

TEST

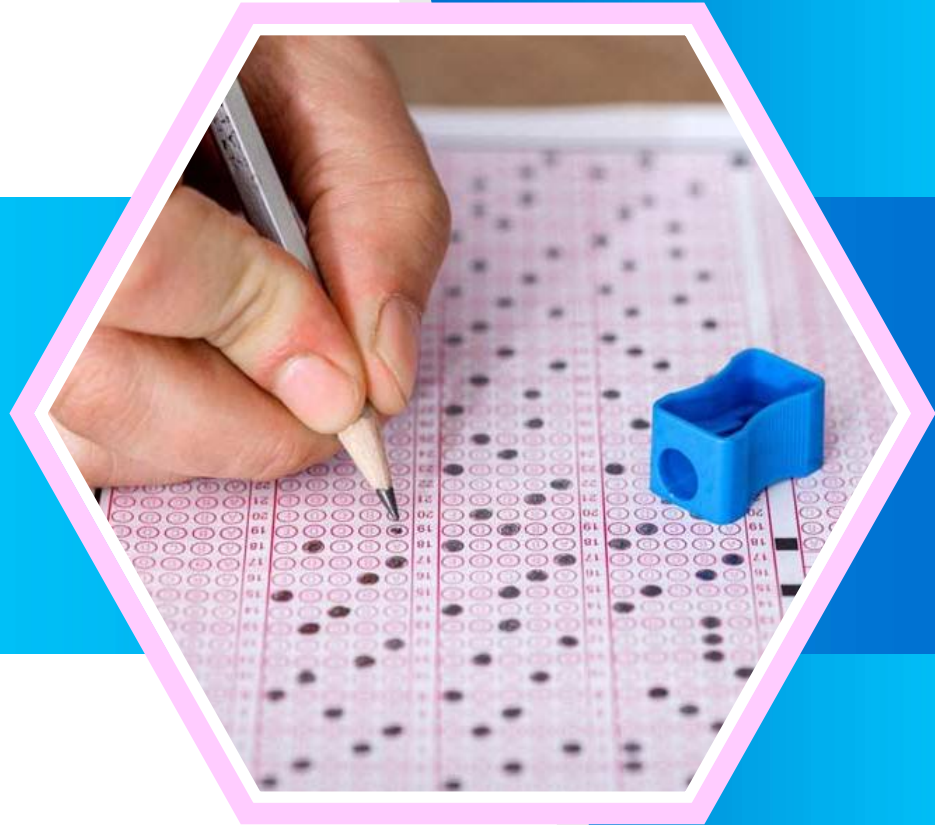
درسمه ریاضیات کنکور

نمونه نکتہ و تست:

ریاضے دوازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny

PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴



گروه علمی درس آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش آموزان کشور (نهایی ۲۰)



کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

۵:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس آموز؛ (منحصر به فرد)

این مجموعه با ساختار جدید و ارتقای کیفیت ارائه شده است.

جزئیات محتوا

سطح نرمال آموزش کنکور

جهت آمادگی شرکت در آزمون‌ها و کنکور



سطح پیشرفته آموزش

ویژه کسب نمره کامل 100% در آزمون‌ها و کنکور



طرح و تشریح

صدها مثال و تست متوسط، دشوار و دشوارتر



بانک تمرین تست

شامل صدها تست متوسط و دشوار (پاسخ‌نامه تشریحی جداگانه دارد).



آموزش کنکور

(درسنامه ممور)

هسته اصلی این پک آموزشی، یک درسنامه دقیق و مفهومی، نکات و تکنیک‌های سریع با پوشش کامل از ممتوای آموزشی مربوطه است.

