قبلی با روش‌های درستِ استدلال، مفروضات مسأله را به‌کار می‌برند تا یک حکم جدید اثبات شود.

حقایق پذیرفته شده:

برخی حقایق پذیرفته شده که در اثبات‌ها فراوان به‌کار می‌روند را ببینید:

- هر عدد زوج به صورت $۲k$ و هر عدد فرد به صورت $۲k-۱$ است.
- هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت که m و n دو عدد صحیح بوده و مخرج غیر صفر است.

بعلاوه:

هر عددی که نتوان آن را به صورت کسر گویا نوشت، گنگ است.

برای نمونه؛

عددهای π، $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ همگی گنگ هستند.

- عددهای طبیعی یا صحیح متوالی به صورت زیر هستند:

$$k-۱, k, k+۱, k+۲, k+۳, \ldots$$

- عددهای متوالی زوج به صورت:

$$۲k-۲, ۲k, ۲k+۲, ۲k+۴, \ldots$$

و عددهای متوالی فرد به صورت زیر هستند:

$$۲k-۱, ۲k+۱, ۲k+۳, ۲k+۵, \ldots$$

روش‌های اثبات:

می‌توان روش‌های اثبات احکام ریاضی را در دو نوع کلی طبقه بندی کرد:

اثبات مستقیم و **اثبات غیرمستقیم**

❖ **اثبات مستقیم**

در روش‌هایی که در این گروه جای می‌گیرند، فرض مسأله و حقایق قبلی به طور مناسب به‌کار رفته، حکم تایید می‌شود و اثبات صورت می‌پذیرد.

❖ **اثبات غیر مستقیم**

در این گروه از روش‌های اثبات، به نوعی حکم مسأله و حقایق قبلی را مورد استفاده قرار داده و درست بودن حکم را نتیجه می‌گیریم.

مثال: چند نمونه اثبات به روش مستقیم ببینید:

- حاصل جمع یا تفریق دو عدد زوج یا دو عدد فرد، همواره زوج است. دلیل:

$$2k+2k'=2(\underbrace{k+k'}_{=k''})=2k''$$

$$2k-1+2k'-1=2(\underbrace{k+k'-1}_{=k''})=2k''$$

اما اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، حاصل فرد است. دلیل:

$$2k+2k'-1=2(\underbrace{k+k'}_{=k''})-1=2k''-1$$

- حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد بوده و در غیر این‌صورت حاصل‌ضرب زوج است:

$$(2k-1)(2k'-1)=4kk'-2k-2k'+1=2(\underbrace{2kk'-k-k'}_{=k''})+1=2k''+1$$ **حاصل فرد است.**

$$(2k-1)\times 2k'=4kk'-2k'=2(\underbrace{2kk'-k'}_{=k''})=2k''$$ **حاصل زوج است.**

- حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد گویا همیشه عددی گویا است. (در تقسیم باید مخرج غیرصفر باشد.)

$$\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}=\frac{mq\pm np}{nq} \quad \text{و} \quad \frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq} \quad \text{و} \quad \frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\times\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$$

مثال: نشان دهید مربع هر عدد زوج، زوج و مربع هر عدد فرد هم فرد است.

پاسخ

اگر n عددی زوج باشد:

$$n=2k \rightarrow n^2=4k^2=2\times\underbrace{2k^2}_{=k'}=2k' \Rightarrow n^2=2k'$$ **زوج است.**

به صورت مشابه، برای n فرد:

$$n=2k+1 \rightarrow n^2=4k^2+4k+1=2\times(\underbrace{2k^2+2k}_{=k'})+1=2k'+1 \Rightarrow n^2=2k'+1$$ **فرد است.**

مثال: درستی یا نادرستی گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

مجموع هر دو عدد فرد، عددی زوج است.

پاسخ

درست است؛ اثبات را در بالا آوردیم.

---✣---

بررسی تمام حالات:

گاهی استفاده از تکنیک زیر، در اثبات مستقیم احکام مورد نیاز است:

تفکیک فرض به تمام حالت‌های ممکن، و بررسی درستی حکم در هر حالت.

به هم‌ارزی زیر بین گزاره‌ها توجه کنید:

$$\begin{aligned}(P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_k) \Rightarrow q &\Leftrightarrow \sim(P_1 \vee P_2 \vee \cdots \vee P_k) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\sim P_1 \wedge \sim P_2 \wedge \cdots \wedge \sim P_k) \vee q \\ &\Leftrightarrow (\sim P_1 \vee q) \wedge (\sim P_2 \vee q) \wedge \cdots \wedge (\sim P_k \vee q) \\ &\Leftrightarrow (P_1 \Rightarrow q) \wedge (P_2 \Rightarrow q) \wedge \cdots \wedge (P_k \Rightarrow q)\end{aligned}$$

یعنی:

اگر فرض در کل به حالت‌های P_1، P_2، ... و P_k تفکیک شده و هر کدام از آن‌ها درستی q را نشان دهند، درستی q در کل اثبات می‌گردد.

مثال: نشان دهید حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، زوج است.

پاسخ

دو عدد را به صورت n و $n+1$ در نظر بگیرید. وضعیت n به دو حالت تفکیک می‌شود:

- n زوج باشد. در این صورت:

$$n=2k: \quad n\times(n+1)=2k(2k+1)=2\times\underbrace{k(2k+1)}_{=k'}=2k' \;\Rightarrow\; n\times(n+1)=2k'$$ **درستی حکم تایید شد.**

- n فرد باشد. در این صورت:

$$n=2k+1: \quad n\times(n+1)=(2k+1)(2k+2)=\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{=k'}\times 2=2k' \;\Rightarrow\; n\times(n+1)=2k'$$

در این حالت هم درستی حکم تایید شد.

پس حکم در کل درست است.

---✣---

مثال: نشان دهید برای هر عدد طبیعی n، عدد n^2-5n+7 فرد است.

پاسخ

مشابه نمونه‌ی قبل، دو حالت وجود دارد:

- n زوج باشد. در این صورت:

$$n=2k: \quad n^2-5n+7=4k^2-5(2k)+7=4k^2-10k+\underbrace{7}_{=6+1}=2\times\underbrace{(2k^2-5k+3)}_{=k'}+1=2k'+1$$

- n فرد باشد. در این صورت:

$$\begin{aligned}n=2k+1: \quad n^2-5n+7&=(2k+1)^2-5(2k+1)+7=4k^2+4k+1-10k-5+7\\&=4k^2-6k+\underbrace{3}_{=2+1}=2\times\underbrace{(2k^2-3k+1)}_{=k'}+1=2k'+1\end{aligned}$$

در هر دو حالت، عدد مورد نظر فرد شد، پس درستی حکم تایید می‌شود.

مثال: نشان دهید نتیجه گیری زیر برای اعداد درست است:

$$ab = 0 \Rightarrow a = 0 \vee b = 0$$

پاسخ

طبق روش بالا عمل می‌کنیم:

- اگر $a = 0$ باشد، نتیجه‌گیری برقرار شده است.
- اگر $a \neq 0$ باشد، در این صورت $\frac{1}{a}$ وجود دارد و طبق فرض:

$$ab = 0 \Rightarrow \frac{1}{a} \times ab = \frac{1}{a} \times 0 \Rightarrow 1 \times b = 0 \Rightarrow b = 0$$

پس نتیجه‌گیری همواره درست است.

در ادامه، دو روش در اثبات غیر مستقیم و نمونه‌هایی از هر کدام ببینید:

برهان خُلف:

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی فرض می‌کنیم حکم نادرست باشد.
- با توجه به فرضِ مرحله‌ی قبل و بیان استدلالی مناسب، «حقایق شناخته شده» یا «فرض» آن قضیه یا مسأله را نقض می‌کنیم.
- نتیجه می‌گیریم حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: نشان دهید اگر n^2 فرد باشد، آنگاه n هم فرد است.

پاسخ

برهان خلف:

فرض کنید n فرد نباشد.

پس n زوج است و چنان که قبلاً دیدیم، باید n^2 هم زوج باشد که با فرض تناقض دارد.

پس حکم نمی‌تواند نادرست باشد و لذا صحیح خواهد بود.

