آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

هندسه یازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰



محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

۱

دایــره (۱) ۲

معرفی دایره و مفاهیم مقدماتی مربوط به آن، انواع زوایا و کمان ها در دایره و بررسی خواص آن‌ها

۲

دایــره (۲) ۲۴

بیان و بررسی چند رابطه طولی در دایره، بررسی چند ضلعی محاطی و برخی خواص آن، بررسی چند ضلعی محیطی و برخی خواص آن

۳

تبدیلات هندسی ۵۴

مفاهیم مربوطه و معرفی تبدیل هندسی، بررسی کامل تبدیلات: بازتاب، انتقال، دوران و تجانس

۴

کاربرد تبدیلات ۸۵

کاربردهایی ساده از بازتاب، کاربردهایی مهم از تبدیلات و بررسی چند حالت در مسأله کوتاه‌ترین مسیر

۵

روابط طولی در مثلث ۱۰۱

بررسی چند رابطه طولی: قضیه سینوس-ها، قضیه کسینوس‌ها، روابط طولی نیمساز، دستورات هِرون

آموزش:

هندسه یازدهم

۲

دایره (۲)

فهرست	صفحه
▪ روابط طولی در دایره	۲۵
▪ چند ضلعی محاطی	۳۸
▪ چند ضلعی محیطی	۴۴

۱ روابط طولی در دایره

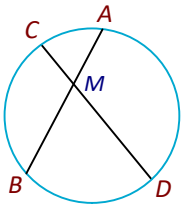
ارتباط بین طول وترها یا قطعات آن‌ها و مماس‌های رسم شده بر دایره با یکدیگر یا با اجزای دایره را در این بخش بررسی می‌کنیم. در مورد وترها:

قضیه:

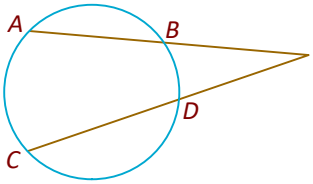
هرگاه وترهای AB و CD (مانند شکل‌های زیر) یکدیگر را در نقطه‌ای چون M داخل دایره (یا امتدادهای آن‌ها خارج دایره) قطع کنند، در هر دو حالت داریم:

$$MA \cdot MB = MC \cdot MD$$

«برخورد داخل دایره»

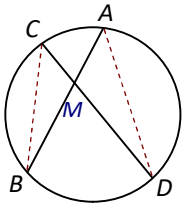


«برخورد داخل دایره»



برهان

در شکل سمت راست، اگر وترهای BC و AD را رسم کنیم؛



مثلث‌های MAD و MBC به حالت (ز ز) متشابه هستند. (چرا؟)

بنابراین:

$$\frac{MA}{MC} = \frac{MD}{MB} \Rightarrow MA \times MB = MC \times MD$$

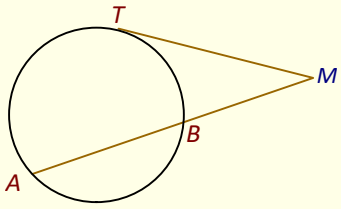
(در شکل سمت چپ بالا نیز کافی است وترهای BC و AD را رسم کرده و مانند حالت قبل عمل کنید.)

رابطه‌ی طولی حاصل از برخورد امتداد یک وتر و خطی مماس بر دایره را چنین بیان می‌کنیم:

قضیه:

فرض کنید طبق شکل مقابل، M نقطه‌ای خارج دایره بوده و از آن مماس و قاطعی بر دایره رسم کنیم. در این صورت مجذور طول مماس برابر حاصل‌ضرب قطعات MA و MB از قاطع است:

$$MA \cdot MB = (MT)^2$$



به بیان دیگر:

MT واسطه‌ی هندسی بین MA و MB است.

برهان

کافی است وترهای AT و BT را رسم کرده و تشابه مثلث‌های MTA و MTB بنویسیم:

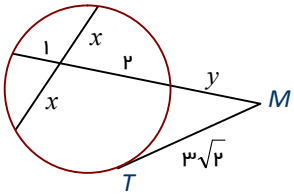
$$\frac{MA}{MT}=\frac{MT}{MB} \rightarrow MA\times MB=MT\times MT \Rightarrow MT^{۲}=MA\times MB$$

(بیان جزئیات بیشتر بر عهده دانش‌آموز!)

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در شکل مقابل مقادیر x و y را حساب کنید.

(MT به طول $۳\sqrt{۲}$ مماس بر دایره است.)



پاسخ

ابتدا مقدار x را مشخص می‌کنیم:

$$x\times x=۱\times ۲ \rightarrow x^{۲}=۲ \Rightarrow x=\sqrt{۲}$$

اکنون با توجه به تقاطع امتداد وتر و خط مماس:

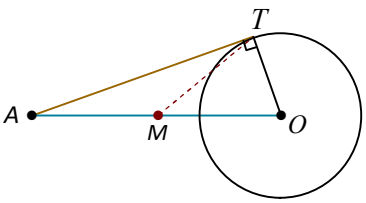
$$(۳\sqrt{۲})^{۲}=y(y+۲+۱) \rightarrow ۹\times ۲=y^{۲}+۳y \rightarrow y^{۲}+۳y-۱۸=۰$$
$$\rightarrow (y+۶)(y-۳)=۰ \xrightarrow{y>۰} y=۳$$

در ادامه، روش ترسیم خط مماس بر دایره از نقطه‌ای خارج آن را خواهیم دید.

سؤال:

اگر نقطه‌ی A خارج یک دایره داده شود، چه چیزی را باید معلوم کنیم تا توسط آن مماس از A بر دایره قابل رسم شود؟

با در نظر داشتن پاسخ سؤال قبل، فرض کنید AT طبق شکل بر دایره‌ی $C(O,r)$ مماس باشد:



می‌دانیم:

$AT\perp OT$، یعنی مثلث ATO قائم‌الزاویه است. (چرا؟!) اگر M را نقطه‌ی وسط وتر AO در مثلث بگیریم، برابری زیر برقرار است: (چرا؟!)

$$AM=MT=MO$$

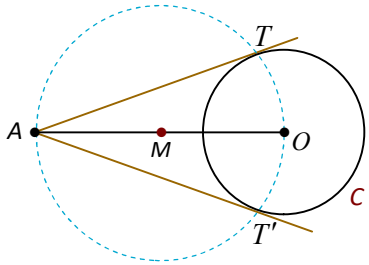
نتیجه:

اگر به مرکز M و شعاع $AM=\frac{AO}{۲}$ دایره‌ای رسم شود، ضرورتاً از T عبور خواهد کرد.

طبق آن‌چه در بالا دیدیم:

ترسیم خط مماس بر دایره:

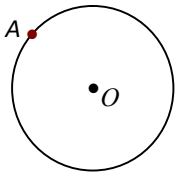
فرض کنید نقطه‌ی A خارج دایره‌ی $C(O,r)$ باشد. با روش زیر همواره دو مماس از A بر دایره رسم می‌شود:



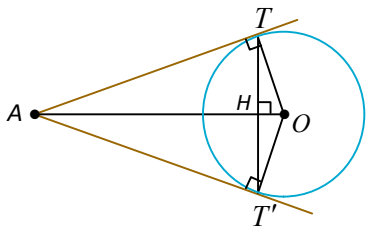
- نقطه‌ی A را بـه O وصـل کـرده و نقطـه‌ی M وسـط AO را مشخص می‌کنیم. **(چگونه؟)**
- به مرکز M و شعاع AM دایره‌ای رسم می‌کنیم (یعنی: دایـره‌ای به قطر AO). این دایره، دایره‌ی اولیه را در نقاطی چون T و T' قطع می‌کند.
- خط‌های AT و AT' بر دایره‌ی C مماس هستند.

سؤال:

اگر نقطه‌ی A روی دایره واقع باشد، چه تعداد خط مماس بر دایره و گذرا از A وجود دارد و روش ترسیم چگونه است؟



مثال: مماس‌های AT و AT' رسم شده از نقطه‌ی A خارج دایره‌ی $C(O,r)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:



الف) طول‌های دو مماس با هم برابر است.

ب) AO نیمساز زوایای $T\hat{A}T'$ و $T\hat{O}T'$ است.

پ) AO عمود منصف وتر TT' است.

