۱۰

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

هندسه دهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

محتوای جامع آموزش
(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب
(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی
(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی
(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی
Up to date

فهرست

آموزش:

هندسه دهم

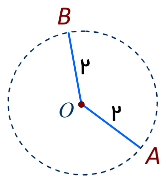
۱

ترسیم هندسی و استدلال

فهرست	صفحه

۱ روش‌های ترسیم

دایره‌ای به مرکز یک نقطه‌ی O و شعاع ۲ سانتی‌متر در نظر بگیرید:



نقاط روی این شکل هندسی همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند که هنگام رسم دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

تمام نقاط دایره به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر از نقطه‌ی O قرار دارند.

یعنی در شکل بالا:

اندازه‌ی شعاع‌های OA و OB و هر شعاع دیگری برابر ۲ سانتی‌متر است.

توجه کنید:

۱) مجموعه نقاطی در صفحه (یا فضا) که همگی ویژگی مشترکی دارند را **«مکان هندسی»** گویند.

بنابراین:

مکان هندسی نقاط صفحه به فاصله‌ی r از یک نقطه‌ی ثابت مانند O، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است. (چند مکان هندسی مهم در صفحه را در ادامه این فصل خواهیم دید.)

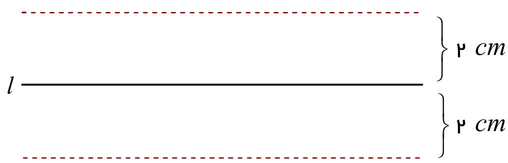
سؤال:

مکان هندسی با ویژگی بالا در فضا چه شکلی است؟

۲) طول یک پاره‌خط مانند AB دارای نماد $\overline{AB}$ یا $|AB|$ است؛ البته برای سادگی، معمولاً طول را هم مانند نام آن با نماد AB نشان خواهیم داد.

یک مکان هندسی دیگر:

اگر l یک خط باشد، مجموعه نقاطی به فاصله‌ی ۲ از l، دو خط موازی به فاصله‌ی ۲ در دو طرف آن است:



در حالت کلی:

هر ترسیم هندسی با توجه به خاصیت یا خواص مشترک نقاط آن انجام می‌شود. ببینید:

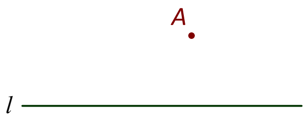
تکنیک رسم:

بسیاری مواقع در یک ترسیم هندسی، بعد از رسم بخشی از شکل، برای تکمیل آن باید نقطه‌ای را بیابیم که دارای دو ویژگی باشد. در این صورت:

- مجموعه نقاط مربوط به هر یک از ویژگی‌ها را رسم می‌کنیم.
- نقطه یا نقاطی که در هر دو مکان مشترک باشد، جواب مورد نظر را مشخص می‌کند.

نمونه‌ی بعد را ببینید:

مثال: خط l و نقطه‌ی A خارج آن در شکل روبه‌رو داده شده است.



نقطه‌ای روی l مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد. آیا همیشه چنین نقطه‌ای وجود دارد؟

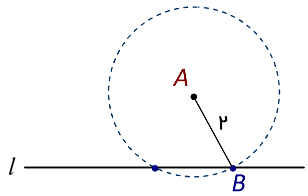
پاسخ

باید به دنبال نقطه‌ی B با دو ویژگی زیر بگردیم:

۱) لازم است B روی خط l باشد. **(ویژگی اول)**

۲) باید فاصله‌ی B تا A برابر ۲ سانتی‌متر باشد، یعنی روی دایره به مرکز A و شعاع ۲. **(ویژگی دوم)**

برخورد دو مکان هندسی، جواب یا جواب‌ها را معلوم می‌کند:



(دو جواب در شکل دیده می‌شود.)

توجه کنید:

اگر دایره با خط نقطه‌ی مشترک نداشت، جواب پیدا نمی‌شد؛ بعلاوه، اگر دایره و خط بر هم مماس بودند، فقط یک جواب حاصل می‌شد.

مثال: مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

پاره‌خط BC را به طول ۴ سانتی‌متر رسم می‌کنیم. اکنون باید به دنبال نقطه‌ی A با دو ویژگی زیر بگردیم:

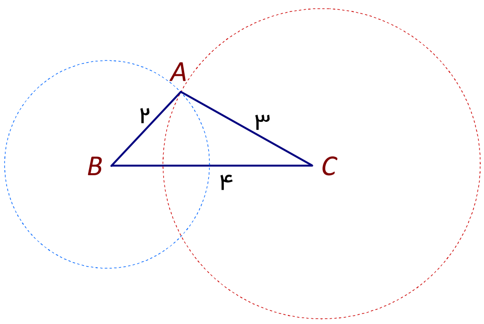
۱) لازم است فاصله‌ی A تا B برابر ۲ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز B و شعاع ۲ سانتی‌متر است.

۲) لازم است فاصله‌ی A تا C برابر ۳ سانتی‌متر باشد؛

مکان مربوطه یک دایره به مرکز C و شعاع ۳ سانتی‌متر است.

با رسم دو دایره، برخورد آن‌ها نقطه‌ی A را مشخص خواهد کرد:

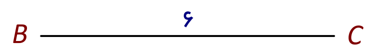


---✧---

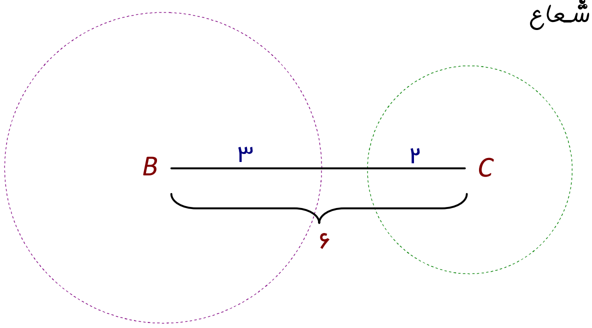
✧**مثال:** آیا می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۶ سانتی‌متر رسم کرد؟ نتیجه‌ی پاسخ خود را بیان کنید.

☑ پاسخ

مشابه مثال قبل، ابتدا پاره‌خط BC را به طول ۶ سانتی‌متر رسم می‌کنیم.



اکنون،
به مرکز B دایره‌ای به شعاع ۳ سانتی‌متر و به مرکز C دایره‌ای به شعاع ۲ سانتی‌متر رسم می‌کنیم؛



چنان‌که می‌بینیم، چون $۶ > ۳ + ۲$ است، دایره‌ها یکدیگر را قطع نکرده و مثلثی حاصل نمی‌شود.

---✧---

نتیجه:

شرط آن‌که مثلثی به طول اضلاع a، b و c وجود داشته باشد این است که هر سه نامساوی زیر برقرار باشد:

$$a < b + c \quad و \quad b < a + c \quad و \quad c < a + b$$

یعنی:

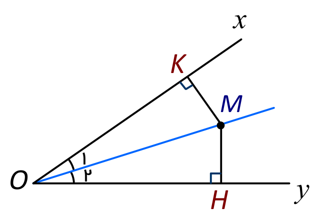
باید جمع طول‌های هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد.