توجه کنید:

حکم: «**اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است.**» نیز به روش مشابه اثبات می‌شود.

مثال: اگر a و b دو عدد صحیح بوده و ab فرد باشد، به روش برهان خلف نشان دهید: $a^2 + b^2$ عددی زوج است.

پاسخ

برهان خلف:

فرض کنید a^2+b^2 عددی فرد باشد.

در این صورت باید یکی از a^2 و b^2 فرد و دیگری زوج باشد (مثلاً: a^2 فرد و b^2 زوج). بنابراین a فرد و b زوج بوده و ضربشان ab زوج خواهد شد که با فرض تناقض دارد.

مثال: نشان دهید حاصل جمع یک عدد گویا و یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

پاسخ

برهان خلف:

فرض کنید a گویا و b گنگ بوده، ولی $a+b$ گویا باشد.

در این صورت می‌بینید:

$$(a+b)-a=b$$

یعنی b برابر تفریق دو عدد گویا شده و در نتیجه باید گویا شود که غیرممکن است.

مثال: اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، نشان دهید عدد $\alpha+2\beta$ گنگ است.

پاسخ

برهان خلف:

اگر $\alpha+2\beta$ گویا باشد، چون تفریق دو عدد گویا، گویا است:

$$\alpha+2\beta-(\alpha+\beta)=\beta \quad \text{گویا}$$

گویا بودن β با فرض تناقض دارد.

مثال: در مورد گویا یا گنگ بودنِ «حاصل‌ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ» چه می‌توان گفت؟ ادعای خود را ثابت کنید.

پاسخ

حکم کلی وجود ندارد؛ زیرا دو حالت گوناگون می‌تواند رخ دهد:

۱) اگر عدد گویا را صفر بگیریم، حاصل‌ضرب آن در هر عدد گنگ، برابر صفر و در نتیجه گویا خواهد شد.

۲) اگر α عدد گویای غیر صفر و β گنگ باشد، ادعا می‌کنیم که ضرب آن‌ها $\alpha\beta$ گنگ است.

اثبات (برهان خلف)**:**

فرض کنید $\alpha\beta$ گویا باشد. در این صورت:

$$\beta=\frac{\alpha\beta}{\alpha}$$

یعنی، β حاصل تقسیم دو عدد گویا بوده و باید گویا باشد که با فرض تناقض دارد.

مثال: (از متن کتاب) a_1، a_2 و a_3 عددهایی صحیح هستند. b_1، b_2 و b_3 هم همان اعداد ولی با ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند. ثابت کنید $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ عددی زوج است.

پاسخ

برهان خلف:

فرض کنید $(a_۳-b_۳)(a_۲-b_۲)(a_۱-b_۱)$ فرد باشد. به اجبار باید هر سه عدد $(a_۱-b_۱)$ و $(a_۲-b_۲)$ و $(a_۳-b_۳)$ فرد باشند. پس جمع این سه عدد فرد هم باید به اجبار فرد شود:

$$(a_۱-b_۱)+(a_۲-b_۲)+(a_۳-b_۳)=(a_۱+a_۲+a_۳)-(b_۱+b_۲+b_۳)=۰ \qquad \text{(تناقض)}$$

بنابراین حکم صحیح بوده است.

روش دوم در اثبات غیر مستقیم:

اثبات بازگشتی:

در اثبات به‌طریق بازگشتی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- درستی حکم را موقتاً می‌پذیریم.
- با شروع از حکم، در چند مرحله به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض داده شده می‌رسیم.
- اکنون اگر تمام مراحل را بتوان از آخر به اول نتیجه گرفت، یعنی استنتاج‌های انجام شده برگشت‌پذیر باشند، درستی حکم تأیید می‌شود.

توجه کنید:

الف) برگشت‌پذیری استنتاج $p \Rightarrow q$، یعنی:

استنتاج $q \Rightarrow p$ نیز درست باشد.

در این‌صورت؛ p و q حتماً ارزش یکسان دارند؛ و می‌نویسیم: $p \Leftrightarrow q$.

بویژه:

«درستی هر کدام، درستی دیگری را نتیجه می‌دهد؛ به بیان دیگر هم‌ارز هستند.»

ب) یک استنتاجِ درست، ممکن است برگشت‌پذیر باشد یا نباشد؛ نمونه‌هایی ببینید:

- استنتاج « $x=۲ \Rightarrow x^۲=۴$ » برگشت‌پذیر نیست؛ زیرا نتیجه‌گیری « $x^۲=۴ \Rightarrow x=۲$ » نادرست می‌باشد.

  در واقع:

  درستی $x^۲=۴$، درستی $x=۲$ را نتیجه نمی‌دهد. (می‌تواند $x=-۲$ باشد.)
- استنتاج « $x=۲ \Rightarrow ۲x=۴$ » برگشت‌پذیر است؛ زیرا « $۲x=۴ \Rightarrow x=۲$ » نیز درست می‌باشد.

  پس می‌توانیم بنویسیم:

  $$x=۲ \Leftrightarrow ۲x=۴$$
- استنتاج « $x<y+۲ \Rightarrow x-y<۲$ » نیز برگشت‌پذیر می‌باشد: زیرا « $x-y<۲ \Rightarrow x<y+۲$ » درست است.

مثال: درستی یا نادرستی هم‌ارزی‌های زیر را بررسی کنید.

الف) n فرد است. $\Leftrightarrow$ $n^۲$ فرد است.

ب) m و n زوج هستند. $\Leftrightarrow$ mn زوج است.

پ) $x<۰ \Leftrightarrow x^۳<۰$

پاسخ

الف) درست است؛

چون طبق اطلاعاتی که تا این‌جا داریم، گزاره‌های دو طرف یکدیگر را نتیجه می‌دهند.

ب) نادرست است؛

اگر mn زوج باشد، ممکن است فقط یکی از m و n زوج بوده باشد. (یعنی استنتاج چپ به راست: $\Rightarrow$ نادرست است.)

پ) درست است؛

چون منفی بودن هر کدام از x و x^3، منفی بودن دیگری را نتیجه می‌دهد.

تذکر مجدد:

در کاربرد روش بازگشتی، باید مانند برخی مواردی که آورده شد، تمام نتیجه گیری‌ها برگشت‌پذیر باشند.

مثال: نامساوی $a+\frac{1}{a}\geq ۲$ را برای $a>۰$ نشان دهید.

پاسخ

کافی است دو طرف حکم $a+\frac{1}{a}\geq ۲$ را در $a>۰$ ضرب کنیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq ۲ \overset{\times a}{\Rightarrow} a^۲+۱\geq ۲a \Rightarrow a^۲+۱-۲a\geq ۰ \Rightarrow (a-۱)\geq ۰$$

عبارت $(a-۱)\geq ۰$ همواره درست است و بعلاوه تمام مراحل بالا برگشت‌پذیر هستند.

توجه:

از این پس، با اطمینان از بازگشت‌پذیری هر استنتاج، به جای $\Rightarrow$، نماد $\Leftrightarrow$ را به‌کار می‌بریم.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

به روش بازگشتی ثابت کنید: حاصل‌ضرب هر دو عدد حقیقی، کوچک‌تر یا مساوی نصف مجموع مربعات آن‌ها است.

پاسخ

باید ثابت کنیم: $xy\leq \frac{x^۲+y^۲}{۲}$.

$$xy\leq \frac{x^۲+y^۲}{۲} \overset{\times ۲}{\Leftrightarrow} ۲xy\leq x^۲+y^۲ \Leftrightarrow ۰\leq x^۲+y^۲-۲xy \Leftrightarrow ۰\leq (x+y)^۲$$

چون نامساوی آخر همیشه صحیح است.

مثال: ثابت کنید: میانگین حسابی دو عدد نامنفی از میانگین هندسی آن‌ها کمتر نیست.