پاسخ

دو مثلث قائم‌الزاویه AOT و AOT' طبق حالت (وتر) هم‌نهشت هستند:

$$OT = OT' = r \quad و \quad AO = AO$$

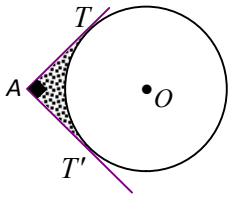
بنابراین:

الف) طبق هم‌نهشتی بالا، $AT = AT'$ است.

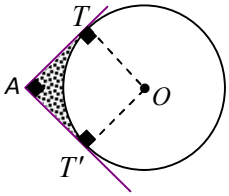
ب) طبق هم‌نهشتی بالا داریم: $T\hat{A}O = T'\hat{A}O$ و همچنین: $T\hat{O}A = T'\hat{O}A$.

پ) طبق موارد قبل، مثلث TAT' متساوی‌الساقین بوده و AH نیمساز زاویه‌ی رأس آن است، بنابراین AH خود به خود عمود منصف ضلع مقابل، یعنی TT' هم هست.

مثال: مطابق شکل، دو مماس عمود بر هم بر دایره‌ی $C(O,۳)$ رسم شده است. مساحت قسمت سایه‌دار را حساب کنید.



پاسخ



با رسم شعاع‌های OT و OT'، چهارضلعی $OTAT'$ دارای سه زاویه‌ی قائمه خواهد بود؛ پس زاویه‌ی چهارم هم ۹۰° بوده و شکل مستطیل است. از طرفی، دو ضلع مجاور OT و OT' برابرند، پس شکل مربعی به ضلع $r=۳$ می‌باشد.

مساحت هاشور خورده، دقیقاً اختلاف مساحت مربع با یک چهارم از مساحت دایره است:

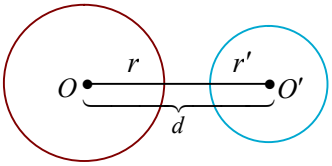
$$S = ۳^۲ - \frac{۱}{۴}\pi \times ۳^۲ = ۹(۱ - \frac{۱}{۴}\pi) = \frac{۹(۴-\pi)}{۴}$$

وضع نسبی دو دایره:

دو دایره‌ی $C(O,r)$ و $C(O',r')$ را با فرض $r \geq r'$ در نظر بگیرید. وضعیت دایره‌ها به مقدار $d = OO'$ (به خط OO' خط المرکزین دو دایره هم گفته می‌شود.) و اندازه‌ی شعاع‌ها بستگی دارد:

- **حالت ۱:**

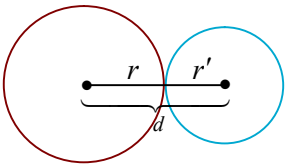
اگر $d > r + r'$ باشد، دایره‌ها از هم جدا (متخارج) هستند:



با کوچک‌تر شدن d، حالت‌های دیگر اتفاق می‌افتند:

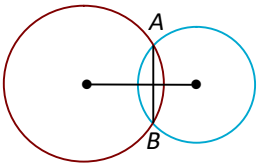
- **حالت ۲:**

اگر $d = r + r'$ باشد، دایره‌ها از بیرون بر هم مماس هستند:



- **حالت ۳ :**

فرض کنید $r - r' < d < r + r'$ باشد. در این صورت دایره‌ها در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند:

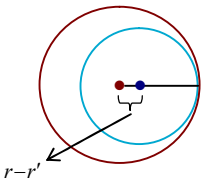


به پاره‌خط AB وتر مشترک دو دایره گفته می‌شود. (چرا خط المرکزین عمود منصف AB است؟)

راهنمایی:
مراکز دایره‌ها را به A و B وصل کرده و هم‌نهشتی مثلث‌های بزرگ بالا و پایین را به‌کار ببرید.

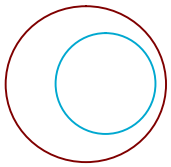
حالت ۴ :

اگر $d = r - r'$ باشد، دایره‌ها از درون بر هم مماس هستند:

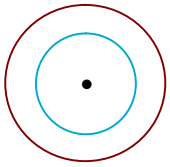


- **حالت ۵ :**

اگر $d < r - r'$ دایره‌ی کوچک‌تر داخل دایره‌ی بزرگ‌تر قرار خواهد گرفت. (دایره‌های متداخل):



بویژه:
اگر $d = 0$ باشد، دایره‌ها متداخل و هم مرکز هستند:
و اگر شعاع‌ها یکسان باشند، دو دایره منطبق خواهند بود.



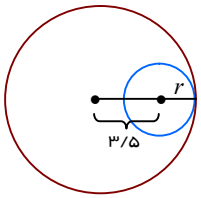
مثال: دو دایرهٔ $C(O,5)$ و $C(O',2)$ در یک صفحه قرار دارند. اگر $OO' = 2$ باشد، وضع دو دایره چگونه است؟

پاسخ

حالت $d < r - r'$ برقرار است ($2 < 5 - 2$)، پس دایره‌ها متداخل هستند.

مثال: طول خط‌المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی $3/5$ سانتی‌متر و مساحت ناحیه محدود بین آن‌ها 21π سانتی‌متر مربع است. شعاع دایره‌ی کوچک‌تر را بیابید.

پاسخ



طبق شکل باید داشته باشیم:

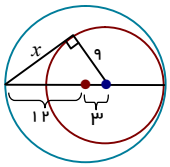
$$\pi(r+3/5)^2 - \pi r^2 = 21\pi \xrightarrow{\div\pi} 7r + 12/25 = 21$$

$$\Rightarrow r = \frac{8/75}{7} = 1/25$$

مثال: دو دایره به شعاع‌های ۹ و ۱۲ مماس درون هستند. طول بزرگ‌ترین مماس بر دایره کوچک‌تر که یک سر آن بر روی دایره‌ی بزرگ‌تر و سر دیگر آن (نقطه‌ی تماس) بر روی دایره‌ی کوچک‌تر باشد را بیابید.

پاسخ

بزرگ‌ترین مماس وقتی رسم می‌شود که از یک سر قطر مشترک آن‌ها در خارج دایره‌ی کوچک‌تر رسم شود:



با توجه به شکل، رابطه‌ی فیثاغورس را به‌کار می‌بریم:

$$x^2+9^2=15^2 \Rightarrow x=\sqrt{225-81}=\sqrt{144}=12$$

در ادامه مماس مشترک‌های بین دو دایره معرفی و بررسی می‌شوند.

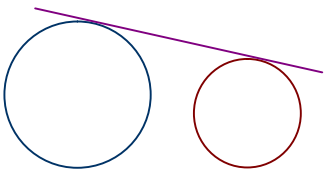
مماس مشترک:

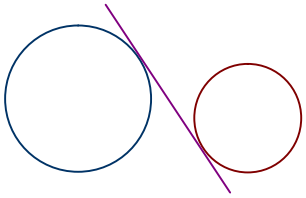
هر خطی که بر هر دو دایره‌ی مفروض مماس باشد، یک «**مماس مشترک**» آن دو دایره محسوب می‌شود.

بعلاوه:

- اگر دو دایره در یک سمت خط مماس باشند، آن را مماس مشترک **خارجی** دو دایره گویند.
- اگر دایره‌ها در دو طرف خط مماس باشند، به آن مماس مشترک **داخلی** دو دایره گفته می‌شود.

شکل‌های مربوطه:


مماس مشترک
خارجی


مماس مشترک
داخلی

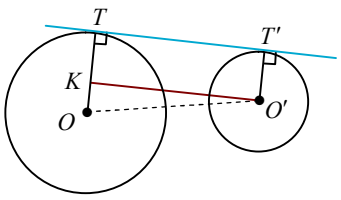
وضعیت مماس مشترک‌ها، روش رسم آن‌ها و برخی خواص:

الف) مماس مشترک‌های خارجی:

دایره‌های متخارج $C(O,r)$ و $C(O',r')$ با فرض $r\geq r'$ را در نظر بگیرید. در گام‌های زیر، روش رسم و طول آن‌ها را مشخص خواهیم کرد.