پوشش آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها

Up to date

۲	تابع (۱) ترکیب توابع، انتقال، انقباض و انبساط نمودار	۱
۳۳	تابع (۲) یکنوایی توابع، تابع ۱ به ۱ و وارون توابع	۲
۶۲	مثلثات (۱) تابع متناوب و دوره تناوب نمودار، تابع تنازانت	۳
۸۲	مثلثات (۲) نسبت‌های دو برابر کمان، معادلات مثلثاتی	۴

۵	رفع ابهام در حد همسایگی، حدهای کسری و رفع ابهام در حد	۱۵۹
۶	میل به بی‌نهایت مفهوم بی‌نهایت، حد بی‌نهایت و حد در بی‌نهایت	۱۲۵
۷	مشتق (۱) مفهوم مشتق و مماس، مشتق پذیری و پیوستگی	۱۴۹
۸	مشتق (۲) مشتق‌گیری، مشتق مرکب و آهنگ تغییر تابع	۱۵۵

۱۹۹	کاربرد مشتق (۱) تعیین یکنوایی تابع، اکسترمم نسبی توابع	۹
۲۲۰	کاربرد مشتق (۲) تعیین اکسترمم مطلق تابع، بهینه‌سازی توابع	۱۰
۲۳۷	هندسه مفصلاتی تفکر تجسمی، مقاطع مخروطی دایره و بیضی	۱۱
۲۶۹	اهتمال بررسی احتمال شرطی و قانون احتمال کل	۱۲



تابع (۱)

صفحه	فهرست
۳	■ تابع هند جمله‌ای
۶	■ ترکیب توابع
۱۵	■ تغییر عمودی نمودار
۲۰	■ تغییر افقی نمودار
۲۹	■ ویژه صد درصدی‌ها

شکل کلی تابع چند جمله‌ای:

$$f(x) = ax^n + bx^{n-1} + \dots + kx + l, \quad (a \neq 0)$$

ضرایب، عددهای حقیقی و $n \geq 0$ (بیشترین توان) درجه تابع است. دامنه همیشه برابر \mathbb{R} است.

توابع چندجمله‌ای ویژه:

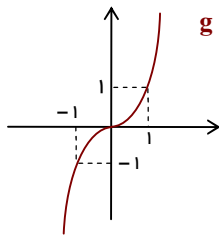
ساده‌ترین: تابع ثابت $f(x) = c$ و تابع خطی $f(x) = ax + b$ (درجه‌ی یک)

دو مورد دیگر:

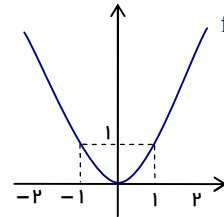
تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ (سه‌می) و تابع درجه سه $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$

به یک بررسی از این توابع توجه کنید:

الف) نمودار دو تابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = x^3$ توسط جدول مقادیر:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^3$	-۸	-۱	۰	۱	۸



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y = x^2$	۴	۱	۰	۱	۴

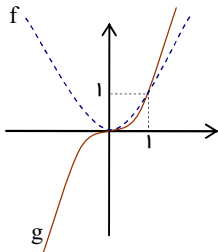
ب) توسط نمودارهای بالا، مجموعه جواب نامعادله $f(x) > g(x)$ (یعنی: $x^2 > x^3$) را تعیین می‌کنیم.

می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. پس:

$$0 < x < 1 \Rightarrow x^3 < x^2$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

مجموعه جواب نامعادله $f(x) > g(x)$ بخش‌هایی از محور طول‌هاست که نمودار f بالاتر از نمودار g قرار داشته باشد:

$$f(x) > g(x) \Rightarrow x \in (-\infty, 0) \cup (0, 1)$$

سؤال:

روش حل جبری و سریع نامعادله $x^2 > x^3$ چگونه است؟

تیب سوالات

❓ در تابع درجه‌ی سوم $f(x) = -x^3 + ax^2 + x + 2$ ، رابطه‌ی $f(\frac{3}{2}) - f(2) + f(-\frac{3}{2}) = 5$ برقرار است. مقدار $f(1) + f(2)$ کدام است؟

۳۲ ④

-۱۶ ③

-۳۲ ②

۱۶ ①

گزینه ۲

طبق تساوی داده شده:

$$-\left(\frac{3}{2}\right)^3 + a\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right) + 2 - (-2^3 + a(2)^2 + 2 + 2) + -\left(-\frac{3}{2}\right)^3 + a\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{3}{2}\right) + 2 = 5$$

$$\rightarrow \frac{1}{2}a + 8 = 5 \rightarrow \frac{1}{2}a = -3 \Rightarrow a = -6$$