پاسخ

دو عدد مثبت را x و y گرفته و باید نشان دهیم: $\frac{x+y}{۲}\geq \sqrt{xy}$. طبق روش بازگشتی:

$$\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy} \overset{\times 2}{\Leftrightarrow} x+y \geq 2\sqrt{xy} \Leftrightarrow (x+y)^2 \geq (2\sqrt{xy})^2$$
$$\Leftrightarrow x^2+2xy+y^2 \geq 4xy \Leftrightarrow x^2-2xy+y^2 \geq 0$$
$$\Leftrightarrow (x-y)^2 \geq 0$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

نامساوی زیر را به روش بازگشتی (گزاره‌های هم‌ارز)، برای هر دو عدد حقیقی a و b نشان دهید:

$$5a^2+b^2 \geq 4ab$$

پاسخ

مشابه موارد قبل:

$$5a^2+b^2 \geq 4ab \Leftrightarrow$$
$$a^2+4a^2+b^2-4ab \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$a^2+(2a-b)^2 \geq 0$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

نامساوی زیر را توسط اثبات بازگشتی برای اعداد حقیقی x و y نشان دهید:

$$x^2+y^2 \geq (x-1)(y+1)$$

پاسخ

ضرب سمت راست را انجام داده و دو طرف نامساوی را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$x^2+y^2 \geq (x-1)(y+1) \Leftrightarrow$$
$$x^2+y^2 \geq xy+x-y-1 \Leftrightarrow$$
$$2x^2+2y^2+2 \geq 2xy+2x+2y \Leftrightarrow$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2x+1+y^2-2y+1 \geq 0 \Leftrightarrow$$
$$(x-y)^2+(x-1)^2+(y-1)^2 \geq 0$$

مثال: نامساوی $x^2+y^2+z^2 \geq xy+xz+yz$ را برای اعداد حقیقی x، y و z نشان دهید.

پاسخ

طبق روش بازگشتی؛ مشابه مثال قبل:

$$x^2+y^2+z^2 \geq xy+xy+yz \Leftrightarrow 2x^2+2y^2+2z^2 \geq 2xy+2xy+2yz \Leftrightarrow$$
$$x^2-2xy+y^2+x^2-2xz+z^2+y^2-2yz+z^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x-y)^2+(x-z)^2+(y-z)^2 \geq 0$$

پاسخ دهید (۱)

۱- تساوی یا ادعاهای زیر را با استفاده از مثال نقض رد کنید.

الف) $\sqrt{x+y}=\sqrt{x}+\sqrt{y}$

ب) $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$ (تساوی تحت چه شرایطی همواره صحیح است؟)

پ) $[x+y]=[x]+[y]$. ($[\ ]$ به معنای جزء صحیح است.)

ت) از تساوی $A\cup B=A\cup C$ بین مجموعه‌ها نتیجه می‌شود که $B=C$ است.

۲- مجموعه‌ی $S=\{1,2,\dots,6\}$ و زیرمجموعه‌ی $A=\{3,4\}$ از آن را در نظر بگیرید. اگر برای $n\in S$، حاصل $\frac{n^2(n+1)^2}{4}$ عددی زوج باشد، ثابت کنید $n\in A$ است.

۳- با روش برهان خلف و استفاده از تکنیک بررسی تمام حالات، حکم زیر را ثابت کنید:

اگر n^2 مضرب ۵ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۵ است.

آیا ادعای زیر نیز صحیح است؟

اگر n^2 مضرب ۴ باشد، آنگاه n نیز مضرب ۴ است.

۴- اگر a و b دو عدد صحیح بوده و ab فرد باشد، نشان دهید: a^2+b^2 عددی زوج است.

۵- نشان دهید حکم زیر نادرست است:

حاصل‌ضرب یک عدد گویا در یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

۶- ادعای زیر را ثابت کنید:

حاصل‌ضرب یک عدد گویای غیر صفر در یک عدد گنگ، همواره گنگ است.

۷- درستی ادعاهای زیر را با استفاده از برهان خلف ثابت کنید.

الف) اگر x یک عدد گنگ باشد، آنگاه $\frac{1}{x}$ نیز گنگ است.

ب) اگر تابع f در $x=a$ پیوسته و تابع g در $x=a$ ناپیوسته باشد، آنگاه تابع $f+g$ در $x=a$ ناپیوسته است.

۸- می‌دانیم $\sqrt{2}$ عددی گنگ است. نشان دهید:

عددهای $\sqrt{2}+1$ و $\sqrt{2}-\sqrt{3}$ گنگ هستند.

۹- اگر α و β دو عدد گنگ و $\alpha+\beta$ گویا باشد، نشان دهید $\alpha-\beta$ گنگ است.

۱۰- به روش بازگشتی ثابت کنید.

الف) $2(a^2+b^2)\geq(a+b)^2$ (a و b دو عدد حقیقی)

ب) $(\frac{1}{x}+\frac{1}{y})(x+y)\geq ۴$ (x و y دو عدد مثبت)

۱۱- اگر $a,b\in\mathbb{R}$ باشند، کدام‌یک از ترکیب‌های دو شرطی زیر درست است؟

الف) $a<b \Leftrightarrow a^{۲}<b^{۲}$ ب) $a<b \Leftrightarrow a^{۳}<b^{۳}$

منتخب کتاب:

۱- آیا اعدادی صحیح مانند a و b وجود دارند که: $a^{۲}+b^{۲}=(a+b)^{۲}$

۲- آیا مقادیر حقیقی و ناصفر a و b چنان وجود دارند که:

$$(a+b\neq ۰) \qquad \frac{۱}{a+b}=\frac{۱}{a}+\frac{۱}{b}$$

۳- گزاره‌های زیر را اثبات یا با ارائه مثال نقض رد کنید.

الف) مربع و مکعب هر عدد فرد، عددی فرد است.

ب) میانگین پنج عدد طبیعی متوالی، عدد وسطی آن‌ها است.

۲ بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$

به بیان دقیق مفهوم «بخش‌پذیری» در اعداد صحیح توجه کنید.

بخش‌پذیری:

فرض کنید a و $b \neq 0$ عددهایی صحیح باشند.

عدد a را بر b «**بخش‌پذیر**» گوییم، هرگاه عدد صحیح k یافت شود که $a = bk$. در این‌صورت می‌نویسیم: $b \mid a$.

بنابراین:

$$b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad a = bk\,, \qquad k \in \mathbb{Z}$$

برای نمونه؛

داریم: $4 \mid -12$، زیرا عدد -12 را می‌توان به صورت $4\underbrace{(-3)}_{k}$ نوشت.

اگر چنین عدد k وجود نداشته باشد، می‌نویسیم: $b \nmid a$. برای نمونه؛

$4 \nmid 10$، زیرا ضرب عدد ۴ در هیچ عدد صحیحی برابر ۱۰ نخواهد شد: $10 \neq 4k$.

بعلاوه:

عبارت $b \mid a$ به صورت زیر خوانده می‌شود:

«b عاد می‌کند a را» یا «b عدد a را می‌شمارد.»

(توجه کنید: b یک شمارنده یا مقسوم‌علیهِ صحیح a است.)

خواص بدیهی:

- تمام اعداد بر ۱ و -1 بخش‌پذیر هستند؛ یعنی همواره: $\pm 1 \mid a$.

  دلیل:

$$a = 1 \times a \;\rightarrow\; 1 \mid a \qquad \text{و} \qquad a = -1 \times (-a) \;\rightarrow\; -1 \mid a$$

- تمام اعداد صحیح، عدد صفر را عاد می‌کنند، زیرا: $a \times 0 = 0$. به عبارت دیگر:

  صفر تنها عددی است که بر تمام اعداد بخش‌پذیر است، یعنی همواره: $a \mid 0$.

- هیچ عددی بر صفر بخش‌پذیر نیست. ولی چون تساوی $0 \times k = 0$ برای هر عدد صحیح k برقرار است، خواهیم داشت: $0 \mid 0$. بنابراین:

$$0 \mid a \;\Rightarrow\; a = 0$$

  یعنی:

  عدد صفر فقط خودش را عاد می‌کند.