گام ۱:

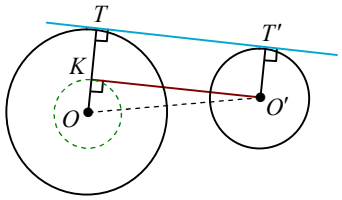
موقتاً فرض کنید مماس مشترک خارجی TT' برای این دو دایره را داشته باشیم. طبق شکل، از O' خطی موازی TT' رسم می‌کنیم تا شعاع OT را در نقطه‌ای چون K قطع کند:



در این صورت چهارضلعی $O'KTT'$ مستطیل است. (زیرا: سه زاویه‌ی قائمه داشته و اجباراً زاویه‌ی چهارم هم ۹۰° است؛ **توضیح دهید!**) پس $\hat{K}=۹۰^\circ$ و $OK=r-r'$ است.

گام ۲:

با توجه به $\hat{K}=۹۰^\circ$، اگر به مرکز O و شعاع $OK=r-r'$ دایره‌ای رسم شود، از K عبور کرده و $O'K$ بر این دایره در نقطه‌ی K مماس خواهد شد:



گام ۳: (روش رسم و کسب اطلاعات)

اکنون فرض کنید دایره‌های $C(O,r)$ و $C(O',r')$ داده شده و مماس مشترک TT' را نداریم. برای رسم:

۱) به مرکز O و شعاع $r-r'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم.

۲) از O' مماسی بر دایره‌ی جدید رسم می‌کنیم تا نقطه‌ی K معلوم شود.

۳) خط‌هایی عمود بر $O'K$ در نقاط O' و K رسم می‌کنیم تا دایره‌ها را به ترتیب در T' و T قطع کنند.

در این صورت:

خط TT' مماس مشترک خارجی مورد نظر است!

طول مماس مشترک:

طول مماس مشترک خارجی همواره برابر است با:

$$TT'=\sqrt{d^۲-(r-r')^۲}$$

زیرا:

$$\overset{\Delta}{OKO'}: \underbrace{OK}_{r-r'}{}^۲+O'K^۲=\underbrace{O'O}_{d}{}^۲ \xrightarrow{O'K=TT'} TT'=\sqrt{d^۲-(r-r')^۲}$$

(ضمناً: اگر رسم را توسط مماس دیگر از O' بر دایره‌ی جدید پیش ببریم، مماس مشترک دوم دو دایره در قسمت پایینی شکل فوق رسم خواهد شد؛ طول آن هم $\sqrt{d^۲-(r-r')^۲}$ حاصل می‌شود.)

توجه کنید:

در صورتی که دایره‌های اولیه مماس بیرون یا حتی متقاطع باشند، بازهم دو مماس مشترک خارجی با همان روش رسم و طول‌های بالا وجود خواهد داشت.

سؤال:

وقتی دایره‌ها مماس درون یا متداخل باشند، وضعیت مماس مشترک خارجی چگونه است؟ در یک حالت بسیار خاص، تعداد بی‌شمار مماس مشترک خارجی وجود دارد! آن را توضیح دهید.

مثال: به دو مورد مستقل زیر پاسخ دهید:

الف) دو دایره مماس بیرون بوده، شعاع دایره‌ی کوچک‌تر ۳ و طول مماس مشترک خارجی آن‌ها $۲\sqrt{۲۱}$ است. شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر را حساب کنید.

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس بیرون $\sqrt{۲}$ برابر شعاع دایره‌ی بزرگ‌تر است. نسبت شعاع‌های دو دایره را بیابید.

پاسخ

الف) می‌دانیم $r'=۳$ و $d=r+r'=r+۳$ است. با توجه به طول مماس مشترک:

$$\sqrt{d^۲-(r-r')^۲}=۲\sqrt{۲۱} \rightarrow (r+۳)^۲-(r-۳)^۲=۴\times ۲۱=۸۴$$

$$\rightarrow ۶r+۶r=۸۴ \Rightarrow r=\frac{۸۴}{۱۲}=۷$$

ب) با فرض $d=r+r'$ و اندازه‌ی داده شده از مماس مشترک:

$$\sqrt{d^۲-(r-r')^۲}=\sqrt{۲}r \rightarrow \sqrt{(r+r')^۲-(r-r')^۲}=\sqrt{۲}r \rightarrow \sqrt{۲rr'+۲rr'}=\sqrt{۲}r$$

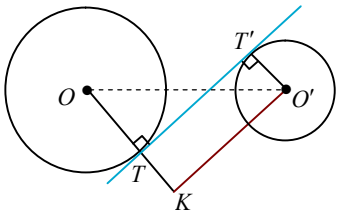
$$\rightarrow ۴rr'=۲r^۲ \xrightarrow{\div ۲r} ۲r'=r \Rightarrow \frac{r}{r'}=۲$$

ب) مماس مشترک‌های داخلی:

دایره‌های متخارج $C(O,r)$ و $C(O',r')$ را با فرض $r\geq r'$ در نظر بگیرید. گام‌های زیر را مشابه حالت قبل انجام داده تا روش رسم و طول مماس مشترک‌های داخلی معلوم شود.

گام ۱:

موقتاً فرض کنید مماس مشترک داخلی TT' برای این دو دایره را داشته باشیم. طبق شکل، از O' خطی موازی TT' رسم کنید.



نشان دهید چهارضلعی $O'KTT'$ مستطیل است و بنابراین $\hat{K}=۹۰^\circ$ و $OK=r+r'$ است.

گام ۲:

دایره‌ای به مرکز O معرفی و رسم کنید که توسط آن نقطه‌ی K معلوم گردد.

گام ۳:

اکنون فرض کنید دایره‌های $C(O,r)$ و $C(O',r')$ داده شده و مماس مشترک داخلی TT' را نداریم.

الف) مراحل رسم مماس مشترک داخلی را بیان کنید.

ب) نشان دهید طول مماس مشترک داخلی برابر است با:

$$TT' = \sqrt{d^2 - (r+r')^2}$$

پ) چه تعداد مماس مشترک داخلی برای دایره‌های بالا وجود دارد؟ طول‌های آن‌ها چه رابطه‌ای با هم دارند؟

ت) وضعیت مماس مشترک داخلی در حالت‌های دیگر از وضعیت دو دایره چگونه است؟

مثال: در دو دایره متخارج، طول مماس مشترک خارجی برابر $۳\sqrt{۷}$، طول مماس مشترک داخلی برابر $\sqrt{۱۵}$ و طول خط‌المرکزین آن‌ها برابر ۸ است. اندازه‌ی شعاع‌های دو دایره را بیابید. (مشابه این سؤال در نهایی خرداد ۹۴ تکرار شده است!)

پاسخ

باید داشته باشیم:

$$\sqrt{d^2-(r-r')^2} = ۳\sqrt{۷} \xrightarrow{d=۸} ۶۴-(r-r')^2 = ۹\times ۷ = ۶۳ \rightarrow (r-r')^2 = ۱ \Rightarrow r-r' = ۱$$

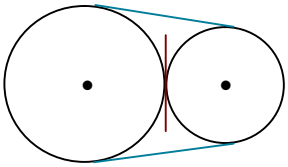
$$\sqrt{d^2-(r+r')^2} = \sqrt{۱۵} \rightarrow ۶۴-(r+r')^2 = ۱۵ \rightarrow (r+r')^2 = ۴۹ \Rightarrow r+r' = ۷$$

دو تساوی سمت راست تشکیل یک دستگاه معادله داده و با حل آن مقادیر $r=۴$ و $r'=۳$ حاصل خواهد شد.

مثال: دایره‌های $C(O,۴)$ و $C(O',۹)$ دقیقاً دارای سه مماس مشترک هستند. طول مماس مشترک خارجی آن‌ها را بیابید.

پاسخ

فقط در حالت مماس خارج بودن، تعداد ۳ مماس مشترک داریم.



پس: $d = ۹+۴ = ۱۳$ است. طبق فرض:

$$\sqrt{۱۳^2-(۹-۴)^2} = \sqrt{۱۶۹-۲۵} = \sqrt{۱۴۴} = ۱۲$$

مثال: طول خط المرکزین دو دایره به شعاع‌های $۶a-۱$ و $a^۲-۲$ برابر ۶ است و دو دایره فقط یک مماس مشترک دارند. مقادیر ممکن برای a را حساب کنید.