عبارت مورد نظر:

$$f(1) + f(2) = -(1)^3 + a(1)^2 + (1) + 2 - (2)^3 + a(2)^2 + (2) + 2 = 5a - 2 \xrightarrow{a=-6} 5(-6) - 2 = -32$$

--- ❓ ---

❓ نمودار تابع $y = -x^3 + 6x^2 - 12x - 1$ از کدام ناحیه عبور نمی‌کند؟

۴ ④

۳ ③

۲ ②

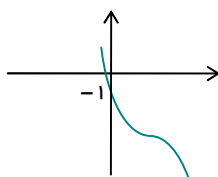
۱ ①

گزینه ۱

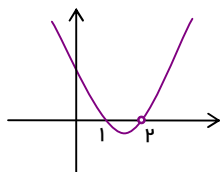
با توجه به شباهت ضرایب با گسترده‌ی $(x-2)^3$ ، ضابطه را به صورت مناسب می‌نویسیم:

$$y = -(x^3 - 6x^2 + 12x) - 1 = -[(x-2)^3 + 8] - 1 = -(x-2)^3 - 9$$

باید نمودار $y = -x^3$ را ۲ واحد به راست و ۹ واحد به پایین انتقال دهیم. رسم تقریبی نشان می‌دهد که نمودار از نواحی دوم و چهارم عبور می‌کند. چون تقاطع نمودار با محور عرض -۱ است، نمودار اجباراً از ناحیه سوم هم عبور خواهد کرد:



--- ❓ ---

❓ نمودار تابع $f(x) = \frac{x^3 - ax^2 + bx - 4}{x+c}$ به صورت زیر است. مقدار $f(2a-b-3c)$ کدام است؟

۳۶ ①

۳۸ ②

۴۲ ③

۳۲ ④

گزینه ۳

مخرج باید $x-2$ باشد و بنابراین: $(c = -2)$. بعلاوه، کسر پس از ساده شدن به صورت $(x-1)(x-2)$ خواهد بود. (چرا؟) در نتیجه:

$$x^3 - ax^2 + bx - 4 = (x-2)(x-1)(x-2) = (x-1)(x^2 - 4x + 4) = x^3 - 5x^2 + 8x - 4$$

پس باید: $a = 5$ و $b = 8$ باشد. مقدار مورد نظر از ساده شده‌ی ضابطه، یعنی از $(x-1)(x-2)$ حاصل می‌شود:

$$\frac{2a-b-3c=8}{\rightarrow} (8-1)(8-2) = 42$$

---◇---

تمرین تست (۱)



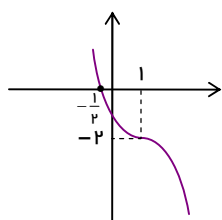
۱- تابع $f(x) = (-9+k^2)x^3 + 5$ اکیداً نزولی است. مجموع مقادیر صحیح k چقدر است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۴ ④

۲ ③

۱ ②

۰ ①



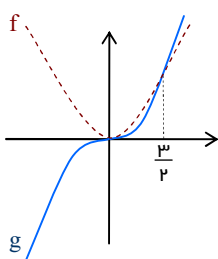
۲- نمودار تابع $y = k(x-a)^3 - b$ به صورت مقابل است. مقدار $a+k$ کدام است؟

10 ②
27

1 ①
3

4 ④
9

11 ③
27



۳- در شکل مقابل نمودار توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = ax^3 + bx^2 + c$ آمده؛ مقدار $a+b+c$ کدام است؟

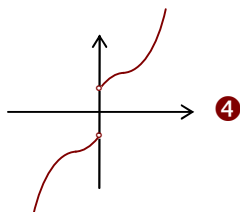
4 ②
9

3 ①
2

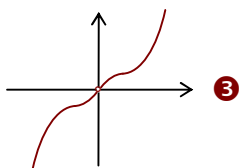
2 ④
3

9 ③
4

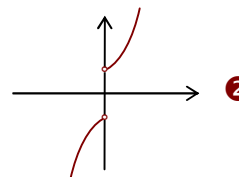
۴- نمودار تابع $f(x) = x(x^2 + 3|x| + \frac{1}{|x|} + 3)$ شبیه کدام است؟



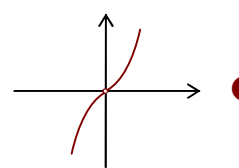
④



③



②



①

روشی برای ساخت توابع جدید (توسط دو تابع f و g):

ایستگاه ۱: تابع مرکب

ضابطه:

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad \text{محاسبه مقادیر تابع مرکب } g \circ f:$$

یعنی:

در ضابطه g ، باید جای x عبارت $f(x)$ قرار گیرد.