- هر عددی بر خودش بخش‌پذیر است؛ زیرا:

$$a = a \times 1 \;\Rightarrow\; a \mid a$$

به صورت مشابه، موارد: $a|-a$ و $-a|a$ نیز درست هستند. یعنی: $\pm a|\pm a$

مثال: (خواص ساده)

الف) نشان می‌دهیم برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a|a^n$$

در حالت $n=۱$، رابطه‌ی بدیهی $a|a$ را داریم که درست است. اگر $n>۱$ باشد، در این صورت:

$$a^n=a\times\underbrace{a^{n-۱}}_{=k}\ \rightarrow\ a^n=ak\ \Rightarrow\ a|a^n$$

ب) کلی‌تر از قسمت قبل، اگر $۰\le m\le n$ باشد، داریم: $a^m|a^n$. زیرا:

$$a^n=a^m\times\underbrace{a^{n-m}}_{=k}\ \rightarrow\ a^n=a^mk\ \Rightarrow\ a^m|a^n$$

پ) نشان می‌دهیم اگر $a|b$، آنگاه برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a^n|b^n$$

حالت $n=۱$ بدیهی است. اگر $n>۱$ باشد، چون $b=ak$ است، در این صورت:

$$b^n=(ak)^n=a^n\times\underbrace{k^n}_{=k'}\ \rightarrow\ b^n=a^nk'\ \Rightarrow\ a^n|b^n$$

یادآوری یک مفهوم بسیار پرکاربرد در مبحث نظریه اعداد:

عدد اول:

عدد طبیعی $p>۱$ را «**اول**» گوییم، هرگاه غیر از ۱ و خودش هیچ مقسوم‌علیه مثبتی نداشته باشد.

بنابراین، اگر p عددی اول باشد:

$$\boxed{a|p\ \Rightarrow\ a=\pm۱\,,\ a=\pm p}$$

سایر اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک را «**مرکب**» گوییم. بنابراین:

عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

در ادامه ویژگی‌های اصلی شمارش، دلیل هر کدام و برخی کاربردهای آن‌ها را ببینید.

ویژگی ۱ :

اگر a عدد b را عاد کند، a هر مضربی از b را نیز عاد می‌کند؛ یعنی برای هر عدد صحیح m:

$$a|b\ \Rightarrow\ a|bm$$

برای نمونه؛

$$۵|۱۰\ \Rightarrow\ ۵|۲۰\,,\,۵|-۱۰\,,\,۵|۵۰\,,\ldots$$

دلیل:

طبق فرض، برای یک $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ak$ و در نتیجه:

$$bm = a\underbrace{km}_{k'} \rightarrow bm = ak' \Rightarrow a \mid bm$$

بررسی حالاتی مشابه ویژگی قبل:

مثال: برای نتیجه‌گیری زیر دلیل بیاورید:

$$a \mid b\ ,\ k \in \mathbb{Z} \Rightarrow ak \mid bk$$

آیا عکس آن هم صحیح است؟

$$ak \mid bk\ ,\ k \in \mathbb{Z} \overset{?}{\Rightarrow} a \mid b$$

پاسخ

چون برای $q \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = aq$، بنابراین:

$$b = aq \xrightarrow{\times k} bk = akq \Rightarrow ak \mid bk$$

عکس این مطلب صحیح نیست، چون: $۲ \times ۰ \mid ۵ \times ۰$ ولی $۲ \nmid ۵$. (با فرض $k \neq ۰$ صحیح خواهد شد.)

ویژگی ۲ :

شمارش، خاصیت تعدی دارد. یعنی:

اگر a بر b و b بر c بخش‌پذیر باشد، آنگاه: a بر c بخش‌پذیر است.

با صورت نمادین:

$$c \mid b \wedge b \mid a \Rightarrow c \mid a$$

برای نمونه؛

از این‌که $۶ \mid ۱۲$ و $۱۲ \mid ۴۸$ می‌توان نتیجه گرفت: $۶ \mid ۴۸$.

دلیل:

طبق فرض، برای عددهای $k_۱, k_۲ \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ck_۱$ و $a = bk_۲$. در نتیجه:

$$a = bk_۲ = \underbrace{ck_۱k_۲}_{=k} \rightarrow a = ck \Rightarrow c \mid a$$

مثال: نشان می‌دهیم از $a \mid b$، نتیجه می‌شود برای هر عدد طبیعی n داریم:

$$a \mid b^n$$

زیرا:

قبلاً دیدیم که همواره $b \mid b^n$ است و در نتیجه طبق ویژگی قبل:

$$a \mid b \wedge b \mid b^n \Rightarrow a \mid b^n$$

توجه کنید:

برای عددهای صحیح a و b، با توجه به تجزیه‌ی عبارت‌های $a^n \pm b^n$:

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + \cdots - ab^{n-2} + b^{n-1}) \qquad (\text{فرد } n)$$

- همواره رابطه‌ی $a-b \mid a^n - b^n$ برقرار است.

نتیجه:

اگر n زوج باشد، آنگاه: $a+b \mid a^n - b^n$. (چرا؟)

- اگر n فرد باشد، آنگاه: $a+b \mid a^n + b^n$.

مثال: اگر داشته باشیم $a^2 \mid b-c$، نشان دهید: $a^2 \mid b^n - c^n$.

پاسخ

چون همواره داریم $b-c \mid b^n - c^n$، با توجه به فرض $a^2 \mid b-c$، طبق **ویژگی (۲)** خواهیم داشت: $a^2 \mid b^n - c^n$.

ویژگی ۳:

این ویژگی به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر دو عدد بر عددی بخش‌پذیر باشند، آنگاه جمع و تفریق آن‌ها هم بر آن عدد بخش‌پذیر است.

با نماد ریاضی:

$$a \mid b \wedge a \mid c \quad \Rightarrow \quad a \mid b \pm c$$

دلیل:

طبق فرض، برای عددهای $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ak_1$ و $c = ak_2$. در نتیجه:

$$b \pm c = ak_1 \pm ak_2 = a\underbrace{(k_1 \pm k_2)}_{=k} \to b \pm c = ak \Rightarrow a \mid b \pm c$$

نتیجه گیری:

برای عددهای صحیح m و n همواره داریم:

$$a \mid b \wedge a \mid c \quad \Rightarrow \quad a \mid bm \pm cn$$

دلیل این مطلب، با توجه به ویژگی‌های اول و سوم بدیهی است.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

فرض کنید $a \in \mathbb{N}$، $a \mid 7k+1$ و $a \mid 4k+3$. ثابت کنید: $a=1$ یا $a=17$.

پاسخ

طبق خاصیت بالا باید:

$$a \mid \underbrace{(7k+1)(-4)+(4k+3)(7)}_{=-28k-4+28k+21} \rightarrow a \mid 17$$

فقط عددهای طبیعی ۱ یا ۱۷ می‌توانند ۱۷ را عاد کنند.

مثال: اگر $2n-1 \mid 2n^2+1$، جواب‌های طبیعی n را مشخص کنید.

پاسخ

چون هر عددی خودش را عاد می‌کند:

$$2n-1 \mid 2n-1 \rightarrow 2n-1 \mid (2n-1)n \rightarrow 2n-1 \mid 2n^2-n$$

از این رابطه و فرض داریم:

$$2n-1 \mid (2n^2+1)-(2n^2-n) \rightarrow 2n-1 \mid n+1$$

دوباره این رابطه و رابطه‌ی بدیهی $2n-1 \mid 2n-1$ را با هم ترکیب می‌کنیم:

$$2n-1 \mid 2(n+1)-(2n-1) \rightarrow 2n-1 \mid 3 \rightarrow 2n-1 = \pm 1 , \pm 3$$

$$\begin{cases} 2n-1=1 \Rightarrow n=1 \\ 2n-1=-1 \Rightarrow n=0 \\ 2n-1=3 \Rightarrow n=2 \\ 2n-1=-3 \Rightarrow n=-1 \end{cases}$$

فقط دو جواب طبیعی $n=1$ و $n=2$ به‌دست آمد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

اگر عددی مانند k در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $5 \mid 4k+1$، ثابت کنید: $25 \mid 16k^2+28k+6$.