در ادامه چند ترسیم هندسی دقیق و کامل بررسی می‌شوند؛ قبل از آن توجه کنید:

- برای رسم یک دایره، به مرکز آن و اندازه‌ی شعاع نیاز است و سپس توسط پرگار ترسیم انجام می‌شود.
- برای رسم یک پاره‌خط، نیم‌خط و یا خط به دو نقطه روی آن نیاز بوده و سپس رسم توسط خط‌کش انجام می‌شود.

در اولین مورد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی نیمساز یک زاویه را ببینید.

✧**مثال:** اگر نقطه‌ی M روی نیمساز یک زاویه باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو ضلع آن زاویه برابر است. یعنی:



$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \Rightarrow MH = MK$$

☑ برهان

به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث $\overset{\Delta}{OMH}$ و $\overset{\Delta}{OMK}$ طبق یکی از حالت‌های خاص مثلث‌های قائم‌الزاویه، یعنی: «وتر و یک زاویه‌ی تند» هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{matrix} OM = OM \\ \hat{O}_۱ = \hat{O}_۲ \end{matrix}\right\} \xrightarrow{(وز)} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر بوده و از جمله $MH = MK$ است.

نشان دهید عکس مثال بالا هم درست است؛ یعنی:

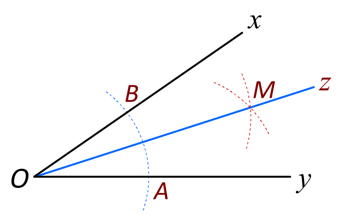
پای تخته !

۱. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو ضلع یک زاویه داشته باشد، در این صورت روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

رسم نیمساز:

با استفاده از خط‌کش و پرگار، رسم نیمساز یک زاویه‌ی $\widehat{xOy}$ طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواهی باز کرده و به مرکز O یک کمان می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه را در نقاط A و B قطع کند.
- اکنون به مراکز A و B و با شعاع دلخواهی دو کمان می‌زنیم به شرطی که یکدیگر را در نقطه‌ای چون M قطع کنند. سپس نیم‌خط Oz را از O و M عبور می‌دهیم:



توجه کنید:

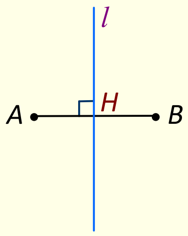
اگر پاره خط‌های BM و AM را رسم کنید، دو مثلث OBM و OAM طبق حالت (ض‌ض‌ض) هم‌نهشت خواهند شد و بنابراین:

$$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} \quad \Rightarrow$$ نیم‌خط Oz نیمساز زاویه‌ی است

ترسیم اصلی دیگر، عمود منصف یک پاره‌خط است؛ مفهوم دقیق آن را یادآوری می‌کنیم:

عمود منصف پاره‌خط:

یک پاره‌خط مانند AB در نظر بگیرید. عمود منصف این پاره‌خط، خطی مانند l با دو خاصیت زیر خواهد بود:



اولاً: خط l از وسط پاره‌خط عبور می‌کند: $AH = HB$

ثانیاً: خط l بر پاره‌خط AB عمود است: $\hat{H} = ۹۰^\circ$

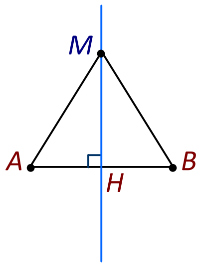
در نمونه‌ی بعد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی عمود منصف یک پاره‌خط را ببینید.

مثال: اگر نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو سر پاره‌خط برابر است.

یعنی:

$$MA = MB$$

برهان



به آسانی دیده می‌شود که دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:

$$\left.\begin{array}{l} AH = HB \\ \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ \\ MH = MH \end{array}\right\} \xrightarrow{(\text{ض‌زض})} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $MA = MB$ است.

---✧---

نشان دهید برعکس مثال بالا هم درست است:

پای تخته !

۲. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو سر پاره‌خط AB داشته باشد، M روی عمود منصف قرار دارد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

عمود منصف وتر یک دایره از .... می‌گذرد.

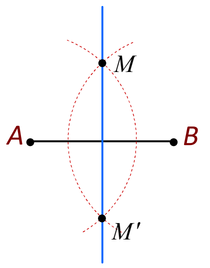
پاسخ

جواب: مرکز دایره. زیرا:

فاصله‌ی مرکز دایره از دو سر وتر برابر شعاع دایره است و بنابراین مرکز روی عمود منصف قرار خواهد داشت.

رسم عمود منصف:

با توجه به دو مورد بالا، برای رسم عمود منصف، دو نقطه به فاصله‌ی برابر تا A و B مشخص کرده و خط گذرا از آن دو رسم می‌شود:



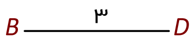
- دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کرده، یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند.

- فاصله‌های M و M' از نقاط A و B برابر شعاع دایره‌های یکسانی بوده و در نتیجه با هم برابرند، پس این دو نقطه روی عمود منصف قرار دارند. پس خط گذرا از این دو نقطه همان عمود منصف است.

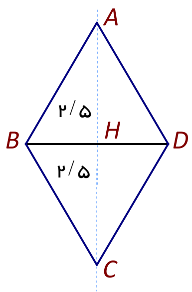
مثال: یک لوزی با طول قطرهای ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

طبق این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:



- پاره‌خط BD را به طول ۳ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، عمود منصف BD را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.



سپس کافی است از نقطه‌ی H به اندازه‌ی ۲/۵ سانتی‌متر بالا و پایین رفته تا نقاط A و C مشخص شوند. در پایان این نقاط را با خط‌کش به یکدیگر وصل می‌کنیم:

نوبت شماست . . .

پای تخته !

۳. یک لوزی با طول قطر کوچک **۴** سانتی‌متر و طول ضلع **۳** سانتی‌متر رسم کنید.

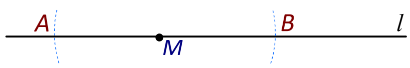
در ادامه چند ترسیم هندسی دیگر با استفاده از روش رسم عمود منصف بیان می‌شود.

رسم عمود بر خط:

خط l و نقطه‌ای چون M در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که بر l عمود باشد. این ترسیم در دو حالت انجام می‌شود:

حالت (۱): فرض کنید نقطه‌ی M روی خط l قرار داشته باشد.

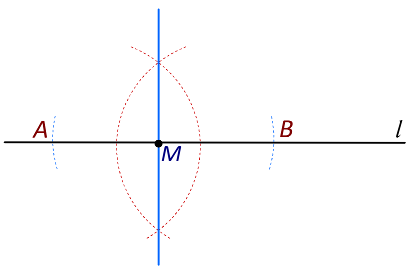
گام اول: توسط پرگار به مرکز M و شعاع دلخواهی کمان‌هایی می‌زنیم تا خط l را در دو طرف M در نقاط A و B قطع کند:



توجه کنید:

چون شعاع دو کمان یکسان است، داریم $MA = MB$ و بنابراین M وسط پاره‌خط AB است.

گام دوم: اکنون اگر به روش گفته شده، عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط l عمود بوده و از نقطه‌ی M نیز عبور خواهد کرد:



حالت دیگر رسم خط عمود را به صورت مشابه بالا انجام دهید:

پای تخته !