پاسخ

می‌دانیم باید دایره‌ها مماس داخل باشند؛ یعنی اختلاف شعاع‌ها باید برابر ۶ شود: $|a^۲-۲-(۶a-۱)|=۶$. دو حالت داریم:

- $a^۲-۲-(۶a-۱)=۶ \rightarrow a^۲-۶a-۷=۰ \rightarrow (a-۷)(a+۱)=۰ \Rightarrow a=۷, a=-۱$

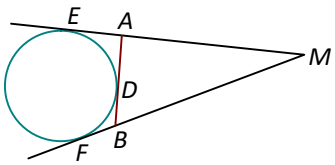
  فقط $a=۷$ قبول است، چون برای $a=-۱$ شعاع‌ها منفی خواهند شد.

- $a^۲-۲-(۶a-۱)=-۶ \rightarrow a^۲-۶a+۵=۰ \rightarrow (a-۵)(a-۱)=۰ \Rightarrow a=۵, a=۱$

  فقط $a=۵$ قبول است، برای $a=۱$ شعاع $a^۲-۲$ منفی خواهد شد.

پاسخ دهید (۱)

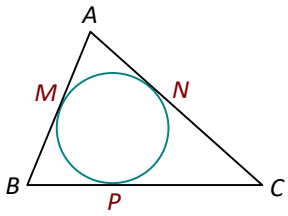
۱- اگر از نقطه‌ی M خارج یک دایره دو مماس ME و MF را بر دایره رسم کنیم و سپس از نقطه‌ی دلخواه D بین E و F روی دایره مماسی بر دایره رسم کنیم تا ME و MF را در A و B قطع کند، آنگاه محیط مثلث MAB همواره مقدار ثابت $۲ME$ است.



۲- در شکل مقابل ثابت کنید:

$$AM = p - BC$$

(p نصف محیط است.)



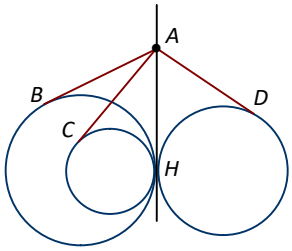
۳- فرض کنید دو یا چند دایره در یک نقطه‌ی H بر هم مماس داخل یا خارج باشند و A یک نقطه روی خط مماس مشترک آن‌ها واقع باشد. در این صورت؛

تمام مماس‌های رسم شده از A بر دایره‌ها با هم برابر بوده و مقدار یکسان AH دارند.

یعنی؛

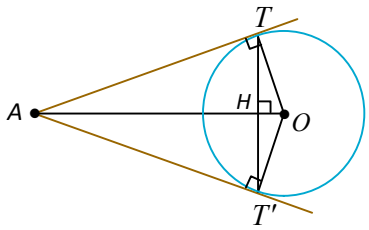
در شکل مقابل داریم:

$$AB = AC = AD = AH$$



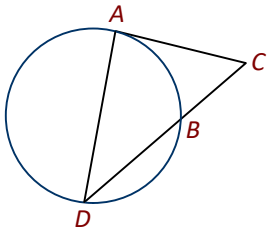
۴- مماس‌های AT و AT' رسم شده از نقطه‌ی A خارج دایره‌ی $C(O,r)$ را در نظر بگیرید. نشان دهید:

$$TT'^{۲} = ۴AH \cdot OH$$

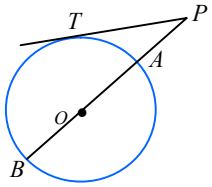


۵- از نقطه P در خارج یک دایره، مماس PA به طول $۱۰\sqrt{۳}$ را بر آن رسم کرده‌ایم، (A روی دایره است.) همچنین خطی از P گذراندیم که دایره را در نقاط B و C قطع کند. با اطلاع از $BC = ۲۰$، طول PB و PC را به دست آورید.

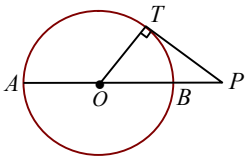
۶- در شکل زیر پاره‌خط AC بر دایره مماس است. اگر $\frac{AC}{BC}=\sqrt{۳}$ باشد، نسبت $\frac{DB}{BC}$ را حساب کنید.



۷- در شکل مقابل شعاع دایره برابر ۶، AB قطر و $PA=۴$ است. طول مماس PT را حساب کنید.



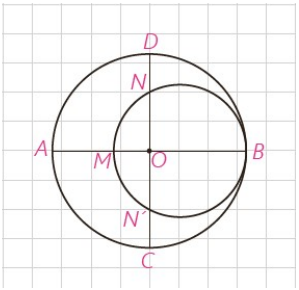
۸- در شکل زیر O مرکز دایره، $PA=۱۸$ و $PB=۲$ است. مساحت مثلث OPT را بیابید.



۹- نشان دهید در دو دایره‌ی مماس خارج، طول مماس مشترک خارجی برابر $۲\sqrt{rr'}$ است.

منتخب کتاب:

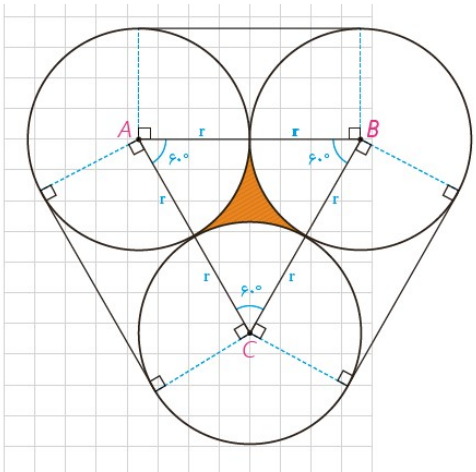
۱- در شکل مقابل دو دایره بر هم مماس و دو قطر AB و CD از دایره‌ی بزرگ‌تر بر هم عمود هستند. اگر $AM=۱۶$ و $ND=۱۰$، شعاع‌های دو دایره را بیابید.



۲- سه دایره به شعاع‌های یکسان r دو به دو بر هم مماس‌اند. مطابق شکل این سه دایره به وسیله‌ی یک نخ به هم بسته شده‌اند. نشان دهید:

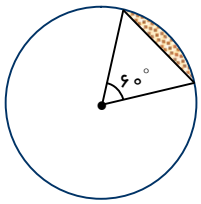
الف) طول نخ برابر $۶r+۲\pi\cdot r$ است.

ب) مساحت ناحیه‌ی مربوط به سه دایره برابر $r^{۲}(\sqrt{۳}-\frac{\pi}{۲})$ است.



۳- طول خط المرکزین دو دایره‌ی مماس درونی ۲ سانتی‌متر و مساحت ناحیه‌ی محدود بین آن‌ها 16π سانتی‌متر مربع است. طول شعاع‌های دو دایره را بیابید.

۴- در شکل مقابل، مساحت ناحیه رنگی را حساب کنید. (دایره به شعاع ۴)

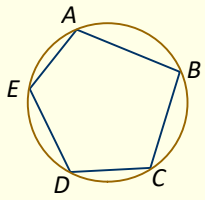


۲ چند ضلعی محاطی

معرفی مفهوم محوری این بخش:

✤ چند ضلعی محاطی:

هرگاه بتوان دایره‌ای را از تمام رئوس چندضلعی عبور داد، آن را یک چندضلعی محاطی گویند. برای نمونه؛



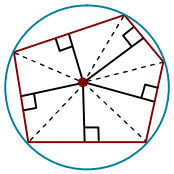
$ABCDE$ یک پنج ضلعی محاطی است.

بعلاوه:

دایره‌ای که از بیرون چندضلعی را در بر گرفته را **«دایره‌ی محیطی»** این چندضلعی گوییم.

توجه کنید:

الف) وقتی چند ضلعی محاطی باشد (مانند شکل زیر)، فاصله‌ی رأس‌های آن تا مرکز دایره‌ی محیطی یکسان است:



یعنی:

فاصله‌ی مرکز تا دو سر هر ضلع یکسان بوده و بنابراین مرکز دایره روی عمود منصف هر ضلع قرار دارد. به عبارت دیگر، عمود منصف‌های اضلاع در یک نقطه همرس‌اند.

برعکس:

ب) اگر عمود منصف‌های اضلاع چند ضلعی همرس باشند، فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی تا تمام رئوس یکسان بوده و بنابراین به مرکز آن می‌توان دایره‌ای از تمام رأس‌ها عبور داد.