پاسخ

طبق خواصی که تا این‌جا دیده‌ایم:

$$5 \mid 4k+1 \rightarrow 5^2 \mid (4k+1)^2 \rightarrow 25 \mid 16k^2+8k+1$$

$$5 \mid 4k+1 \xrightarrow{\times 5} 25 \mid 5(4k+1) \rightarrow 25 \mid 20k+5$$

اکنون کافی است ویژگی اخیر را به‌کار ببریم:

$$25 \mid (16k^2+8k+1)+(20k+5) \Rightarrow 25 \mid 16k^2+28k+6$$

مثال: عددهای طبیعی n را چنان مشخص کنید که $\dfrac{3n^2+2n-6}{n-3}$ عددی صحیح باشد.

پاسخ

باید مخرج، صورت را عاد کند: $n-3 \mid 3n^2+2n-6$. مشابه نمونه‌های قبل:

$$n-3 \mid n-3 \rightarrow n-3 \mid (n-3)\times 3n \rightarrow n-3 \mid 3n^2-9n$$

با استفاده از: $n-3 \mid 3n^2+2n-6$، می‌نویسیم:

$$n-3 \mid (3n^2+2n-6)-(3n^2-9n) \;\rightarrow\; n-3 \mid 11n-6$$

اکنون باید عبارت $11n$ را حذف کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} n-3 \mid n-3 \xrightarrow{\times 11} n-3 \mid 11n-33 \\ n-3 \mid 11n-6 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} n-3 \mid 27 \;\rightarrow\; n-3=\pm 1, \pm 3, \pm 9, \pm 27$$

$$\Rightarrow \begin{cases} n-3=\pm 1 \;\Rightarrow\; \begin{cases} n=3+1=4 \\ n=3-1=2 \end{cases}, \quad n-3=\pm 3 \;\Rightarrow\; \begin{cases} n=3+3=6 \\ n=3-3=0 \end{cases} \\ n-3=\pm 9 \;\Rightarrow\; \begin{cases} n=3+9=12 \\ n=3-9=-6 \end{cases}, \quad n-3=\pm 27 \;\Rightarrow\; \begin{cases} n=3+27=30 \\ n=3-27=-24 \end{cases} \end{cases}$$

فقط جواب‌های طبیعی ۲، ۴، ۶، ۱۲ و ۳۰ قابل قبول هستند.

ویژگی ۴:

اگر داشته باشیم: $a \mid b$ و $b \neq 0$ باشد، آنگاه $|a| \leq |b|$. به صورت نمادین:

$$a \mid b \wedge b \neq 0 \;\Rightarrow\; |a| \leq |b|$$

به بیان ساده:

یک عدد مثبت نمی‌تواند بر عددهای بزرگ‌تر از خود بخش‌پذیر باشد.

دلیل:

طبق فرض، عدد $k \in \mathbb{Z}-\{0\}$ هست که: $b=ak$. در نتیجه:

$$|b|=|a||k| \xrightarrow{|k|\geq 1} |b| \geq |a|$$

مثال: اگر a و b عددهایی صحیح و غیر صفر باشند، نشان دهید:

$$a \mid b \;\wedge\; b \mid a \;\Rightarrow\; a=\pm b$$

پاسخ

طبق ویژگی قبل باید داشته باشیم:

$$|a| \leq |b| \quad \text{و} \quad |b| \leq |a|$$

بنابراین:

$$|a|=|b| \;\Rightarrow\; a=\pm b$$

مثال: برای موارد زیر دلیل بیاورید.

الف) اگر $a \mid b$ و $c \mid d$، آنگاه $ac \mid bd$.

ب) اگر $ac \mid bc$ و $c \neq 0$ باشد، آنگاه داریم: $a \mid b$.

پاسخ

الف) باید داشته باشیم: $b=ak_1$ و $d=ck_2$. طرفین تساوی‌ها را در هم ضرب می‌کنیم:

$$bd=ac\underbrace{k_1k_2}_{=k'} \rightarrow bd=ack' \Rightarrow ac\,|\,bd$$

ب) باید داشته باشیم: $bc=ack_1$. چون $c\neq 0$ است، طرفین تساوی را می‌توان بر c تقسیم کرد:

$$bc=ack_1 \xrightarrow{\div c} \frac{bc}{c}=\frac{ack_1}{c} \rightarrow b=ak_1 \Rightarrow a\,|\,b$$

مثال: برای عددهای طبیعی a، b و c با شرایط $a^2\,|\,bc$ و $c\,|\,a$، نشان دهید: $a\,|\,b$.

پاسخ

از دو خاصیت گفته شده در مثال قبل استفاده می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{c} a^2\,|\,bc \\ c\,|\,a \end{array}\right\} \xrightarrow{\times} a^2c\,|\,abc \Rightarrow a\,|\,b$$

در ادامه، خاصیت مهمی از ضرب عددها و کاربردهایی از آن را ببینید.

مثال: نشان دهید:

الف) حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، همواره زوج است:

$$n(n+1)=2k$$

ب) در کل: حاصل‌ضرب n عدد صحیحِ متوالی، همواره مضرب $n!$ است؛ یعنی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

بویژه:

نتیجه بگیرید: «حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی، مضرب ۶ است.»

پاسخ

الف) چون n و $n+1$ متوالی هستند، یکی از آن‌ها زوج و دیگری فرد بوده و در نتیجه ضرب آن‌ها الزاماً زوج است.

ب) عددها را به صورت $k+1\,,\,k+2\,,\,k+3\,,\,\dots\,,\,k+n$ در نظر بگیرید. می‌توان نوشت:

$$(k+1)(k+2)(k+3)\times\ \dots\times(k+n)=(k+1)(k+2)(k+3)\times\ \dots\times(k+n)\times\frac{k(k-1)(k-2)\cdots\times 3\times 2\times 1}{k(k-1)(k-2)\cdots\times 3\times 2\times 1}$$

$$=\frac{(k+n)!}{k!}$$

عبارت آخر را می‌توان به صورت مناسبِ زیر نوشت:

$$\frac{(k+n)!}{k!}=\frac{(k+n)!}{k!\times n!}\times n!=\underbrace{\binom{k+n}{k}}_{=k'}\times n!$$

پس حاصل‌ضرب عددها مضرب $n!$ شد. در یک حالت خاص:

حاصل‌ضرب هر سه عدد صحیح متوالی، مضرب $6=3!$ است.

مثال: (مهم) نشان دهید مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است.

پاسخ

فرض کنید n عددی فرد باشد. پس: $n=2q+1$ و خواهیم داشت:

$$n^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1=4\underbrace{q(q+1)}_{=2k}+1=8k+1$$

توجه کنید:

بیان مهم دیگری از حکم مثال قبل چنین است: «باقی‌مانده‌ی تقسیم مربع هر عدد فرد بر ۸ برابر ۱ است.»

مثال: نشان دهید اگر k عددی زوج باشد، k^3-4k همواره مضرب ۴۸ است.

پاسخ

می‌نویسیم: $k=2n$ و طبق خاصیت گفته شده برای ضرب سه عدد متوالی:

$$k^3-4k=(2n)^3-4(2n)=8n^3-8n=8n(n^2-1)=8\underbrace{n(n-1)(n+1)}_{=6q}=48q$$

در پایان، حالتی را بررسی می‌کنیم که عددها بر هم بخش‌پذیر نیستند.

قضیه تقسیم:

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، اعداد صحیح و یکتای q و r وجود دارند که:

$$a=bq+r\ ,\qquad 0\le r<b$$

عددهای q و r به‌ترتیب «**خارج قسمت**» و «**باقی‌مانده**» تقسیم a بر b نام دارند.

توجه کنید:

در تقسیم a بر b همواره می‌توان:

- خارج قسمت را توسط جزء صحیح $q=\left[\dfrac{a}{b}\right]$ و سپس:
- باقی‌مانده را از رابطه‌ی $r=a-bq$ به‌دست آورد.

مثال: خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عددهای ۳۱ و ۳۱− بر ۷ را تعیین کنید.

پاسخ

تقسیم را به صورت عادی انجام می‌دهیم؛ **توجه:** خارج قسمت را باید عددی انتخاب کنید که باقی‌مانده منفی نشود:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 7 \\ -\ 28 & 4 \\ \hline 3 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad r=3 \text{ و } q=4 \qquad\qquad \begin{array}{r|l} -31 & 7 \\ -\ -35 & -5 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \Rightarrow \quad r=4 \text{ و } q=-5$$

روش دوم:

مقادیر مربوط به تقسیم -31 بر 7 را با استفاده از مطلب قبل از مثال مشخص می‌کنیم:

$$q=\left[\frac{-31}{7}\right]=[-4/4]=-5 \xrightarrow{r=a-bq} r=-31-7(-5) \Rightarrow r=4$$

---✧---

مثال: (از کتاب) اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد m و n بر 17 به ترتیب 5 و 3 باشند، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2m-5n$ بر 17 را تعیین کنید.