۴. **حالت (۲):** فرض کنید نقطه‌ی M خارج روی خط l قرار داشته و با تکمیل گام‌های زیر، خطی گذرا از M بر l عمود کنید.

گام اول: دو نقطه مانند A و B روی خط l مشخص کنید به طوری که $MA = MB$ باشد.

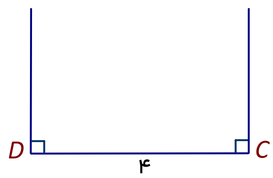
گام دوم: عمود منصف AB را رسم کنید. چرا نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد؟

توجه!

رسم خط عمود در **حالت (۲)** بالا، یک سؤال **(نهایی- خرداد ۱۴۰۳)** بوده است.

مثال: یک مستطیل به طول ۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی قطر ۶ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

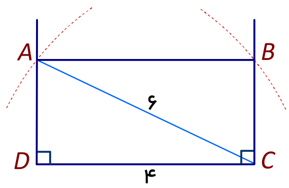


طبق این خاصیت که «زوایای مستطیل قائمه هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط DC را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.
- طبق روش بالا، در نقاط D و C دو خط بر DC عمود رسم می‌کنیم.

اکنون توجه کنید:

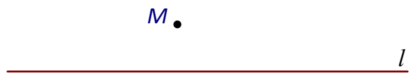
چون طول قطر برابر ۶ است، نقطه‌ی A روی خط عمود سمت چپ و دایره‌ی به مرکز C و شعاع ۶ قرار دارد. نقطه‌ی برخورد این دو، نقطه‌ی A است. به همین صورت، دایره‌ی به مرکز D و شعاع ۶ سانتی‌متر، نقطه‌ی B را مشخص خواهد نمود:



کاربرد بعدیِ عمود منصف، رسم خطی موازی یک خط داده شده است.

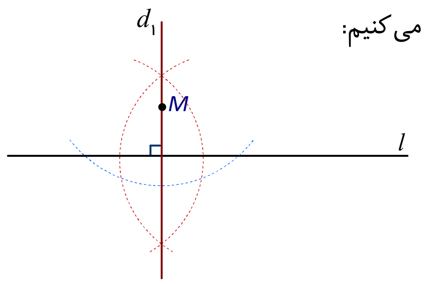
رسم خط موازی:

خط l و نقطه‌ای چون M در خارج آن در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که با l موازی باشد:



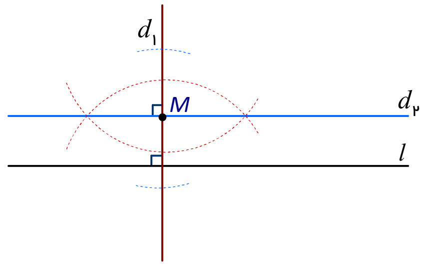
گام (۱):

طبق حالت (۲) از رسم خط عمود، از نقطه‌ی M خط d_1 را بر l عمود می‌کنیم:



گام (۲):

اکنون نقطه‌ی M روی خط d_1 قرار دارد. این بار طبق حالت (۱) از رسم خط عمود، خطی چون d_2 از نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود می‌کنیم:



نتیجه‌گیری:

خط d_2 از نقطه‌ی M عبور کرده و داریم:

$$l \perp d_1 \quad \text{و} \quad d_2 \perp d_1$$

بنابراین:

هر دو خط l و d_2 بر خط d_1 عمود بوده و در نتیجه خودشان موازی‌اند. یعنی: $l \,||\, d_2$ و d_2 همان خط مورد نظر است.

پاسخ دهید (۱)

۱- با توجه به درسنامه، جاهای خالی را کامل کنید:

الف) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد ....

و هر نقطه که .... روی عمود منصف ....

ب) هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد ....

و هر نقطه که .... روی نیمساز ....

۲- دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. توسط ترسیم مناسب، نقاطی در صفحه را مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۳- نقطه‌ی M روی خط l قرار دارد. نقاطی را تعیین کنید که از نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر و از خط l به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۴- چند لوزی به طول ضلع ۲/۵ سانتی‌متر و قطر کوچک ۶ سانتی‌متر قابل رسم است؟

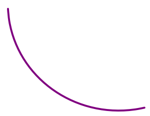
۵- جاهای خالی را در عبارت زیر طوری کامل کنید که مسأله:

الف) دو جواب داشته باشد. ب) یک جواب داشته باشد. پ) جواب نداشته باشد.

«نقاط A و B به فاصله‌ی ۷ سانتی‌متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر . . . . . . و از نقطه‌ی B برابر . . . . باشد.»

۶- در مثلث ABC می‌دانیم $AB = ۲x - ۱$ و $AC = ۴x + ۲$ و $BC = ۷x$ است. حدود x را مشخص کنید.

۷- قطعه‌ای از یک دایره به صورت مقابل داده شده است. به کمک ترسیم، مرکز دایره‌ی مربوطه را دقیقاً مشخص کنید:



منتخب کتاب:

۱- فرض کنید می‌دانیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت (الف) یافته‌اید، نیمساز زاویه را رسم کنید.

۲ استدلال و استنتاج

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان دهد (یعنی: اثبات کند.) در این گونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود.

استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.

برای نمونه؛

ممکن است با مشاهده‌ی اعداد اول: ۳,۷,۱۱,۲۳، نتیجه بگیریم که اعداد اول همگی فرد هستند. **(البته نتیجه نادرست است!)**

نمونه‌ی دیگر:

مثال: به استدلال زیر توجه کنید:

- با حرارت دادن، پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل می‌شود.

ممکن است شخصی با این مشاهدات نتیجه بگیرد:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود!

نتیجه‌ی حاصل شده صحیح نیست. یعنی استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

توجه کنید:

طبق آن‌چه بیان شد، در مورد استفاده از استدلال استقرایی به دو مورد مهم اشاره می‌شود:

- احکام به‌دست آمده به این روش ممکن است نادرست باشند. لذا روش استقرایی قابل اطمینان نبوده و باید احکام به روش‌های دیگری به‌طور قطعی تایید یا رد شوند.
- با وجود این‌که روش استقرایی قابل اطمینان نیست، برای به‌دست آوردن فرضیه‌های علمی و حتی در برخی بررسی‌های علوم تجربی به عنوان تنها ابزار، از آن استفاده می‌شود.

در همین درس نیز:

در بخش پایانی **فصل (۳)**، کاربرد جالبی از استدلال استقرایی را در قضیه‌ی پیک خواهیم دید.

روش اصلی و قوی‌تر استدلال در ریاضیات را ببینید.

استدلال استنتاجی:

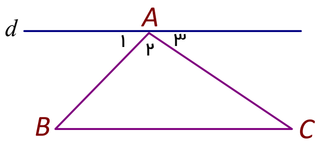
تایید قطعی یک حکم (درست) به این صورت است که:

- بر اساس حقایق و احکام کلیِ از پیش قبول کرده و
- با استفاده از محاسبات و دلایل منطقی

درستی آن حکم خاص را نشان می‌دهیم؛ به این روش **«استدلال استنتاجی»** گویند. بنابراین:

استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.

مثال: در فصل مقدماتی با استدلال استنتاجی نشان دادیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث ۱۸۰° است.