دامنه:

طبق ضابطه $g(f(x))$ ، باید هم $x \in D_f$ و هم عدد $f(x)$ عضو D_g باشد:

$$D_{g \circ f} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\}$$

یعنی:

دامنه از اشتراک‌گیری بین D_f و مجموعه جواب $f(x) \in D_g$ حاصل می‌شود.

توجه:

نتیجه‌ی ساده‌ای از مطلب بالا، گاهی مفید واقع می‌گردد:

$$D_{g \circ f} \subset D_f$$

چند نمونه:

۱) برای توابع $f(x) = \frac{1}{x}$ و $g(x) = \begin{cases} 2\sqrt{x} & x \geq 1 \\ -x + 3 & x < 1 \end{cases}$ ، مقدار $f \circ g(2/25)$ را حساب می‌کنیم:

$$f \circ g(2/25) = f(g(2/25)) = f(1/5) = f\left(\frac{2}{\sqrt{2/25}}\right) = \frac{2}{3}$$

۲) برای توابع $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$ ؛ ضابطه‌ی توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ را می‌نویسیم:

$$(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x \quad (g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = \sqrt{x^2} = |x|$$

$$(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x}$$

توجه: مانند نمونه‌ی دوم بالا:

در اکثر موارد توابع $f \circ g$ و $g \circ f$ با هم برابر نیستند.

تیب سوالات

❖ اگر $f(x) = \sqrt{a-x}$ و $g(x) = 3-x$ باشد، به ازای کدام مقدار a ، توابع f و $g \circ f$ روی محور y ها متقاطع‌اند؟

(نوبت ۲-کنکور ۱۴۰۴)

۲/۲۵ ④

۲/۵ ③

۱/۵ ②

۱/۲۵ ①

گزینه ۴

باید $f(0) = g \circ f(0)$ باشد. چون $f(0) = \sqrt{a}$ است، پس:

$$\sqrt{a} = g(\sqrt{a}) = 3 - \sqrt{a} \rightarrow \sqrt{a} = \frac{3}{2} \Rightarrow a = \frac{9}{4} = 2/25$$

---◇---

◇ اگر $f = \left\{ (2, 2), (1, -\frac{1}{2}), (3, 0) \right\}$ و $g = \left\{ (1, 3), (0, 3), (2, 0) \right\}$ ، آنگاه برد تابع $g \circ (-2f)$ کدام است؟

① $\{1\}$ ② $\{3\}$ ③ $\{0, 3\}$ ④ \emptyset

گزینه ۲ ✓

با توجه به: $-2f = \left\{ (2, -4), (1, 1), (3, 0) \right\}$ ، تابع $g \circ (-2f)$ را روی اعضای دامنه‌ی $-2f$ اثر می‌دهیم:

$$(g \circ (-2f))(2) = g(-2f(2)) = g(-4) \quad \text{تعریف نشده، چون } -4 \text{ در } D_g \text{ نیست.}$$

$$(g \circ (-2f))(1) = g(-2f(1)) = g(1) = 3 \rightarrow 3 \in R$$

$$(g \circ (-2f))(3) = g(-2f(3)) = g(0) = 3 \rightarrow 3 \in R$$

بنابراین فقط عدد ۳ در برد تابع g قرار دارد.