پاسخ

طبق قضیه‌ی تقسیم می‌نویسیم:

$$\left.\begin{array}{l} m=17q_1+5 \xrightarrow{\times 2} 2m=17(2q_1)+10 \\ n=17q_2+3 \xrightarrow{\times 5} 5n=17(5q_2)+15 \end{array}\right\} \xrightarrow{(-)} 2m-5n=17(2q_1-5q_2)-5$$

توجه کنید:

باید عدد سمت راست عددی از 0 تا 16 باشد تا به عنوان باقی‌مانده پذیرفته شود:

$$2m-5n=\underbrace{17(2q_1-5q_2)-17}+\underbrace{17-5}=17\underbrace{(2q_1-5q_2-1)}_{q_3}+12 \Rightarrow 2m-5n=17q_3+12$$

پس باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر 12 است.

---✧---

مثال: اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر 4 برابر 3 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2a+3$ بر 8 را تعیین کنید.

پاسخ

طبق قضیه‌ی تقسیم داریم: $a=4q+3$. پس:

$$2a=2(4q+3)=8q+6 \xrightarrow{+3} 2a+3=8q+9$$

چون عدد 9 نمی‌تواند باقی‌مانده باشد، مانند قبل می‌نویسیم:

$$2a+3=8q+8+1=8\underbrace{(q+1)}_{q'}+1=8q'+1 \qquad \text{(باقی‌مانده عدد ۱ است.)}$$

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر دو عدد 4 و 5 به ترتیب برابر 2 و 3 باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر 20 را بیابید.

پاسخ

باید داشته باشیم: $a=4q_1+2$ و $a=5q_2+3$. تساوی‌ها را به ترتیب در 5 و 4 آن‌ها را از هم کم می‌کنیم:

$$\left.\begin{array}{l} 5a=5(4q_1+2)=20q_1+10 \\ 4a=4(5q_2+3)=20q_2+12 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} \underbrace{5a-4a}_{a}=20q_1-20q_2-2$$

چون باید باقی‌مانده نامنفی باشد، جای -۲ مقدار $-۲۰+۱۸$ را جایگزین کرده و فاکتورگیری می‌کنیم:

$$a=۲۰q_۱-۲۰q_۲-۲۰+۱۸=۲۰\underbrace{(q_۱-q_۲-۱)}_{q'}+۱۸=۲۰q'+۱۸$$ **(باقی‌مانده عدد ۱۸ است.)**

---✥---

به یک کاربرد مهم از قضیه‌ی تقسیم توجه کنید.

افراز اعداد صحیح:

فرض کنید $m>۱$ عدد طبیعی ثابتی باشد. عدد صحیح دلخواه a را در نظر گرفته و آن را بر m تقسیم می‌کنیم:

$$a=mk+r\ ;\qquad r=۰,۱,۲,\dots,m-۱$$

می‌بینید که می‌توان عددهای صحیح را بر حسب باقی‌مانده تقسیم بر m در یک مجموعه قرار داد.

- اگر باقی‌مانده صفر باشد، عددها به صورت زیر هستند:

$$a=mk\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

مجموعه‌ی تمام این نوع اعداد را با $[۰]_m$ نشان می‌دهیم:

$$[۰]_m=\{mk\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر ۱ شود، عددها به این صورت هستند:

$$[۱]_m=\{mk+۱\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

- سایر عددهای صحیح نیز به یکی از صورت‌های زیر خواهند بود:

$$[۲]_m=\{mk+۲\mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$[۳]_m=\{mk+۳\mid k\in\mathbb{Z}\}$$
$$\vdots$$
$$[m-۱]_m=\{mk+m-۱\mid k\in\mathbb{Z}\}$$

بنابراین:

با انتخاب عدد طبیعی m، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دقیقاً به تعداد m زیر مجموعه افراز می‌شود:

$$[۰]_m\ ,\ [۱]_m\ ,\ [۲]_m\ ,\ \dots\ ,\ [m-۱]_m$$

یعنی:

- این مجموعه‌ها هیچ‌کدام تهی نیستند.
- دو به دو اشتراک ندارند.
- هر عدد صحیح در یکی از آن‌ها جای دارد.

برای نمونه؛

برای $m=۴$ دقیقاً چهار قسمت افراز چنین هستند:

$$[۰]_۴=\{۴k\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۸,-۴,۰,۴,۸,۱۲,\dots\}$$

$$[۱]_۴=\{۴k+۱\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۷,-۳,۱,۵,۹,۱۳,\dots\}$$

$$[۲]_۴=\{۴k+۲\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۶,-۲,۲,۶,۱۰,۱۴,\dots\}$$

$$[۳]_۴=\{۴k+۳\mid k\in\mathbb{Z}\}=\{\dots,-۵,-۱,۳,۷,۱۱,۱۵,\dots\}$$

به یاد داشته باشید:

هر عدد صحیح a بر حسب عدد طبیعی m به یکی از صورت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$mk\ ,\ mk+۱\ ,\ mk+۲\ ,\ \dots\ ,\ mk+m-۱$$

برای نمونه؛

بر حسب $m=۵$، هر عدد صحیح دقیقاً به یکی از حالت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$۵k\ ,\ ۵k+۱\ ,\ ۵k+۲\ ,\ ۵k+۳\ ,\ ۵k+۴$$

مثال: نشان دهید اگر $n^۲$ مضرب ۳ باشد، آنگاه n هم مضرب ۳ است.

پاسخ

برهان خلف:

فرض کنید n مضرب ۳ نباشد. (فرض خلف)

چون n نمی‌تواند به صورت $۳k$ باشد، باید به یکی از دو صورت $۳k+۱$ یا $۳k+۲$ باشد.

- اگر $n=۳k+۱$ باشد، آنگاه:

$$n^۲=(۳k+۱)^۲=۹k^۲+۶k+۱=۳\underbrace{(۳k^۲+۲k)}_{=k'}+۱=۳k'+۱$$

یعنی $n^۲$ مضرب ۳ نیست که با فرض تناقض دارد.

- حالت دیگر این است که $n=۳k+۲$ باشد که باز هم به تناقض خواهد رسید:

$$n^۲=(۳k+۲)^۲=۹k^۲+۱۲k+۴=۹k^۲+۱۲k+۳+۱=۳\underbrace{(۳k^۲+۴k+۱)}_{=k'}+۱=۳k'+۱$$

بنابراین فرض خلف باطل شده و حکم صحیح خواهد بود.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

ثابت کنید اگر $p\geq ۵$ عددی اول باشد، آنگاه به یکی از دو صورت $p=۴k+۱$ یا $p=۴k+۳$ نوشته می‌شود.

پاسخ

عدد p در تقسیم بر ۴ به یکی از چهار حالت زیر است:

$$۴k\ ,\ ۴k+۱\ ,\ ۴k+۲,\ ۴k+۳$$

در دو حالت زیر، p اول نیست:

- $p=۴k$:

چون p بر ۲ بخش‌پذیر است.

- $p=۴k+۲$:

در این صورت $p=۲(۲k+۱)$ بوده و باز هم بر ۲ بخش‌پذیر است.

در نتیجه:

p فقط می‌تواند به صورت $۴k+۱$ یا $۴k+۳$ باشد.

مثال: نشان دهید برای عدد صحیح فرد a، عدد $a^۴$ به صورت $۱۶k+۱$ است.

پاسخ

قبلاً دیدیم که مربع هر عدد فرد به صورت $8k+1$ است، پس می‌توان نوشت:

$$a^4=(a^2)^2=(8k+1)^2=64k^2+16k+1=16(\underbrace{4k^2+k}_{k'})+1$$

پاسخ دهید (۲)

۱- تفاضل هر دو عدد دلخواه از مجموعه‌ی $A=\{x\in\mathbb{Z}\mid x=4k+3\}$ مضرب ۴ است. (درست ☐ - نادرست ☐)
(نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

۲- اگر $a|b$ و m و n دو عدد طبیعی باشند که $m\le n$، آنگاه: $a^m|a^n$.