دلیل به صورت خلاصه:

از نقطه‌ی A خطی موازی BC رسم می‌کنیم. طبق خواص خطوط موازی و مورب:

$$\hat{A}_۱+\hat{A}_۲+\hat{A}_۳=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{A}_۱=\hat{B}\ ,\ \hat{A}_۲=\hat{A}\ ,\ \hat{A}_۳=\hat{C}} \hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

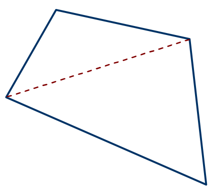
با استفاده از این حقیقت شناخته شده، نشان دهید:

مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی ۳۶۰° است.

بعلاوه، در مورد مجموع زوایای داخلی n ضلعی چه می‌توان گفت؟ ($n\geq ۳$)

پاسخ

در چهارضلعی دلخواه مقابل، یک قطر را رسم کرده‌ایم:



چنان‌که می‌بینید:

مجموع زوایای چهارضلعی با مجموع زوایای دو مثلث برابر است. یعنی:

$$۲\times۱۸۰^\circ=۳۶۰^\circ$$

بعلاوه؛

اگر یک n ضلعی داشته باشیم، می‌توان تعداد $n-۲$ مثلث در آن ایجاد کرد و بنابراین مجموع زوایای داخلی آن برابر است با:

$$(n-۲)\times۱۸۰^\circ$$

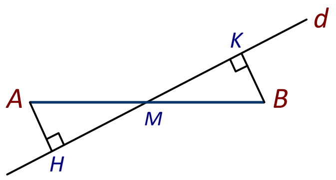
توجه کنید:

در اثبات آورده شده در مثال بالا، از یک چهارضلعی دلخواه استفاده کرده و حکم را تایید کردیم. بنابراین، حکم در مورد هر چهارضلعی دلخواهی برقرار است. پس:

(همواره در اثبات‌ها باید مراقب باشید استنتاج خود را به حالت‌های خاص محدود نکنید.)

مثال: فرض کنید خط d از وسط پاره‌خط AB عبور کند. با استدلال استنتاجی نشان دهید فاصله‌ی نقاط A و B تا خط d با هم برابر است.

پاسخ



در شکل مقابل، M را وسط AB بگیرید:

طبق خاصیت زوایای متقابل به رأس:

$$A\hat{M}H = B\hat{M}K \quad \text{و} \quad MA = MB$$

پس دو مثلث قائم الزاویه AMH و BMK طبق حالت «وتر و یک زاویه‌ی تند» هم‌نهشت بوده و در نتیجه: $AH = BK$ است.

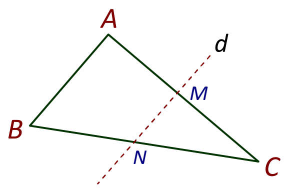
توجه کنید:

در استدلال استنتاجی بالا، حقایق شناخته شده‌ی زیر را به‌کار بردیم:

- برابری زوایای متقابل به رأس.
- هم‌نهشتی دو مثلث به حالت «وز».
- برابری اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت.

مثال: در مثلث داده شده‌ی ABC، خطی مشخص کنید که فاصله‌ی رأس‌های مثلث از آن یکسان باشد. چند خط با این شرط وجود دارد؟

پاسخ



نقاط M و N را به ترتیب وسط‌های اضلاع AC و BC در نظر گرفته و خط d گذرا از این دو نقطه را رسم می‌کنیم.

اکنون:

- چون M وسط AC است، فاصله A و C تا خط d برابر است.
- چون N وسط BC است، فاصله B و C تا خط d برابر است.

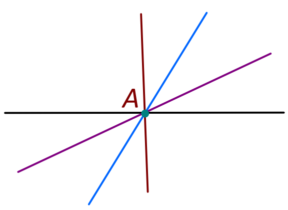
بنابراین فاصله‌ی هر سه رأس تا خط d با هم برابر خواهد شد.

توجه کنید:

می‌توان دو خط دیگر مانند d از وسط‌های AB و BC و همچنین وسط‌های AB و AC عبور داد، پس در کل سه خط با خاصیت مورد نظر وجود دارد.

در ادامه، یک مفهوم هندسی معرفی کرده و سپس نمونه‌های دیگری از استدلال استنتاجی را خواهیم دید.

خطوط هم‌رس:



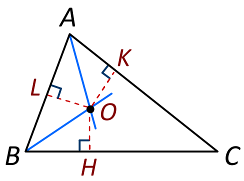
چند خط که همگی در یک نقطه چون A مشترک باشند را «**هم‌رس**» گویند:

بعلاوه: نقطه‌ی A را نقطه‌ی همرسی این خط‌ها می‌نامیم.

مثال: نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث همرس‌اند.

پاسخ

نیمسازهای زوایای $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را در مثلث دلخواه ABC رسم کرده و نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم. همچنین با رسم عمودهایی از O بر اضلاع، فاصله‌ی O تا سه ضلع به صورت OH، OK و OL مشخص می‌شوند:



اکنون توجه کنید:

- چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{A}$ است، طبق خاصیت نیمساز داریم:
$OK = OL$
- به صورت مشابه، چون O نیمساز زاویه‌ی $\hat{B}$ است، طبق خاصیت نیمساز می‌نویسیم:

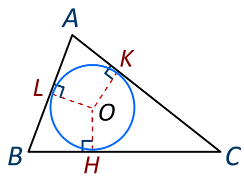
$OH = OL$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OH = OK$. یعنی فاصله‌ی O تا دو ضلع زاویه‌ی $\hat{C}$ نیز با هم برابر است و در نتیجه نقطه‌ی O روی نیمساز $\hat{C}$ نیز قرار داشته و سه نیمساز در نقطه‌ی O همرس هستند.

نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

- نقطه‌ی همرسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که:
فاصله‌ی O تا سه ضلع مثلث با هم برابر است: $OH = OK = OL$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OH باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط H، K و L عبور خواهد کرد:



توجه کنید:

این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است. (دایره‌ی محاطی مثلث)

با روشی کاملاً مشابه مثال قبل و با توجه به ویژگی عمود منصف، نشان دهید:

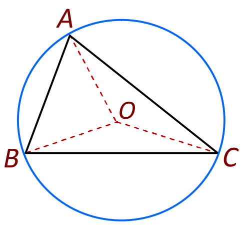
پای تخته !

۵. عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

توجه کنید:

فعالیت پاتخته قبل نیز، موارد مهم زیر را حاصل می‌کند:

- نقطه‌ی همرسی سه عمود منصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی O تا سه رأس مثلث با هم برابر است: $OA = OB = OC$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد. (دایره‌ی محیطی مثلث)



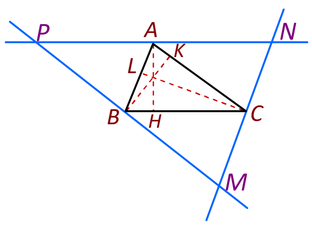
در فعالیت بعدی، به کمک شما خواهیم دید ارتفاع‌های هر مثلث نیز همرس‌اند.

پای تخته !

۶. با انجام گام‌های ساده‌ی زیر، نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث همرس‌اند.

گام ۱: مثلث ABC و ارتفاع‌های AH، BK و CL را در آن در نظر بگیرید.