---◇---

◇ اگر $f(x) = 2[x] - x$ و $g(x) = f([x + f(x)])$ باشد، $g \circ f(-\frac{5}{3})$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

① ۴ ② -۴ ③ -۶ ④ ۶

گزینه ۳ ✓

چون $-\frac{5}{3} = -1 + \frac{2}{3}$ است، باید $f(-\frac{5}{3}) = 2[-\frac{5}{3}] - (-\frac{5}{3}) = -2 + \frac{5}{3} = -\frac{1}{3}$ محاسبه شود. با توجه به این که

$$-\frac{1}{3} + f(-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} + 2(-1) - (-\frac{1}{3}) = -\frac{1}{3} - 2 + \frac{1}{3} = -2$$

$$g(-\frac{1}{3}) = f(-2) = -1 + 2 = 1$$

---◇---

◇ اگر $f(x) = \sqrt{3-x}$ و $g(x) = \log_2(x^2 + 2x)$ باشند، دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟ (کنکور ۹۴)

① $[-4, 2]$ ② $[-4, -2) \cup (0, 2]$ ③ $[-4, -1] \cup (1, 2]$ ④ $[-2, 0]$

گزینه ۲ ✓

روش اول: طبق نکته‌ی قبل عمل می‌کنیم:

$$D_f: 3-x \geq 0 \Rightarrow x \leq 3 \quad \text{و} \quad D_g: x^2 + 2x > 0 \Rightarrow (x < -2 \text{ یا } x > 0)$$

بنابراین:

$$D_{f \circ g} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in (-\infty, -2) \cup (0, \infty) \mid \log_2(x^2 + 2x) \leq 3\}$$

لازم است که نامعادله‌ی لگاریتمی حل شود:

$$\log_2(x^2 + 2x) \leq \log_2 2^3 \rightarrow x^2 + 2x \leq 8 \rightarrow (x+4)(x-2) \leq 0 \Rightarrow -4 \leq x \leq 2$$

پس بالآخره جواب برابر اشتراک دو جواب $(-\infty, -2) \cup (0, \infty)$ و $[-4, 2]$ است:

$$D_{f \circ g} = [-4, -2) \cup (0, 2]$$

روش دوم: تکنیک سریع عددی؛

رد گزینه‌های ۱ و ۲ → تعریف نشده $f(g(-2)) = f(\log_p 0)$ $x = -2$:رد گزینه‌ی ۳ → تعریف نشده $f(g(-1)) = f(\log_p(-1))$ $x = -1$:

اگر $f(x) = \frac{1+x^2}{1-x^2}$ و $g(x) = \sqrt{x-x^2}$ باشند، دامنه‌ی تابع gof کدام است؟ (ریاضی ۹۶)

- ① $[0, 1]$ ② $\{0\}$ ③ $(-1, 1)$ ④ $\mathbb{R} - \{1, -1\}$

گزینه ۲

طبق تکنیک سریع عددی؛

رد گزینه‌های ۳ و ۴ → تعریف نشده $g(f(-\frac{1}{p})) = g(\frac{5}{p}) = \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{25}{p^2}} = \sqrt{-\frac{10}{p}}$ $x = -\frac{1}{p}$:رد گزینه‌ی ۱ → تعریف نشده $g(f(\frac{1}{p})) = g(\frac{5}{p}) = \sqrt{\frac{5}{p} - \frac{25}{p^2}} = \sqrt{-\frac{10}{p}}$ $x = \frac{1}{p}$:

برای تابع $f(x) = \sqrt{x-x^2}$ ، دامنه‌ی تابع fof شامل چند عدد صحیح است؟

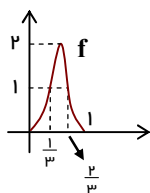
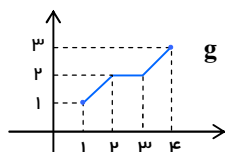
- ① ۱ ② ۲ ③ ۳ ④ ۴

گزینه ۲

با توجه به $D_f: x \geq 0$ ، باید؛

$$\sqrt{x-x^2} \geq 0 \rightarrow \sqrt{x} \geq x^2 \rightarrow x \geq x^4 \xrightarrow{-x} x^3 \leq 1 \Rightarrow x \leq 1$$

پس $D_{fof} = [0, 1]$ است.