۳- اگر k عددی در $\mathbb{Z}$ باشد به طوری که $3|5k+1$، ثابت کنید: $9|25k^2+25k+13$.

۴- اگر باقیمانده تقسیم عدد a بر ۷ برابر ۶ باشد، در این صورت باقی‌مانده‌ی تقسیم $2a+5$ بر ۱۴ را بیابید.

۵- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم اعداد a و b بر ۲۷ به ترتیب برابر ۲۱ و ۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد $2a-3b$ بر ۲۷ را بیابید.

۶- اگر در تقسیم عددهای ۵۰۷ و ۳۶۸ بر عدد b، باقی مانده‌ها به ترتیب ۱۰ و ۱۳ باشند، مقدار b را بیابید.

۷- با در نظر گرفتن سه حالت $n=3k$، $n=3k+1$ و $n=3k+2$، حکم زیر را ثابت کنید:
اگر n عددی صحیح باشد، آنگاه: $3|n^3-n$.

منتخب کتاب:

۱- از تساوی $ab=cd$، پنج رابطه‌ی عاد کردن نتیجه بگیرید. (هر چهار عدد a، b، c و d صحیح و غیر صفر هستند.)

۲- برای $a>1$، اگر $a|9k+4$ و $a|5k+3$، ثابت کنید a عددی اول است.

۳- اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم عدد a بر ۷ و ۸ به ترتیب ۵ و ۷ باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم a بر ۵۶ را بیابید.

۴- اگر a عدد دلخواه صحیحی باشد، ثابت کنید همواره یکی از عددهای a یا $a+2$ یا $a+4$ بر ۳ بخش‌پذیر است.

۵- ثابت کنید تفاضل مکعب‌های دو عدد صحیح متوالی عددی فرد است.

۳ ب.م.م و ک.م.م

دو مفهوم ب.م.م و ک.م.م کاربردهای زیادی در نظریه اعداد دارند.

ب.م.م اعداد:

فرض کنید a و b دو عدد صحیح باشند که لااقل یکی از آن‌ها غیر صفر است. عدد طبیعی d را «**ب.م.م**» یعنی: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک این دو عدد گوئیم، هرگاه:

- **اولاً:** $d|a$ و $d|b$ و
- **ثانیاً:** سایر مقسوم علیه‌های مشترک a و b از d کوچک‌تر باشند.

در این صورت می‌نویسیم:

$$(a,b)=d$$

در حالت خاص:

اگر $a|b$، آنگاه $(a,b)=|a|$ است. بویژه:

$$(a,a)=|a| \quad \text{و} \quad (a,۰)=|a|$$

البته عبارت $(۰,۰)$ بی‌معنی است.

مثال: فرض کنید p عددی اول و a عددی صحیح باشد. نشان دهید:

اگر $a|p$، آنگاه: $(a,p)=p$ و در غیر این‌صورت: $(a,p)=۱$.

پاسخ

اگر بدانیم $a|p$، چون $p|p$، پس بدیهی است که $(a,p)=p$ است. اما اگر $a\nmid p$، با توجه به اول بودن p، فقط عدد ۱ می‌تواند مقسوم علیه مثبت و مشترک بین p و a باشد و در نتیجه:

$$(a,p)=۱$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

جاهای خالی را با عدد یا کلمه مناسب پر کنید.

الف) a و b اعدادی صحیح و a مخالف صفر است. اگر $a|b$، آنگاه عدد .... شمارنده‌ی عدد ..... است.

ب) m عددی صحیح است. حاصل $(۲m,۶m^۳)$ برابر .... است.

پاسخ

الف) طبق تعریف بالا:

عدد a شمارنده‌ی عدد b است.

ب) چون $۶m^۳=۲m\times ۳m^۲$، بنابراین $۲m|۶m^۳$ و بنابراین طبق مطلب گفته شده‌ی بالا:

$$(۲m,۶m^۳)=|۲m|$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

به ازای چند مقدار a، تساوی $(۲a,۲۷)=a$ برقرار است؟

☐ ۲   ☐ ۸   ☐ ۴   ☐ ۱

پاسخ

چون باید: $a|۲۷$، چهار حالت ممکن است:

$$a=۱:\ (۲a,۲۷)=(۲,۲۷)=۱ \Rightarrow (۲a,۲۷)=a$$
$$a=۳:\ (۲a,۲۷)=(۶,۲۷)=۳ \Rightarrow (۲a,۲۷)=a$$
$$a=۹:\ (۲a,۲۷)=(۱۸,۲۷)=۹ \Rightarrow (۲a,۲۷)=a$$
$$a=۲۷:\ (۲a,۲۷)=(۵۴,۲۷)=۲۷ \Rightarrow (۲a,۲۷)=a$$

هر چهار حالت قابل قبول.

حالت خاص زیر در مورد ب.م.م اعداد اهمیت بسیاری دارد.

اعداد متباین:

دو عدد a و b را نسبت به هم «**اول**» یا «**مُتَبایِن**» گوئیم، هرگاه:

$$(a,b)=۱$$

به دو مورد در ارتباط با این مفهوم توجه کنید:

- واضح است که $(۴,۹)=۱$ و بنابراین متباین بودن اعداد ربطی به اول بودن تک‌تک آن‌ها ندارد. ولی عکس آن صحیح است:
- اگر p و q دو عدد اول مختلف باشند، همواره: $(p,q)=۱$.
- دو عدد a و b وقتی نسبت به هم اول هستند که در تجزیه‌ی این دو عدد به عددهای اول، عامل اول مشترکی وجود نداشته باشد. برای نمونه؛
  چون $۴۸=۲^۴\times۳$ و $۳۵=۵\times۷$، بنابراین $(۴۸,۳۵)=۱$ است.

مثال: نشان دهید عدد ۷۷ نسبت به هر سه عدد ۶۴، ۸۱ و ۱۲۵ اول است.

پاسخ

تجزیه‌ی این عددها به صورت زیر است:

$$۷۷=۷\times۱۱\ ,\ ۶۴=۲^۶\ ,\ ۸۱=۳^۴\ ,\ ۱۲۵=۵^۳$$

چون ۷۷ با هیچ کدام عامل مشترک ندارد، نسبت به همه‌ی آن‌ها اول است.

مثال: نشان دهید: دو عدد فرد متوالی همواره نسبت به هم اول هستند.

پاسخ

دو عدد فرد متوالی به صورت $2n+1$ و $2n+3$ هستند. قرار می‌دهیم: $d=(2n+1,2n+3)$. طبق تعریف:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid 2n+1 \\ d\mid 2n+3 \end{array}\right\} \xrightarrow{-} d\mid 2n+3-(2n+1) \rightarrow d\mid 2 \Rightarrow d=1 \quad \text{یا} \quad d=2$$

توجه کنید:

چون عددها فرد هستند، $d=2$ غیرممکن بوده و در نتیجه $(2n+1,2n+3)=1$ است.

مثال: اگر a و b اعدادی صحیح باشند، آنگاه نشان دهید: $(ab+1,a)=1$.

پاسخ

قرار می‌دهیم: $(ab+1,a)=d$.

طبق تعریف باید $d\mid a$ و لذا d هر مضرب a از جمله ab را عاد می‌کند. بنابراین:

$$\left.\begin{array}{l} d\mid ab \\ d\mid ab+1 \end{array}\right\} \rightarrow d\mid ab+1-ab \rightarrow d\mid 1 \Rightarrow d=1$$

مثال: نشان دهید حاصل $(a^2-4a+1,a-3)$ برابر ۱ یا ۲ است. $(a\in\mathbb{Z})$

پاسخ

اگر قرار دهیم: $(a^2-4a+1,a-3)=d$، باید $d\mid a^2-4a+1$ و $d\mid a-3$. بنابراین:

$$d\mid a(a-3) \rightarrow d\mid a^2-3a \xrightarrow{(-)} d\mid a^2-3a-(a^2-4a+1)$$
$$\rightarrow d\mid a-1 \xrightarrow{(-)} d\mid a-1-(a-3) \Rightarrow d\mid 2$$

پس مقدار d فقط می‌تواند ۱ یا ۲ باشد.