گام ۲: از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبه‌رو رسم کنید تا از برخورد آن‌ها مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳: دلیلی بیاورید که نشان دهد AH بر PN، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

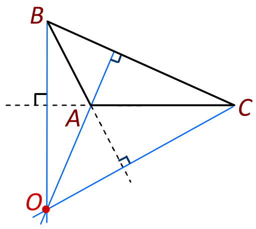
گام ۴: دلیلی بیاورید که نشان دهد چهار ضلعی‌های $ABCN$ و $ACBP$ متوازی الاضلاع هستند و نتیجه بگیرید که $AN = AP$ است و به صورت مشابه $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵: از گام‌های ۳ و ۴ نتیجه بگیرید که ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP بوده و در نتیجه همرس هستند.

توجه کنید:

بر خلاف نقطه‌ی همرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قرار دارد، نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها و عمود منصف‌های اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

نمونه:

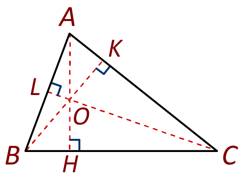


در مثلث ABC مقابل (دارای یک زاویه‌ی باز)، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل عمود شده و فقط یکی از ارتفاع‌ها بر ضلع مربوطه (BC) عمود شده است. در نتیجه، نقطه‌ی همرسی O در بیرون مثلث قرار گرفته است.

در مثال بعد، خاصیتی از نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث آورده شده است.

مثال: مثلث دلخواه ABC را با شرط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و O را نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های آن در نظر بگیرید. سپس نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث OAC را مشخص کنید.

پاسخ



با دقت به مثلث OAC نگاه کرده و سه ارتفاع را تشخیص می‌دهیم:

- پاره‌خط OK یکی از ارتفاع‌ها است که از O بر ضلع AC عمود شده است.
- پاره‌خط AL در بیرون مثلث OAC از A بر امتداد ضلع OC عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.
- به صورت مشابه؛ پاره‌خط CH در بیرون مثلث OAC از C بر امتداد ضلع OA عمود شده و ارتفاع محسوب می‌شود.

بنابراین باید نقطه‌ی برخورد خط‌های گذرنده از سه ارتفاع، یعنی OK، AL و CH به عنوان نقطه‌ی همرسی مشخص شود که مشاهده می‌کنید نقطه‌ی B خواهد بود!

پاسخ دهید (۲)

۱- نقطه‌ای درون مثلث مشخص کنید که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.

۲- نقطه‌ای مشخص کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد. آیا این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد؟

۳- در کدام نوع مثلث، نقطه‌ی همرسی نیمسازها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است؟

۴- نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر را دقیقاً مشخص کنید.
نتیجه‌ی حل این تمرین چیست؟

۳ قضایای شرطی

در این بخش، روش بیان دقیق‌تر مفاهیم و احکام هندسی را می‌بینیم. در واقع با بیان احکام به صورت شرطی، با مطالب جدید و بسیار مهمی آشنا خواهیم شد.

گزاره:

در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک **«گزاره»** گویند.

- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی **«ساده»** گوئیم.
- اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی **«مرکب»** گویند.

برای نمونه؛

- عبارت «عدد ۷ سومین عدد اول است.» یک گزاره‌ی ساده است.
- عبارت «عدد ۷ چهارمین عدد اول و $-\frac{۳}{۲}$ عددی گنگ است.» یک گزاره‌ی مرکب است.

بعلاوه؛

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو مسیر زیر دنبال گردد:

الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، **«برهان»** هم گفته می‌شود.

مانند: همرس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث که در بخش قبل دیدیم. بویژه، در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند:

قضیه:

در هندسه، گزاره‌هایی مهم که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، **«قضیه»** نامیده می‌شوند. بنابراین:

قضیه: گزاره‌ی کلی و مهمی است که همیشه درست باشد.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن مثال نقض بیاوریم. (آشنایی با مثال نقض در انتهای فصل)

برای بیان واضح‌تر یک قضیه یا یک گزاره، با تعیین فرض و حکم، آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم:

گزاره‌ی شرطی:

می‌توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد که در این صورت به آن **«گزاره شرطی»** گویند:

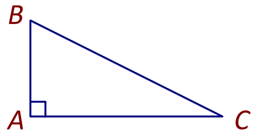
اگر فرض، آنگاه حکم

بویژه:

اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن **«قضیه شرطی»** گفته می‌شود.

برای نمونه؛

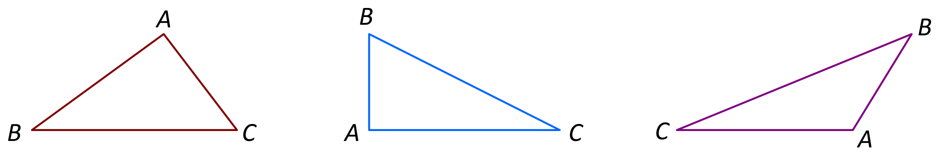
قضیه فیثاغورس به‌صورت شرطی چنین است:



اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲}$ است.

مورد بعدی، بیان و اثبات یک قضیه‌ی شرطی است که از مشاهدات چندباره‌ی زیر حاصل شده است.

در تمام مثلث‌های رسم شده، ضلع و زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث روبه‌روی هم قرار دارند. ($\hat{A}$ زاویه و BC ضلع بزرگ‌تر است.)



بنابراین، حکم قضیه به روش استقرایی نوشته شده؛ ولی برای تایید قطعی آن از استدلال استنتاجی استفاده خواهیم کرد.

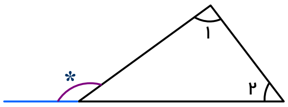
یادآوری:

دو خاصیت مورد نیاز در مثلث‌ها:

- در مثلث متساوی‌الساقین، زوایای پای ساق‌ها (مجاور قاعده) با هم برابرند.
- در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور.

یعنی:

$* = \hat{۱} + \hat{۲}$



قضیه:

«مثلثی با دو ضلع نابرابر در نظر بگیرید. در این‌صورت زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر.» این قضیه را به صورت شرطی نوشته و ثابت کنید.

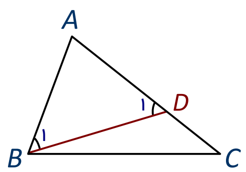
پاسخ

توجه کنید:

برای بیان راحت‌تر، می‌توانید از شکل و نمادهای ریاضی در بیان شرطی قضایا بهره ببرید.

بنابراین، گزاره‌ی داده شده به صورت شرطی چنین است:

اگر در مثلث ABC مقابل $AC > AB$ باشد، آنگاه $\hat{B} > \hat{C}$ است.



برهان:

چون $AC > AB$ است، می‌توان نقطه‌ی D را روی ضلع AC طوری انتخاب کرد که $AB = AD$ باشد.