اگر توابع f و g به شکل زیر باشند، دامنه‌ی تابع $(gof)(x)$ کدام است؟

- ① $[0, 1]$ ② $[0, \frac{1}{3}]$ ③ $[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}]$ ④ $[\frac{2}{3}, 1]$

گزینه ۳

طبق تکنیک سریع عدد گذاری با نگاه به نمودارها؛

رد گزینه‌های ۱ و ۲ → تعریف نشده $g(f(0)) = g(0)$ $x = 0$:رد گزینه‌ی ۴ → تعریف نشده $g(f(1)) = g(0)$ $x = 1$:

❖ اگر $f = \{(0,1), (1,-2), (a,-1), (4,0)\}$ ، $g = \{(-1,1), (-2,4), (7,-3), (b,1)\}$ و $D_{gof} = \{5,1,4\}$ باشد، حاصل $b-2a$ کدام است؟

۱۰ ④

-۱۰ ③

-۸ ②

۸ ①

گزینه ۳

می‌دانیم $D_{gof} \subseteq D_f$ است و بنابراین: $a=5 \Rightarrow 5 \in D_f$. از طرف دیگر، چون $4 \in D_{gof}$ باید:

$$f(4) \in D_g \rightarrow 0 \in D_g \rightarrow b=0 \Rightarrow b-2a=0-10=-10$$

---❖---

گاهی ضابطه یکی از توابع f و g و همچنین fog داده شده و تابع سوم خواسته می‌شود. دو حالت رخ می‌دهد:

ایستگاه ۲: تشخیص ضابطه

حالت اول:

اگر $f(x)$ و ترکیب $f(g(x))$ داده شده و تابع $g(x)$ خواسته شود:

در این حالت:

با استفاده از ضابطه‌ی $f(x)$ ، عبارت $f(g(x))$ را با مجهول $g(x)$ تشکیل داده و با $f(g(x))$ داده شده برابر قرار می‌دهیم.

حالت دوم:

وقتی ترکیب $f(g(x))$ و $g(x)$ داده شده و $f(x)$ خواسته شود، اگر با قرار دادن $g(x)=t$ ، بتوان x را بر حسب t حساب کرد؛

با جایگزینی در $f(g(x))$ بر حسب t ، ضابطه‌ی تابع f معلوم خواهد شد.

اگر محاسبه x بر حسب t ممکن نباشد، راهکار چنین است:

عبارت $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ می‌نویسیم تا از آنجا ضابطه‌ی f تشخیص داده شود.

بررسی چند نمونه:

۱) از حالت اول: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $f(g(x)) = x^2 - 1$ ، ضابطه‌ی $g(x)$ را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = x^2 + 2x \rightarrow f(g(x)) = (g(x))^2 + 2g(x) \rightarrow (g(x))^2 + 2g(x) = x^2 - 1$$

$$\rightarrow (g(x))^2 + 2g(x) + 1 = x^2 \rightarrow (g(x) + 1)^2 = x^2 \rightarrow g(x) + 1 = \pm x$$

$$\rightarrow g(x) = -1 \pm x$$

دو تابع به عنوان تابع g به دست می‌آید.

۲) از حالت دوم: در دو مورد زیر، ضابطه‌ی $f(x)$ را تعیین می‌کنیم:

الف) اگر $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = \sqrt{1-x}$ باشد:

طبق روش اول: $t = \frac{x-1}{x+1}$ و x را بر حسب t تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{x+1} = t \rightarrow tx+t = x-1 \rightarrow tx-x = -1-t \rightarrow x(t-1) = -1-t$$

$$\Rightarrow x = \frac{-1-t}{t-1} = -\frac{1+t}{t-1}$$

جایگزینی بر حسب t :

$$f(t) = \sqrt{1 + \frac{1+t}{t-1}} = \sqrt{\frac{t-1+1+t}{t-1}} = \sqrt{\frac{2t}{t-1}} \Rightarrow f(x) = \sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$

(ب) اگر $f(g(x)) = x^p + \frac{1}{x^p}$ و $g(x) = x - \frac{1}{x}$ باشد:

طبق روش دوم: باید $g(x)$ را در ضابطه‌ی $f(g(x))$ ظاهر کنیم:

$$f(g(x)) = x^p + \frac{1}{x^p} = x^p + \frac{1}{x^p} - 2 + 2 = \left(x - \frac{1}{x}\right)^p + 2 = (g(x))^p + 2 \Rightarrow f(g(x)) = (g(x))^p + 2$$

در نتیجه $f(t) = t^p + 2$ و یا همان $f(x) = x^p + 2$ است.