اکنون مضرب‌های مشترک دو عدد صحیح را بررسی می‌کنیم.

ک.م.م اعداد:

فرض کنیم a و b دو عدد صحیح باشند که هر دو غیر صفر هستند. عدد طبیعی c را «**ک.م.م**» یعنی: کوچک‌ترین مضرب مشترک این دو عدد گوئیم، هرگاه:

- **اولاً:** $a\mid c$ و $b\mid c$ و
- **ثانیاً:** سایر مضرب‌های مثبت و مشترک a و b از c بزرگ‌تر باشند.

در این صورت می‌نویسیم:

$$[a,b]=c$$

در یک حالت خاص:

هرگاه $a\mid b$، آنگاه $[a,b]=|b|$ است؛ بویژه:

$[\mp 1,a]=|a|$ و $[a,\pm a]=|a|$.

مثال: جای خالی را پر کنید:

$[a,b]=c$ اگر و تنها اگر دو شرط زیر برقرار باشند:

۱) $a|c\ ,\ b|c$ ۲) $\forall m>0\ ,$ ....

پاسخ

طبق تعریف بالا، شرط دوم چنین است:

$$\forall m>0\ ,\ (a|m\ ,\ b|m)\ \Rightarrow\ c\le m$$

مثال: برای دو عدد صحیح غیر صفر a و b، مقادیر زیر را حساب کنید.

$$[a,(a,b)] \quad \text{و} \quad (a,[a,b])$$

پاسخ

چون $a|[a,b]$ و $(a,b)|a$، جواب هر دو مورد برابر $|a|$ است.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر $m\in\mathbb{Z}-\{0\}$، آنگاه: $[m^5,(m^3,m^2)]=m^5$. (درست ☐ - نادرست ☐)

جواب: درست است؛ زیرا:

به دلیل $m^2|m^3$ داریم: $(m^3,m^2)=m^2$ و سپس به دلیل $m^2|m^5$ خواهیم داشت:

$$[m^5,(m^3,m^2)]=[m^5,m^2]=m^5$$

محاسبه ب.م.م و ک.م.م:

اگر عددهای داده شده را تجزیه کنید، در این صورت:

- ب.م.م. برابر ضرب عامل‌های مشترک با توان کوچک‌تر است.
- ک.م.م. برابر ضرب عامل‌های مشترک با توان بزرگ‌تر ضرب‌در تمام عامل‌های غیر مشترک است.

برای نمونه؛

چون $40=2^3\times 5$ و $75=3\times 5^2$، بنابراین داریم:

$$(40,75)=5^1=5 \quad \text{و} \quad [40,75]=5^2\times 3\times 2^3=600$$

از دو مورد بالا می‌توان نتیجه گرفت، بین ب.م.م. و ک.م.م. دو عدد، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$[a,b]=\frac{|ab|}{(a,b)}$$

هنگامی که در مبحث ب.م.م یا ک.م.م به دنبال عددهایی با اطلاعات داده شده هستیم، معمولاً استفاده از تکنیک زیر جستجو را بسیار محدود کرده و در نتیجه دسترسی به جواب آسان‌تر خواهد شد.

تکنیک a' و b':

ابتدا توجه کنید:

اگر a و b دو عدد صحیح و $(a,b)=d$ باشد، آنگاه $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ است.

اکنون فرض کنید $(a,b)=d$ باشد، آنگاه:

- قرار می‌دهیم: $\frac{a}{d}=a'$ و $\frac{b}{d}=b'$.
- طبق مرحله‌ی قبل خواهیم داشت: $a=a'd$ و $b=b'd$ و البته: $(a',b')=1$.

همیشه:

به جای این‌که دنبال اعداد نسبتاً بزرگ a و b بگردید، بهتر است دنبال عددهای کوچک‌تر و متباین a' و b' بگردید!

مثال: مجموع دو عدد طبیعی ۵۰۴ و ب.م.م آن‌ها ۳۶ است. حالت‌های ممکن برای دو عدد را مشخص کنید.

پاسخ

دو عدد را a و b گرفته و طبق تکنیک قبل قرار می‌دهیم:

$$a=36a' \ , \ b=36b' \ , \ (a',b')=1$$

اکنون طبق فرض می‌نویسیم:

$$a+b=504 \ \rightarrow \ 36(a'+b')=504 \ \rightarrow \ a'+b'=14$$

عددهای طبیعی کمی وجود دارند که جمع آن‌ها ۱۴ بوده و بعلاوه نسبت به هم اول باشند:

$$a'=1 \ , \ b'=13 \ \Rightarrow \ \begin{cases} a=36\times 1=36 \\ b=36\times 13=468 \end{cases}$$

$$a'=3 \ , \ b'=11 \ \Rightarrow \ \begin{cases} a=36\times 3=108 \\ b=36\times 11=396 \end{cases}$$

$$a'=5 \ , \ b'=9 \ \Rightarrow \ \begin{cases} a=36\times 5=180 \\ b=36\times 9=324 \end{cases}$$

توجه کنید:

فقط سه جفت جواب برای سؤال به‌دست آمد.

---✧---

ک.م.م بر حسب a' و b':

ک.م.م برابر $[a,b]=a'b'd$ است، زیرا:

$$[a,b]=\frac{a'd\times b'd}{d} \ \Rightarrow \ [a,b]=a'b'd$$

بویژه:

اگر $(a,b)=1$ باشد، آنگاه $[a,b]=|ab|$ است.

مثال: ب.م.م دو عدد ۲۳ و ک.م.م آن‌ها ۲۰۹۳ است. عدد بزرگ‌تر را مشخص کنید. (هر دو عدد بزرگ‌تر از ۲۳ هستند.)

پاسخ

طبق تکنیک a' و b' می‌نویسیم:

$$[a,b]=a'b'd \rightarrow ۲۰۹۳=۲۳a'b' \rightarrow a'b'=۹۱$$

تنها دو حالت می‌تواند رخ دهد:

- چون $۹۱=۱\times۹۱$، حالت $a'=۱$ و $b'=۹۱$ را داریم که چون $a=a'd=۱\times۲۳=۲۳$ خواهد شد، طبق فرض قبول نیست.
- چون $۹۱=۱۳\times۷$ است، حالت زیر جواب را به‌دست می‌دهد:

$$a'=۱۳ \rightarrow a=a'd=۱۳\times۲۳ \Rightarrow a=۲۹۹$$

پاسخ دهید (۳)

۱- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) اگر $a|b$، آنگاه $(a,b)=a$.

ب) اگر $a|b$، آنگاه $[a,b]=|b|$.

۲- حاصل $[(۴۰۳,۳۴۱),۷۷]$ را حساب کنید.

۳- اگر $d=(۷k+۶,۹k+۷)$ و این دو عدد نسبت به هم اول نباشند، d را بیابید. $(k\in\mathbb{Z})$

۴- فرض کنید a عددی طبیعی باشد. حاصل $[۳۲a^۳,۴۸a^۲]$ را به‌دست آورید.

۵- اگر مجموع دو عدد ۱۰۲ و ک.م.م آن‌ها ۴۳۲ باشد، ب.م.م آن دو عدد را بیابید.

منتخب کتاب:

۱- موارد زیر را ثابت کنید:

الف) هر دو عدد صحیح و متوالی نسبت به هم اول هستند.

ب) هر دو عدد صحیح و فرد متوالی نسبت به هم اول هستند. (آیا در مورد زوج و متوالی هم درست است؟)

پ) اگر p و q دو عدد اول متمایز باشند، همواره $(p,q)=۱$ است.

۲- برای عدد صحیح m، حاصل هر مورد را بنویسید.

الف) $([m^۲,m],m^۵)$

ب) $(۲m,۶m^۳)$

پ) $(۳m+۱,۳m+۲)$

ت) $[(m^۲,m^۳),m^۷]$

ث) $[(۷۲,۴۸),۱۲۰]$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