- بنابر انتخاب نقطه‌ی D، مثلث ABD متساوی الساقین بوده و در نتیجه $\hat{B}_1 = \hat{D}_1$ است. از طرفی زاویه‌ی $\hat{B}_1$ جزئی از زاویه‌ی اصلی $\hat{B}$ بوده و در نتیجه $\hat{B} > \hat{B}_1$ است. لذا:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{B}_1 \\ \hat{B}_1 = \hat{D}_1\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{D}_1$$

- از طرف دیگر، زاویه‌ی $\hat{D}_1$ برای مثلث DBC یک زاویه‌ی خارجی محسوب شده و لذا از زاویه‌ی داخلی غیر مجاور خود، یعنی $\hat{C}$ بزرگ‌تر است. در نتیجه:

$$\left.\begin{array}{l}\hat{B} > \hat{D}_1 \\ \hat{D}_1 > \hat{C}\end{array}\right\} \Rightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

برای بیان یک تکنیک مهم اثبات، به مفهوم زیر نیاز داریم.

نقیض گزاره:

هرگاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض گزاره به‌دست می‌آید.

توجه کنید:

با نقیض کردن یک گزاره، حکم دقیقاً برعکس می‌شود. بنابراین:

اگر گزاره درست باشد، نقیض آن نادرست و اگر گزاره نادرست باشد، نقیض آن درست خواهد بود.

برای نمونه، یک گزاره و نقیض آن را ببینید:

- **گزاره:** امروز هوا گرم است.
- **نقیض:** چنین نیست که امروز هوا گرم است.

البته می‌توان نقیض را به صورت ساده‌تر زیر هم بیان کرد:

امروز هوا گرم نیست!

مثال: نقیض هر گزاره را بنویسید.

الف) a عددی مثبت است.

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

پ) $(-1)^2 < 1^2$. سپس ارزش گزاره و نقیض آن را مقایسه کنید.

پاسخ

الف) می‌توانیم بگوئیم: « a عددی مثبت نیست»، ولی عبارت زیر بهتر است:

a کوچک‌تر یا مساوی صفر است.

ب) می‌توانیم بگوئیم: «چنین نیست که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° باشد.» ولی عبارت زیر واضح‌تر است:

مثلثی وجود دارد که مجموع زوایای داخلی آن 180° نباشد.

پ) می‌توانیم بگوئیم: $1^2 \not< (-1)^2$. ولی عبارت $1^2 \geq (-1)^2$ واضح‌تر است. توجه:

گزاره‌ی $\underbrace{1^2}_{1} < \underbrace{(-1)^2}_{1}$ نادرست بوده و نقیض آن $\underbrace{1^2}_{1} \geq \underbrace{(-1)^2}_{1}$ درست است.

بیان روش دیگری برای استدلال:

گاهی ارائه‌ی استدلال استنتاجی به صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در این مواقع، معمولاً روش اثبات غیر مستقیم به صورت زیر، کمک بسیار زیادی می‌کند:

بُرهان خُلف:

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، **«فرض خلف»** هم می‌گویند.
- با توجه به فرضِ مرحله‌ی قبل و آوردن دلایلی مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله و یا حقایق شناخته شده می‌رسیم.

نتیجه می‌گیریم:

حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: فرض و حکم ادعای زیر را مشخص کرده و آن را ثابت کنید.

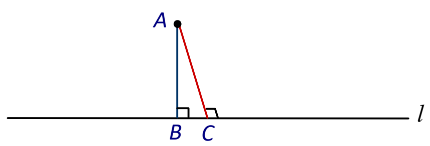
از یک نقطه غیر واقع بر خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

پاسخ

فرض: نقطه‌ی A خارج خط l قرار دارد. **حکم:** از A نمی‌توان بیش از یک خط عمود بر l رسم کرد.

با برهان خلف:

فرض کنید از نقطه‌ی A دو عمود AB و AC را بر خط l رسم کرده باشیم:



یعنی مثلث ABC دو زاویه‌ی 90° داشته و چون اندازه‌ی $\hat{A}$ عددی مثبت است، جمع زوایای مثلث از 180° بیشتر خواهد شد که یک تناقض است. پس:

فرض خلف باطل شده و حکم اثبات می‌شود.

مثال: نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه‌ی باز دارد.

پاسخ

با برهان خلف:

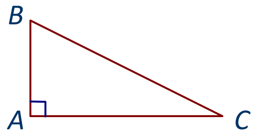
فرض کنید یک مثلث ABC وجود داشته باشد که در آن بیش از یک زاویه‌ی باز داشته باشیم؛ مثلاً $\hat{A}>90^\circ$ و $\hat{B}>90^\circ$. در این صورت:

$$\hat{A}+\hat{B}>90^\circ+90^\circ \Rightarrow \hat{A}+\hat{B}>180^\circ$$

چون $\hat{C}$ عددی مثبت است، از نامساوی بالا داریم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}>180^\circ$. اما در مورد مجموع زوایای مثلث می‌دانیم: $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ و بنابراین نامساوی قبل یک تناقض است. **(حکم اثبات شد.)**

در هندسه، بررسی عکس (برعکس) قضیه‌ها هم انجام می‌شود و معمولاً مفید است بدانیم آیا عکس آن‌ها هم صحیح است؟

برای نمونه؛ در قضیه‌ی فیثاغورس می‌دانیم:



اگر $\hat{A}=90^\circ$ باشد، آنگاه $BC^2=AB^2+AC^2$ است.

علاقه‌مندیم بدانیم:

در صورتی که در مثلث دلخواه ABC تساوی $BC^2=AB^2+AC^2$ برقرار باشد، آیا قطعاً $\hat{A}=90^\circ$ است؟

(جهت اطلاع بدانید که این حکم درست است.)

بیان دقیق موضوع بالا و بررسی چند نمونه:

عکس قضیه‌ی شرطی:

برای نوشتن عکس یک گزاره یا قضیه‌ی شرطی، جای (نقش) فرض و حکم را عوض می‌کنیم.

یعنی:

اگر حکم، آنگاه فرض

توجه کنید:

عکس یك قضیه شرطی ممکن است یك قضیه نباشد، یعنی ممکن است ادعایی نادرست شود!

مثال: اولاً: حکم زیر را به صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟

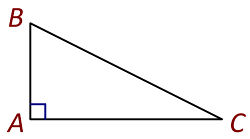
در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است.

ثانیاً: عکس این حکم به صورت شرطی نوشته و مشخص کنید درست یا نادرست است.

پاسخ

اولاً: بیان شرطی حکم با استفاده از شکل چنین است:

اگر مثلث ABC زیر قائم‌الزاویه باشد $\hat{A}=90^\circ$،



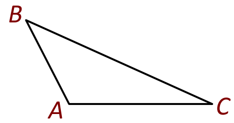
آنگاه وتر BC از دو ضلع AB و AC بزرگ‌تر است.

می‌دانیم که این حکم درست است.

ثانیاً: عکس گزاره با تعویض جای فرض و حکم:

اگر در مثلث ABC ضلع BC از AB و AC بزرگ‌تر باشد، آنگاه مثلث قائم‌الزاویه است.

این گزاره نادرست است و می‌توانیم برای آن مثال نقض بیاوریم:



نوبت شماست . . .

پای تخته !

۷. عکس گزاره‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و توسط برهان خلف ثابت کنید:

در هر مثلث، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.

توجه!

فعالیت بالا، یک سؤال (نهایی- خرداد ۱۴۰۳) بوده است.

قضیه‌هایی که عکس آن‌ها هم درست است، در ریاضیات اهمیت فراوانی دارند.