تیب سوالات

❖ اگر $f(x-3) = x^2 - 4x + 5$ باشد، حاصل $f(1-x)$ کدام است؟ (کنکور ۹۰)

④ $x^2 + 1$

③ $x^2 + 4x + 5$

② $x^2 + 3$

① $x^2 - 4x + 5$

گزینه ۱ ✓

قرار می‌دهیم $x-3 = t$ ؛ در این صورت $x = t+3$ و:

$$f(x-3) = x^2 - 4x + 5 \rightarrow f(t) = (t+3)^2 - 4(t+3) + 5 \Rightarrow f(t) = t^2 + 2t + 2$$

جای t عبارت $1-x$ را قرار می‌دهیم:

$$f(1-x) = (1-x)^2 + 2(1-x) + 2 = x^2 - 4x + 5$$

--- ❖ ---

❖ اگر $gof(x) = 5x^2 + 11$ و $f(x) = 2x$ باشد، کمترین مقدار $g(x-7)$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

④ ۱۱

③ ۹

② ۷

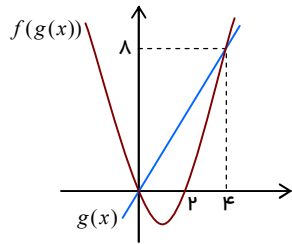
① ۳

گزینه ۴ ✓

چون $g(2x) = 5x^2 + 11$ است، کافی است جای x قرار دهیم $\frac{x}{2}$ تا ضابطه‌ی g تعیین شود:

$$g(x) = g\left(2\left(\frac{x}{2}\right)\right) = 5\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 11 = \frac{5}{4}x^2 + 11 \rightarrow g(x-7) = \frac{5}{4}(x-7)^2 + 11 \xrightarrow{x=7} \min g(x-7) = 11$$

--- ❖ ---



نمودار توابع $g(x)$ و سهمی $f(g(x))$ به صورت روبه‌رو است.

مقدار $f(-1)$ کدام است؟

② $-\frac{3}{4}$

① $\frac{3}{4}$

④ $-\frac{5}{4}$

③ $\frac{5}{4}$

گزینه ۳

ضابطه‌ی $g(x) = 2x$ واضح است. ضابطه‌ی $f(g(x))$ با توجه به ریشه‌ها به صورت $y = ax(x-2)$ پیوده و چون از نقطه‌ی $(4, 8)$ عبور کرده است:

$$8 = a(4)(4-2) \rightarrow a = 1 \rightarrow f(g(x)) = x^2 - 2x \xrightarrow{g(x)=2x} f(2x) = x^2 - 2x$$

طبق روش بالا، $f(t) = \frac{t^2}{4} - t$ است و در نتیجه:

$$f(-1) = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

--- ③ ---

تمرین تست (۲)



۱- اگر $f(x) = x^2 - 2[x]$ باشد، مقدار $f\left(-\frac{1}{4}f(\sqrt{3})\right)$ کدام است؟

④ $1/75$

③ $2/5$

② $2/75$

① $2/25$

۲- اگر $f(x) = |x|$ و $g(x) = x^2 + 2x + 1$ ، آنگاه حاصل $(fog - gof)(1 - \sqrt{2})$ کدام است؟

④ $4\sqrt{2} - 8$

③ $8 - 4\sqrt{2}$

② $4 - 4\sqrt{2}$

① $4\sqrt{2} - 4$

۳- برای $f = \{(2, 5), (3, 4), (4, 7), (6, 3)\}$ و $g = \{(1, 3), (3, 2), (4, 5), (2, 1)\}$ برد تابع $fo(2g)$ کدام است؟

④ $\{3, 4, 5, 7\}$

③ $\{7, 5, 3\}$

② $\{4, 5, 7\}$

① $\{5, 3\}$

۴- اگر $f(x) = x - \sqrt{x}$ ، $g = \{(1, 7), (5, 4), (4, 2), (2, -3)\}$ و $f\left(g\left(\frac{a}{3}\right)\right) = 2$ باشد، مقدار a کدام است؟