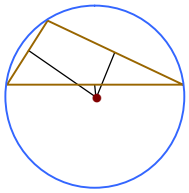
نتیجه:

با توجه به استدلال‌های دو مرحله‌ی بالا خواهیم داشت:

چندضلعی محاطی است اگر و فقط اگر عمود منصف‌های اضلاع آن همرس باشند.

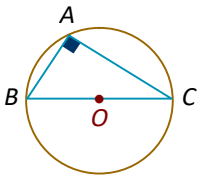
حالت ویژه:

می‌دانیم عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث همرسند. پس مثلث همیشه محاطی بوده و دارای دایره‌ی محیطی است:



مثال: الف) نشان دهید:

در مثلث قائم الزاویه، شعاع دایره‌ی محیطی برابر است با نصف وتر مثلث.



$$r=\frac{a}{۲}$$

ب) در مثلثی به طول اضلاع $۲\sqrt{۷}$، ۵ و $\sqrt{۳}$، شعاع دایره‌ی محیطی آن را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) با توجه به این‌که زاویه‌ی محاطی $\hat{A}$ برابر ۹۰° است، باید BC یک قطر دایره باشد. بعلاوه، شعاع OA از دایره، میانه‌ی وارد بر وتر است و بنابراین باید نصف وتر باشد.

$$OA=\frac{BC}{۲} \Rightarrow r=\frac{a}{۲}$$

ب) با قدری دقت و بررسی ساده‌ای می‌توان دید که مثلث قائم‌الزاویه است:

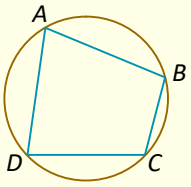
$$(۲\sqrt{۷})^۲=۵^۲+(\sqrt{۳})^۲ \equiv ۲۸=۲۵+۳$$

پس شعاع دایره‌ی محیطی برابر نصف وتر مثلث $\frac{۲\sqrt{۷}}{۲}=\sqrt{۷}$ است.

در ادامه، معیاری ویژه برای محاطی بودن چهار ضلعی‌ها بیان و بررسی می‌شود.

قضیه:

چهارضلعی $ABCD$ محاطی است اگر و فقط اگر زوایای روبه‌رو دو به دو مکمل باشند:



$$\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ \quad , \quad \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$$

برهان

الف) فرض کنید $ABCD$ محاطی باشد. با توجه به این‌که زوایا همگی محاطی هستند:

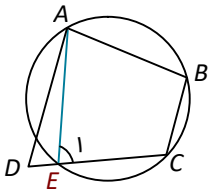
زاویه‌ی $\hat{A}$ برابر نصف کمان BCD و زاویه‌ی $\hat{C}$ برابر نصف کمان BAD است.
چون دو کمان ذکر شده کل دایره را تشکیل می‌دهند:

$$\hat{A}+\hat{C}=\frac{۳۶۰}{۲}=۱۸۰^\circ \qquad (\text{به صورت مشابه: } \hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ)$$

ب) بر عکس؛ فرض کنید در چهارضلعی $ABCD$ داشته باشیم: $\hat{A}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$ و $\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ$. می‌دانیم از نقاط A، B و C یک دایره عبور می‌کند (چرا؟!). ادعا می‌کنیم این دایره از D هم عبور می‌کند.

برهان خلف: اگر D روی دایره نباشد، دو حالت ممکن است، D بیرون دایره یا روی دایره باشد.

در حالت D بیرون دایره:



تقاطع ضلع AD با دایره را E گرفته و چون $ABCE$ چهارضلعی محاطی است:

$$\hat{B}+\hat{E}_۱=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{E}_۱=۱۸۰^\circ-\hat{B}$$

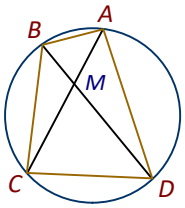
از طرفی داشتیم: $\hat{D}=۱۸۰^\circ-\hat{B}$ و در نتیجه: $\hat{E}_۱=\hat{D}$ که یک تناقض است.
(زیرا: $\hat{E}_۱$ در مثلث ADE یک زاویه‌ی خارجی و $\hat{D}$ داخلی غیر مجاور آن است!)
در حالتی که D داخل دایره باشد نیز به روش مشابه به تناقض خواهیم رسید. پس:

فرض خلف باطل است؛ یعنی D روی دایره قرار داشته و چهارضلعی $ABCD$ محاطی است.

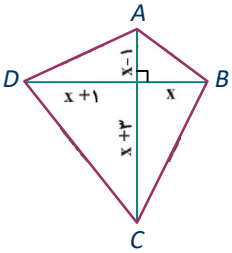
توجه کنید:

در چهارضلعی محاطی $ABCD$:

اگر قطرهای چهارضلعی در نقطه‌ی M متقاطع باشند، داریم: $MA\cdot MC=MB\cdot MD$ باشد.



مثال: رأس‌های چهارضلعی $ABCD$ مقابل روی محیط یک دایره قرار دارند.
مساحت چهارضلعی را حساب کنید.



پاسخ

طبق نکته‌ی قبل باید:

$$(x+۱)x=(x+۳)(x-۱) \Rightarrow x=۳$$

پس $AC=۸$ و $BD=۷$ است. بنابراین:

$$S=\frac{۸\times ۷}{۲}=۲۸$$

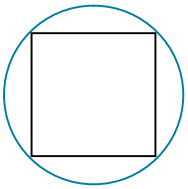
یادآوری:

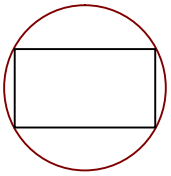
مساحت هر چهارضلعی با قطرهای عمود برهم، مانند مساحت لوزی محاسبه می‌شود.

تعیین محاطی بودن چهار ضلعی‌های ویژه با استفاده از شرط مکمل بودن زوایای مقابل آسان است:

مربع و مستطیل:

در هر دو، زوایا 90° بوده و بنابراین زوایای مقابل مکمل‌اند؛ پس هر دو محاطی هستند.





متوازی‌الاضلاع:

در کل محاطی نیست؛ برای محاطی بودن باید زوایای روبه‌روی آن مکمل باشند. چون زوایای مقابل برابرند، باید هر کدام 90° باشند. بنابراین:

متوازی‌الاضلاع محاطی است، هرگاه مستطیل باشد.

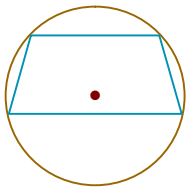
لوزی:

در کل محاطی نیست؛ باید هر کدام از زوایا 90° باشند. بنابراین:

لوزی محاطی است، هرگاه مربع باشد.

ذوزنقه:

در کل محاطی نیست. در حالت خاص:



ذوزنقه متساوی‌الساقین:

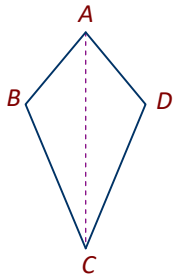
ذوزنقه محاطی است اگر و فقط اگر متساوی الساقین باشد.

(اثبات در تمرینات.)

به معرفی یک چهارضلعی خاص دیگر توجه کنید:

کایت:

چهار ضلعی است که یکی از قطرهای آن محور تقارن شکل باشد:



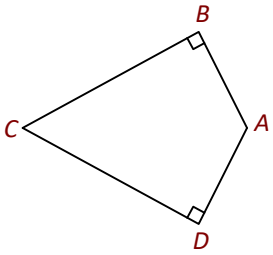
توجه کنید:

به دلیل تقارن موجود در شکل، در کایت موارد زیر را داریم:

الف) برابری $\hat{B}=\hat{D}$ بین زوایا و $AB=AD$ و $BC=DC$ بین اضلاع برقرار است.

ب) قطر AC نیمساز زوایای $\hat{A}$ و $\hat{C}$ است.

نتیجه:



کایت هنگامی محاطی است که دو زاویه‌ی مقابل آن قائمه باشند:

زیرا:

$$\hat{B}+\hat{D}=۱۸۰^\circ \xrightarrow{\hat{B}=\hat{D}} ۲\hat{B}=۱۸۰^\circ \Rightarrow \hat{B}=۹۰^\circ$$

برعکس؛

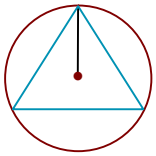
بدیهی است که اگر دو زاویه‌ی روبه‌روی یک چهارضلعی قائمه باشند، آن محاطی است.