قضیه‌ی دوشرطی:

هر گاه عکس یک قضیه شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می‌توان به صورت دوشرطی بیان کرد:

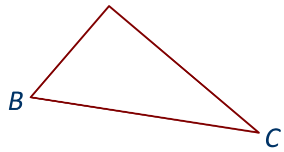
فرض اگر و فقط اگر حکم

نمونه‌ها:

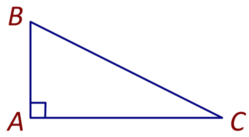
۱) کمی پیش‌تر قضیه‌ای در مورد اندازه‌ی زاویه‌ها و ضلع‌های روبه‌روی آن‌ها در مثلث بیان کردیم و دیدیم که عکس آن هم درست است. بیان دو شرطی آن چنین است:

در مثلث ABC، $AC > AB$ است اگر و فقط اگر $\hat{B} > \hat{C}$.

می‌توانید آن را به صورت نمادین بنویسید:



$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$



۲) چون عکس قضیه‌ی فیثاغورس صحیح است، می‌توان آن را به صورت دو شرطی بیان کرد:

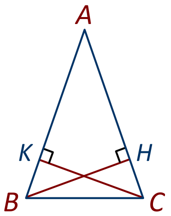
مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

یا به صورت نمادین:

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با هم برابر باشند.

پاسخ



اولاً: (⇐) فرض و حکم چنین هستند:

فرض: $AB = AC$

حکم: $BH = CK$

برهان:

دو مثلث قائم الزاویه‌ی AHB و AKC به حالت «وز» هم‌نهشت هستند و در نتیجه $BH = CK$ است.

ثانیاً: (⇒) فرض و حکم چنین هستند:

فرض: $BH = CK$ — **حکم:** $AB = AC$

برهان:

دو مثلث قائم الزاویه‌ی BHC و CKB به حالت «وض» هم‌نهشت هستند و در نتیجه $A\hat{B}C = A\hat{C}B$ است؛ یعنی در مثلث ABC داریم: $\hat{B} = \hat{C}$ و بنابراین $AB = AC$ خواهد شد.

توجه کنید:

چون خود گزاره و عکس آن هر دو اثبات شدند، گزاره‌ی دو شرطی اثبات گردیده است.

در پایان این فصل، اثبات نادرست بودن احکام آورده شده که معمولاً کار نسبتاً ساده‌ای است.

مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی **«مثال نقض»** گفته می‌شود.

مثال: برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) اگر $x^2 > 4$ باشد، در این صورت $x > 2$ است.

ب) نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

پاسخ

الف) عدد $x=-۳$ را در نظر بگیرید. مشاهده می‌کنید که $(-۳)^۲ = ۹ > ۴$ صحیح بوده ولی -۳ بزرگ‌تر از ۲ نیست و بنابراین حکم نادرست است.

ب) کافی است مثلثی با یک زاویه‌ی باز (مانند نکته و مثال قبل) را به عنوان مثال نقض در نظر بگیرید؛ زیرا نقطه‌ی همرسی ارتفاع‌ها خارج مثلث قرار می‌گیرد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

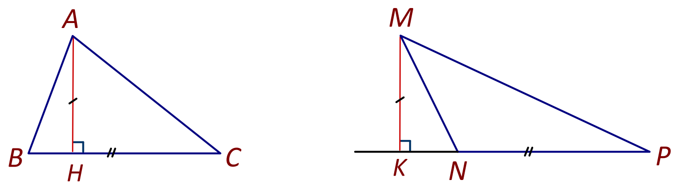
آیا گزاره‌ی زیر درست است؟ چرا؟

هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

پاسخ

نادرست است؛ به دلیل وجود مثال نقض:

مثلث‌های ABC و MNP در زیر، قاعده و ارتفاع برابر داشته، پس مساحت‌های برابر دارند:



ولی زوایای دو مثلث یکسان نبوده و نمی‌توانند هم‌نهشت باشند.

با دقت، نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته !

۸. برای حکم کلی زیر مثال نقض بیاورید:

هر چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی الاضلاع است.

مطلب پایانی:

هر گاه در جستجوی مثال نقض برای رد یک حکم کلی موفق نشویم؛

نمی‌توانیم درستی حکم را نتیجه بگیریم.

زیرا ممکن است اطلاعات ما محدود باشد. بنابراین تایید حکم فقط از طریق استدلال استنتاجی قطعی خواهد بود.

پاسخ دهید (۳)

۱- مشخص کنید کدام مورد درست و کدام نادرست است. برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید.

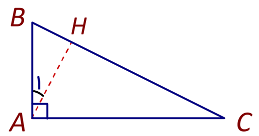
- هر مثلث متساوی الساقین یک مثلث متساوی الاضلاع است.
- هر مثلث متساوی الاضلاع یک مثلث متساوی الساقین است.
- هر لوزی یک متوازی الاضلاع است.
- توان سوم هر عدد بزرگ‌تر از توان دوم آن عدد است.
- جذر یک عدد از خود آن عدد کوچک‌تر است.

۲- برای دو مجموعه‌ی A و B، یا $A \subseteq B$ و یا $B \subseteq A$ است. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

۳- نقیض هر مورد را به صورت روان بنویسید:

- عدد a بزرگ‌تر از عدد b است.
- عدد ۱۳ زوج است.
- تساوی $x - ۳ = ۵$ برقرار است.

۴- در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه و $\hat{C} \neq \hat{A}_1$ است.



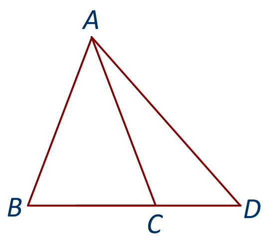
توسط برهان خلف نشان دهید AH نمی‌تواند ارتفاع مثلث باشد.

۵- ثابت کنید: اگر یکی از میانه‌های مثلث، نیمساز زاویه‌ی متناظر خود باشد، آن مثلث متساوی الساقین است.

۶- قضیه‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را هم به صورت شرطی بنویسید. آیا این قضیه دوشرطی محسوب می‌شود؟ چرا؟

هر دو زاویه‌ی قائمه مکمل هستند.

۷- در شکل زیر $AB = AC$ است و نقطه‌ی D بیرون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید: $AB < AD$.



۸- کدام مورد را می‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان کرد؟ در صورت امکان به صورت دوشرطی بنویسید:

- هر مثلث با دو ضلع برابر، دو زاویه‌ی برابر دارد.

- هر مربع یک مستطیل است.
- نقطه‌ی همرسی نیمسازها درون مثلث قرار دارد.

منتخب کتاب:

۱- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید:

الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از ۴ برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.

ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۲- می‌دانیم از یک نقطه خارج از یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید: خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

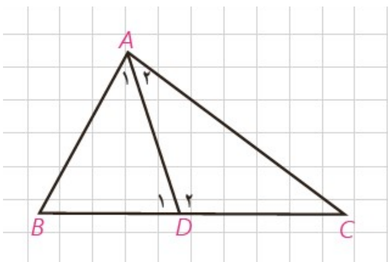
۳- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.

ب) اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.

پ) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۴- فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه‌ی نهایی را که در پایان آمده است، کامل کنید.



الف) $\hat{D}_2 > \hat{A}_1$، زیرا ....

ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$، زیرا ....

پ) $AC > DC$، زیرا ....

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$.

ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$.

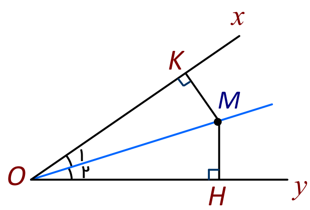
نتیجه:

در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی ....، .... است.

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

۱- فرض کنید $MH = MK$ باشد.



در این صورت دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت خواهند بود:

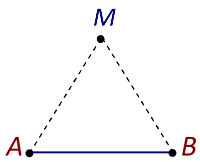
$$\left.\begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MK \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{OMH} \cong \overset{\Delta}{OMK}$$

از این هم‌نهشتی برابری اجزای نظیر نتیجه می‌شود؛ از جمله:

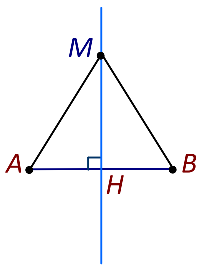
$$\hat{O}_۱ = \hat{O}_۲$$

یعنی: نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۲- فرض کنید بدانیم $MA = MB$ است.



از نقطه‌ی M خطی بر AB عمود می‌کنیم و می‌بینیم دو مثلث قائم‌الزاویـه‌ی $\overset{\Delta}{MAH}$ و $\overset{\Delta}{MBH}$ هم‌نهشت هستند:

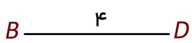


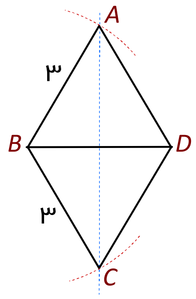
$$\left.\begin{array}{l} MH = MH \\ MA = MB \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \overset{\Delta}{MAH} \cong \overset{\Delta}{MBH}$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $AH = HB$ است و بنابراین خط گذرا از M و H عمود منصف بوده و M روی آن قرار دارد.

۳- با توجه به این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

- پاره‌خط BD را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.

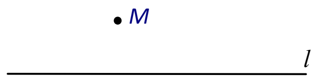




- طبق روش جزوه، عمود منصف این پاره‌خط را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.
- چون طول اضلاع لوزی ۳ سانتی‌متر است، به مرکز B و شعاع ۳ کمان‌هایی می‌زنیم تا عمود منصف را در نقاط A و C قطع کند.

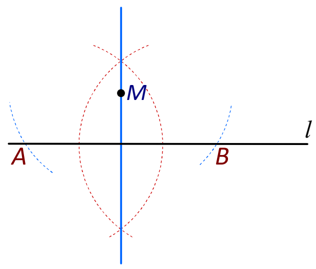
در پایان نقاط را با خط‌کش به هم وصل کرده تا لوزی رسم شود.

۴- فرض کنید نقطه‌ی M خارج خط l داده شده است.



گام ۱: به مرکز M و شعاعی بیشتر از فاصله‌ی نقطه تا خط، کمانی می‌زنیم تا خط را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند.

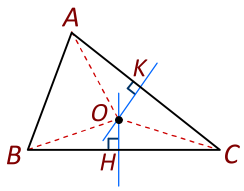
گام ۲: اکنون کافی است عمود منصف AB رسم شود.



توجه کنید: چون A و B روی دایره به مرکز M قرار دارند، $MA = MB$ است و در نتیجه طبق خاصیت اصلی عمود منصف، نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد.

پس: عمود منصف رسم شده همان خط مورد نظر است که از M گذشته و بر خط عمود شده است.

۵- مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، عمود منصف‌های دو ضلع AC و BC را رسم کرده، نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم و این نقطه را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم:



اکنون توجه کنید:

- چون O روی عمود منصف AC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OA = OC$$

- به صورت مشابه، چون O روی عمود منصف BC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OB = OC$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OA = OB$. یعنی فاصله‌ی O تا دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است و بنابراین:

نقطه‌ی O روی عمود منصف AB نیز قرار داشته و سه عمود منصف در نقطه‌ی O همرس هستند.

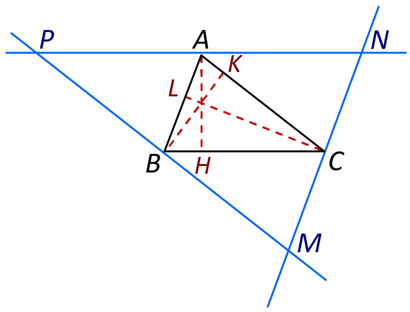
۶- به هر یک از گام‌ها توجه کنید:

گام ۱:

مثلث ABC و سه ارتفاع آن را رسم می‌کنیم.

گام ۲:

از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبه‌رو رسم کرده تا مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳:

بسیار ساده: چون PN با BC موازی است و AH بر BC عمود است، پس AH بر PN نیز عمود خواهد بود. با استدلال مشابه، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

گام ۴:

بسیار ساده: چون با موازی و با موازی هستند، چهار ضلعی‌های $ABCN$ متوازی الاضلاع است. پس طبق خواص متوازی الاضلاع (جزوه شماره صفر) ضلع‌های روبه‌رو برابرند:

$$BC = AN$$

با استدلال مشابه چهارضلعی $ACBP$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه:

$$BC = AP$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $AN = AP$ است. به صورت کاملاً مشابه، تساوی‌های $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵:

از گام‌های ۳ و ۴، AH هم بر PN عمود است و هم آن را نصف کرده است و لذا AH عمود منصف PN است. به صورت مشابه، BK عمود منصف PM و CL عمود منصف MN است. یعنی:

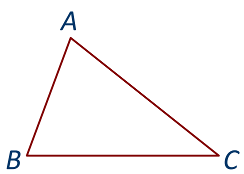
ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP هستند و چون عمود منصف‌ها همرس‌اند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC همرس هستند.

۷- بیان ساده‌ی عکس حکم چنین است:

در یک مثلث، ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر.

به صورت شرطی و با استفاده از شکل:

اگر در مثلث ABC مقابل $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آنگاه $AC > AB$ است.



برهان خلف:

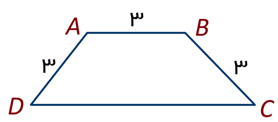
حکم $AC > AB$ را نادرست در نظر می‌گیریم، بنابراین دو حالت می‌تواند رخ دهد:

$AC = AB$ و $AC < AB$ که نشان می‌دهیم هیچ‌کدام ممکن نیستند:

- **حالت ۱:** اگر $AC = AB$ باشد، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و در نتیجه طبق خواص این نوع مثلث $\hat{B} = \hat{C}$ است. این مطلب با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.
- **حالت ۲:** اگر $AC < AB$ باشد، طبق مثال در درس باید زاویه‌ی روبه‌رو به AB از زاویه‌ی روبه‌رو به AC بزرگ‌تر باشد، یعنی: $\hat{C} > \hat{B}$. این مطلب نیز با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.

پس در هر صورت فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۸- کافی است یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین در نظر بگیرید که اندازه‌ی ساق‌ها برابر قاعده‌ی کوچک باشد:



در این چهارضلعی $AD = BC$ و $AB \| DC$ است، ولی این شکل متوازی الاضلاع نیست.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