پاسخ دهید (۲)

۱- نشان دهید:

در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌ی محیطی برابر است با:

$$r = \frac{\sqrt{۳}}{۳}a$$



منتخب کتاب:

۱- ثابت کنید یک ذوزنقه محاطی است، اگر و فقط اگر متساوی‌الساقین باشد.

۲- مساحت مثلث متساوی الاضلاعی را بیابید که در دایره‌ای به شعاع R محاط شده است.

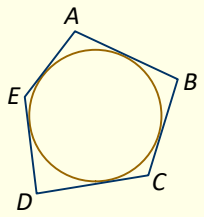
۳- ثابت کنید عمود منصف یک ضلع هر مثلث و نیمساز زاویه‌ی مقابل به آن ضلع، یکدیگر را روی دایره‌ی محیطی مثلث قطع می‌کنند.

۳ چند ضلعی محیطی

معرفی نوع دیگری از چندضلعی:

✤ چند ضلعی محیطی:

هرگاه بتوان دایره‌ای را بر تمام اضلاع چند ضلعی مماس کرد، آن را یک چندضلعی محیطی گویند. برای نمونه؛



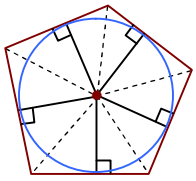
$ABCDE$ پنج ضلعی محیطی است.

بعلاوه:

دایره‌ای که از داخل چندضلعی بر اضلاع آن مماس است را **«دایره‌ی محاطی»** چندضلعی گوییم.

توجه کنید:

الف) وقتی چند ضلعی محیطی باشد (مانند شکل زیر)، فاصله‌ی مرکز دایره تا ضلع‌های چند ضلعی یکسان است:



یعنی:

فاصله‌ی مرکز تا دو ضلع هر زاویه‌ی چند ضلعی یکسان بوده و بنابراین مرکز دایره روی نیمساز هر زاویه قرار دارد. به عبارت دیگر، نیمسازهای زوایا در یک نقطه همرس‌اند.

برعکس:

ب) اگر نیمسازهای زوایای چند ضلعی همرس باشند، فاصله‌ی نقطه‌ی همرسی تا تمام ضلع‌ها یکسان بوده و بنابراین دایره‌ای به مرکز آن می‌توان بر تمام اضلاع مماس کرد.

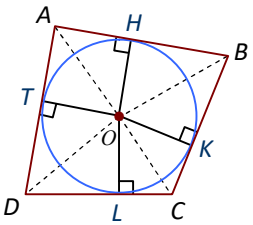
نتیجه:

با توجه به استدلال‌های دو مرحله‌ی بالا خواهیم داشت:

چندضلعی محیطی است اگر و فقط اگر نیمسازهای زوایای آن همرس باشند.

ارتباط ساده‌ای بین چندضلعی محیطی و شعاع دایره‌ی محاطی:

مثال: با استفاده از شکل روبه‌رو در چهارضلعی محیطی نشان دهید:



اگر S مساحت و p نصف محیط چهارضلعی و r شعاع دایره باشد، داریم:

$$r=\frac{S}{p}$$

(همواره حرف P (بزرگ) را برای محیط و حرف p (کوچک) را برای نصف محیط به‌کار خواهیم برد.)

توجه کنید:

این خاصیت در مورد هر چندضلعی محیطی و دایره‌ی مربوط به آن صحیح است.

پاسخ

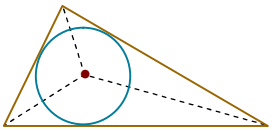
کافی است مساحت چهارضلعی را به صورت جمع مساحت‌های چهار مثلث OAB، OBC، OCD و ODA نوشته و توجه کنید که ارتفاع هر چهار مثلث برابر r است:

$$S=\frac{1}{2}r\cdot AB+\frac{1}{2}r\cdot BC+\frac{1}{2}r\cdot CD+\frac{1}{2}r\cdot DA \rightarrow S=\frac{1}{2}r(AB+BC+CD+DA)$$

$$\Rightarrow r=\frac{S}{\frac{1}{2}(AB+BC+CD+DA)}=\frac{S}{p}$$

حالت ویژه:

می‌دانیم نیمسازهای زوایای (داخلی) هر مثلث همرسند. پس مثلث همیشه چند ضلعی محیطی بوده و دارای دایره‌ی محاطی (داخلی) است:



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

در هر مثلث، نقطه‌ی همرسی نیمسازها، مرکز دایره‌ی . . . . . مثلث است. (محیطی- محاطی)

جواب: طبق مطلب بالا محاطی.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در مثلث قائم الزاویه‌ای به اضلاع قائمه ۳ و ۴، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی را بیابید.

پاسخ

طول وتر مثلث طبق رابطه فیثاغورس محاسبه می‌شود:

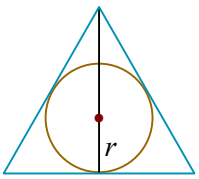
$$\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵$$

بنابراین محیط مثلث برابر $P=۳+۴+۵=۱۲$ و مساحت $S=\frac{۳\times ۴}{۲}=۶$ است. طبق رابطه‌ی مربوطه:

$$\xrightarrow{p=\frac{P}{۲}=\frac{۱۲}{۲}=۶} r=\frac{S}{p}=\frac{۶}{۶}=۱$$

حالت خاص:

اگر مثلث متساوی الاضلاع باشد، شعاع طبق قاعده‌ی کلی $r=\frac{S}{p}$ برابر است با:



$$r=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^{۲}}{\frac{۳}{۲}a}=\frac{۲\sqrt{۳}a^{۲}}{۱۲a}=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

مثال: شعاع دایره‌ی محاطی داخلی یک مثلث متساوی الاضلاع به ضلع ۸ را حساب کنید.

پاسخ

طبق مطلب قبل داریم:

$$r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}\times ۸=\frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

برای هر مثلث، سه دایره‌ی محاطی دیگر هم وجود دارد. معرفی و بررسی بیشتر، بر مبنای مثال بعد.

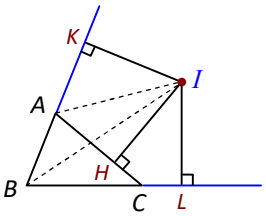
مثال: در مثلث دلخواه ABC:

الف) نشان دهید نیمساز زاویه‌ی داخلی $\hat{B}$ و نیمسازهای زوایای خارجی $\hat{A}$ و $\hat{C}$ همرس‌اند.

ب) از اطلاعات حاصل از قسمت قبل چگونه می‌توان برای رسم دایره‌ای مماس بر ضلع AC و امتدادهای دو ضلع دیگر کمک گرفت؟

پاسخ

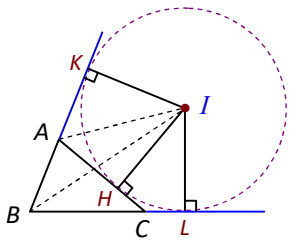
الف) تقاطع نیمساز $\hat{B}$ و نیمساز زاویه خارجی $\hat{A}$ را I می‌گیریم.



- چون I روی نیمساز $\hat{B}$ است، داریم: $IK=IL$.
- به صورت مشابه، چون I روی نیمساز خارجی $\hat{A}$ است، باید $IK=IH$ باشد.

بنابراین $IH=IL$ بوده، یعنی فاصله‌ی I از دو ضلع زاویه‌ی خارجی $\hat{C}$ نیز یکسان است. در نتیجه I روی نیمساز زاویه‌ی خارجی $\hat{C}$ نیز قرار داشته و حکم اثبات می‌شود.

ب) طبق برابری $IH=IL=IK$ که در قسمت قبل دیدیم، دایره‌ی به مرکز I و شعاع IH بر AC و امتدادهای دو ضلع دیگر مماس خواهد شد.



معرفی یک مفهوم جدید، با توجه به آن‌چه در مثال قبل دیدیم:

دایره محاطی خارجی:

در هر مثلث، نیمساز داخلی هر زاویه و نیمسازهای خارجی دو زاویه‌ی دیگر همواره همرس‌اند.

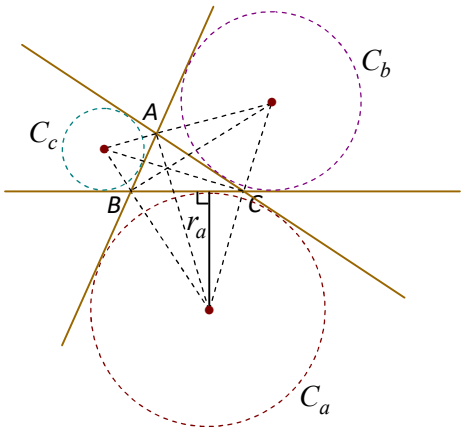
بعلاوه؛

نقطه‌ی همرسی، مرکز دایره‌ای به نام «دایره محاطی خارجی» است که بر ضلع مقابلِ زاویه‌ی اول و امتدادهای دو ضلع دیگر مماس است.

توجه کنید:

الف) دایره‌ی محاطی خارجی که توسط نیمساز داخلی $\hat{B}$ حاصل شده، بر ضلع AC مماس است؛ این دایره را C_b نامیده و شعاع آن را با r_b نشان می‌دهیم.

ب) واضح است که با استفاده از نیمسازهای داخلی $\hat{A}$ یا $\hat{C}$ و سپس نیمسازهای خارجی دو رأس دیگر، دوایر محاطی خارجی C_a و C_c با شعاع‌های r_a و r_c حاصل خواهند شد:



مثال: نشان دهید در مثلث ABC:

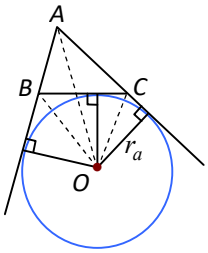
شعاع دایره‌ی محاطی خارجی متناظر رأس A برابر است با:

$$r_a = \frac{S}{p-a}$$

که در آن S مساحت و p نصف محیط مثلث است. بنابراین $r_b = \frac{S}{p-b}$ و $r_c = \frac{S}{p-c}$ نیز صحیح خواهند بود.

پاسخ

کافی است مساحت مثلث ABC را به صورت زیر بنویسیم:



$$S = S_{\overset{\Delta}{OBA}} + S_{\overset{\Delta}{OCA}} - S_{\overset{\Delta}{OBC}}$$

چون عدد r_a برابر اندازه ارتفاع هر سه مثلث در سمت راست تساوی است:

$$S = \frac{۱}{۲} r_a \times c + \frac{۱}{۲} r_a \times b - \frac{۱}{۲} r_a \times a = r_a \underbrace{(\frac{c+b-a}{۲})}_{p-a}$$

بنابراین رابطه‌ی $r_a = \frac{S}{p-a}$ برقرار است.

نتیجه:

رابطه‌ی زیر در مورد شعاع دایره‌های محاطی برقرار است:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{۱}{r}$$

(r شعاع دایره محاطی داخلی)

زیرا:

$$\frac{۱}{r_a} + \frac{۱}{r_b} + \frac{۱}{r_c} = \frac{p-a}{S} + \frac{p-b}{S} + \frac{p-c}{S} = \frac{۳p - \overbrace{(a+b+c)}^{۲p}}{S} = \frac{p}{S} = \frac{۱}{r}$$

بعلاوه؛

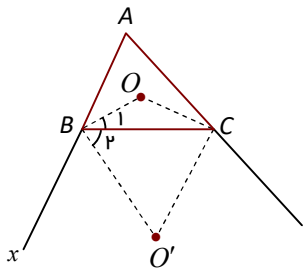
چنان‌که در تمرینات این بخش آمده، در مورد ارتفاع‌های وارد بر سه ضلع مثلث هم رابطه‌ی مشابهی برقرار است:

$$\frac{۱}{h_a} + \frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_c} = \frac{۱}{r}$$

مثال: در مثلث دلخواه ABC، فرض کنید O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی و O' مرکز دایره‌ی محاطی خارجی رو به رأس A باشد. نشان دهید چهارضلعی $BOCO'$ محاطی است.

پاسخ

چون BO و BO' نیمساز هستند، بنابراین:



$$\hat{B}_۱ + \hat{B}_۲ = \frac{A\hat{B}C}{۲} + \frac{C\hat{B}x}{۲} = \frac{A\hat{B}x}{۲} = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$$

پس: $O\hat{B}O' = ۹۰^\circ$ است و به روش مشابه نشان داده می‌شود که: $O\hat{C}O' = ۹۰^\circ$.

در نتیجه،

دو زاویه‌ی روبه‌رو مکمل هستند و چهارضلعی محاطی خواهد شد.

مثال: در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، اندازه‌ی شعاع دوایر محاطی خارجی را حساب کنید.

پاسخ

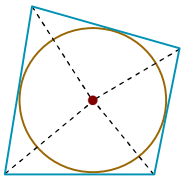
واضح است که سه دایره محاطی خارجی یکسان است. با توجه به $S=\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲$ در این نوع مثلث:

$$r_a=\frac{S}{p-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{۳a}{۲}-a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۴}a^۲}{\frac{a}{۲}}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}a}{\frac{۱}{۱}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}a$$

بررسی چهار ضلعی‌ها:

مانند هر چندضلعی دیگر؛

چهارضلعی محیطی است اگر و فقط اگر نیمسازهای زوایای داخلی آن همرس باشند.



ضمناً:

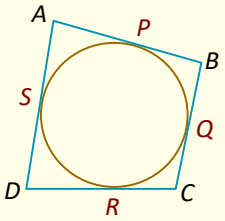
اگر سه نیمساز همرس باشند، نیمساز چهارم نیز با آن‌ها همرس خواهد بود.

در چهارضلعی‌ها، برای محیطی بودن نیز معادل ویژه‌ای وجود دارد:

قضیه:

چهارضلعی $ABCD$ محیطی است اگر و فقط اگر مجموع دو ضلع روبه‌روی آن برابر مجموع دو ضلع دیگر باشد:

$$AB+DC=AD+BC$$



برهان

الف) فرض کنید $ABCD$ محیطی باشد. با توجه به این که طول مماس‌ها از یک نقطه خارج دایره با هم برابر است، داریم:

$$AP=AS\ ,\ BP=BQ\ ,\ CR=CQ\ ,\ DR=DS$$

جمع طرفین تساوی‌ها:

$$\underbrace{AP+BP}+\underbrace{CR+DR}=\underbrace{AS+DS}+\underbrace{BQ+CQ}\ \Rightarrow\ AB+DC=AD+BC$$

ب) بر عکس؛ فرض کنید در چهارضلعی $ABCD$ تساوی $AB+DC=AD+BC$ برقرار باشد. نیمسازهای دو زاویه‌ی $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را رسم کرده و تقاطع آن‌ها را I می‌گیریم. واضح است که:

$$IH=IK\ ,\ IK=IL\ \Rightarrow\ IH=IK=IL$$

بنابراین دایره به مرکز I و شعاع IH (مانند شکل‌های زیر) بر اضلاع AB، BC و CD مماس خواهد شد. ادعا می‌کنیم این دایره بر AD نیز مماس است.

برهان خلف: اگر ضلع AD و دایره مماس نباشند، از نقطه‌ی A مماسی بر دایره رسم کرده تا ضلع CD یا امتداد آن را در نقطه‌ای چون E قطع کند. حالت‌های ممکن:



در هر دو حالت، چهارضلعی $ABCE$ محیطی بوده و بنابراین **(*)** $AB+CE=BC+AE$ است.

در شکل سمت چپ:

رابطه‌ی **(*)** چنین نوشته می‌شود:

$$\underbrace{AB+CD}_{BC+AD}+DE=BC+AE \Rightarrow AD+DE=AE$$

تساوی غیر ممکن (تناقض) است، زیرا جمع دو ضلع مثلث از ضلع سوم بزرگ‌تر است. در شکل سمت راست نیز به تناقض $AD=AE+DE$ خواهیم رسید. پس:

فرض خلف باطل است؛ یعنی ضلع AD نیز بر دایره مماس بوده و چهارضلعی $ABCD$ محیطی است.

مثال: سه نیمساز داخلی چهارضلعی $ABCD$ همرسند. اگر $AB=۳a-۴$، $BC=۵a-۶$، $CD=۶a$ و $AD=a^۲+۲$ باشند، مقدار a را حساب کنید.

پاسخ

واضح است که چهارضلعی محیطی است. پس:

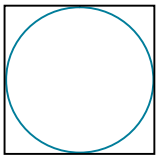
$$AB+DC=AD+BC \rightarrow ۳a-۴+۶a=a^۲+۲+۵a-۶ \rightarrow ۹a-۴=a^۲+۵a-۴$$
$$\rightarrow a^۲-۴a=۰ \rightarrow a(a-۴)=۰ \Rightarrow a=۰, a=۴$$

توجه کنید:

برای $a=۰$ برای برخی اضلاع مقدار منفی حاصل شده و بنابراین فقط $a=۴$ قبول می‌شود.

تعیین محیطی بودن چهار ضلعی‌های ویژه با استفاده از شرط اضلاع مقابل آسان است:

مربع و مستطیل:



در مربع شرط مربوطه برقرار بوده و بنابراین محیطی است.

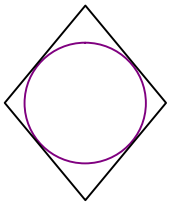
ولی مستطیل چنین نیست. (فقط مستطیلی که مربع هم باشد، محیطی است!)

و در نتیجه:

متوازی‌الاضلاع نیز در کل محیطی نیست.

لوزی:

مانند مربع همواره محیطی است.



(متوازی‌الاضلاعی که لوزی هم باشد، محیطی است!)

ذوزنقه:

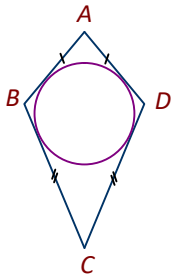
در کل محیطی نیست، حتی با شرط متساوی الساقین بودن.

فقط در یک حالت خاص محیطی است که در تمرینات خواهیم دید.

کایت:

با توجه به تعریف و شرایط مربوطه؛

جمع اضلاع مقابل دو به دو برابر بوده و در نتیجه همواره محیطی است!



در پایان، به محاطی یا محیطی بودن چند ضلعی‌هایی ویژه اشاره می‌شود.

یادآوری:

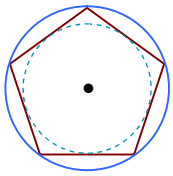
هرگاه تمام اضلاع چند ضلعی با هم برابر بوده و تمام زوایای آن نیز یکسان باشند، آن را «**منتظم**» گویند.

نمونه‌های معروف:



توجه کنید:

الف) هر چندضلعی منتظم، هم محاطی است و هم محیطی.



بعلاوه:

مراکز دایره‌های محیطی و محاطی بر هم منطبق هستند.

(بررسی بیشتر و اثبات در تمرینات انتهای این بخش)

پاسخ دهید (۳)

۱- (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)

الف) هر چند ضلعی منتظم، هم محاطی و هم محیطی است. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

ب) طول مماس مشترک خارجی دو دایره مماس برون به شعاع‌های r و r' برابر $۲\sqrt{r+r'}$ است. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

پ) اگر r_a، r_b و r_c شعاع‌های دوایر محاطی خارجی یک مثلث و شعاع دایره‌ی محاطی داخلی آن برابر ۴ باشد، حاصل $\frac{۱}{r_a}+\frac{۱}{r_b}+\frac{۱}{r_c}$ برابر . . . . . است.

۲- درستی یا نادرستی موارد زیر را مشخص کنید.

الف) اگر در چهارضلعی محاطی، یک زاویه قائمه باشد، چهارضلعی مستطیل است.

ب) اگر چهارضلعی هم محاطی و هم محیطی باشد، چهارضلعی مربع است.

پ) اگر در چهارضلعی محیطی دو ضلع مجاور برابر باشند، چهارضلعی لوزی است.

۳- شعاع دایره‌ی محاطی داخلی مثلث به اضلاع ۸، ۱۵ و ۱۷ را محاسبه کنید.

۴- در مثلثی به اضلاع ۴، ۵ و ۷، مساحت کوچک‌ترین دایره‌ی محاطی خارجی را بیابید.

۵- به روشی متفاوت از آن‌چه در درس دیدیم، نشان دهید:

در مثلث متساوی الاضلاع به ضلع a، شعاع دایره‌ی محاطی داخلی برابر است با:

$$r=\frac{\sqrt{۳}}{۶}a$$

۶- نشان دهید رابطه‌ی زیر در مورد اندازه‌ی ارتفاع‌های مثلث ABC با شعاع دایره محاطی داخلی برقرار است:

$$\frac{۱}{h_a}+\frac{۱}{h_b}+\frac{۱}{h_c}=\frac{۱}{r}$$

۷- در چهارضلعی محیطی $ABCD$ داریم: $AB+DC=۸$. محیط چهارضلعی را بیابید.

۸- یک ذوزنقه‌ی متساوی الساقین به طول قاعده‌های ۴ و ۱۶، محیطی است. اندازه‌ی شعاع دایره‌ی محاطی آن را حساب کنید.

۹- در طی گام‌های زیر نشان دهید هر n-ضلعی منتظم همواره محاطی و همچنین محیطی است.

گام ۱:

یک n-ضلعی منتظم دلخواه $ABCD\cdots$ در نظر گرفته، اندازه‌ی هر زاویه‌ی آن را ۲α بگیرید و سپس عمود منصف‌های دو ضلع مجاور آن، AB و BC را رسم کنید. تقاطع عمود منصف‌ها را O قرار دهید.

گام ۲:

نشان دهید مثلث‌های OAB و OBC متساوی الساقین بوده، زوایای پای ساق‌ها α و دو مثلث هم‌نهشتند.

گام ۳:

نتیجه بگیرید $OA=OB=OC$ است و به طور مشابه باید $OA=OB=OC=OD=\dots$ باشد و بنابراین دایره‌ی محیطی وجود داشته و n-ضلعی منتظم محاطی است.

گام ۴:

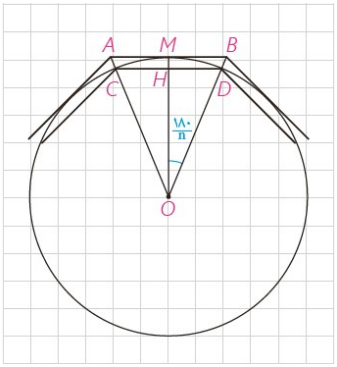
از روند اثبات تا این‌جا و یکسانی مثلث‌های OAB، OBC، OCD و . . . نتیجه بگیرید فاصله‌ی O تا اضلاع چند ضلعی یکسان است و بنابراین O مرکز دایره‌ی محاطی داخلی است، بویژه این‌که n-ضلعی منتظم محیطی هم هست.

۱۰- نسبت شعاع دایره‌ی محاطی یک شش ضلعی منتظم به شعاع دایره‌ی محیطی آن را محاسبه کنید.

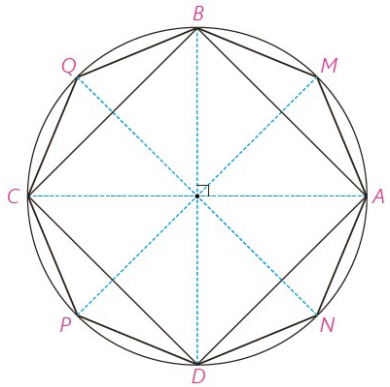
منتخب کتاب:

۱- ثابت کنید در ذوزنقه‌ای که هم محیطی است و هم محاطی، مساحت برابر میانگین حسابی دو قاعده ضرب در میانگین هندسی آن‌ها است.

۲- یک دایره به شعاع r و n-ضلعی‌های منتظم محاطی و محیطی در آن در نظر بگیرید. نشان دهید اگر AB و CD اندازه‌های ضلع‌های n-ضلعی منتظم محیطی و محاطی باشند، آنگاه $AB=2r\tan\frac{180}{n}$ و $CD=2r\sin\frac{180}{n}$ است.



۳- دو قطر عمود بر هم AC و BD از یک دایره را طبق شکل رسم می‌کنیم. چهار ضلعی $ABCD$ یک مربع است، چرا؟ عمود منصف‌های ضلع‌های این مربع را رسم می‌کنیم تا دایره را قطع کنند. نشان دهید هشت ضلعی $AMBQCPDN$ منتظم است.



لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