④ ۵

③ ۳

② $\frac{5}{3}$

① ۱۵

۵- اگر $f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{x} & x > 0 \\ \sqrt{-x} & x \leq 0 \end{cases}$ ، آنگاه $f(f(f(-1)))$ کدام است؟

④ $\frac{1}{9}$

③ $-\frac{1}{9}$

② $-\frac{1}{3}$

① $\frac{1}{3}$

۶- اگر $f(x) = \begin{cases} -2 & x > 0 \\ x^2 + 1 & x \leq 0 \end{cases}$ آنگاه $f(f(-x^2))$ کدام است؟

- ① -۴ ② -۲ ③ $x^2 + 1$ ④ $x^4 + 1$

۷- اگر $f(x) = \frac{2x-1}{x+1}$ و $g(x) = \frac{2x+2}{2-x}$ باشند، ضابطه‌ی تابع $g(f(x))$ کدام است؟

- ① $x-1$ ② $x+1$ ③ x ④ $2x$

۸- اگر $f(x) = \begin{cases} x+2 & x < 1 \\ 2x-3 & x \geq 1 \end{cases}$ و $g(x) = \begin{cases} x^2+1 & x \leq 0 \\ \frac{x-1}{x+1} & x > 0 \end{cases}$ باشد، مقدار $(f \circ g) \circ f$ در $x=0$ کدام است؟

- ① -۴ ② -۶ ③ -۲ ④ ۴

۹- برای توابع $f = \{(1, -2), (2, 2), (0, -1)\}$ و $g \circ f = \{(0, \sqrt{3}), (1, -4)\}$ حاصل $f(2g(-1)^2 - 3)$ کدام است؟

- ① ۰ ② -۱ ③ ۲ ④ تعریف نشده

۱۰- اگر $f(x) = 2x + 2a$ ، $g(x) = x^2 + bx + c$ و $f \circ g(x) = 2x^2 + x + 1$ باشند، حاصل $a + b + c$ کدام است؟

- ① ۱ ② -۱ ③ -۲ ④ ۲

۱۱- اگر $f(x) = (2x-3)^2$ و $g(x) = x+2$ ، نمودارهای دو تابع f و $f \circ g$ با کدام طول متقاطع‌اند؟ (کنکور ۹۲)

- ① $\frac{3}{2}$ ② ۱ ③ -۱ ④ $\frac{1}{2}$

۱۲- اگر $f(x) = x^2 + x$ و $g(x) = \sqrt{4x+1}$ باشند، مساحت ناحیه‌ی محدود به نمودار تابع $f \circ g$ و خط به معادله‌ی $y=3$

کدام است؟ (کنکور ۹۵)

- ① ۴ ② ۶ ③ $4/5$ ④ ۳

۱۳- اگر $f(x) = \sqrt{5-x}$ و $g(x) = x^2 + 4x$ ، آنگاه دامنه‌ی تابع $f \circ g$ کدام است؟

- ① $[-5, 1]$ ② $[-4, 1]$ ③ $[-1, 5]$ ④ $(-\infty, 5]$

۱۴- برای تابع $f(x) = 2 - \sqrt{x}$ دامنه‌ی $f \circ f$ بازه‌ی $[a, b]$ است. میانگین a و b کدام است؟

- ① ۴ ② ۲ ③ ۱ ④ ۳

۱۵- اگر $f(x) = \begin{cases} 1 & x > 1 \\ x^2 & x < 1 \end{cases}$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ f$ کدام است؟

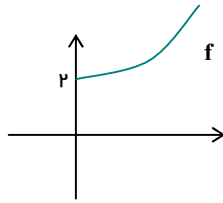
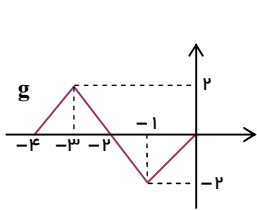
- ① \mathbb{R} ② $\mathbb{R} - \{1\}$ ③ $(-\infty, 1)$ ④ $(-\infty, 1) - \{-1\}$

۱۶- تابع $f = \{(2, 1), (3, 2), (4, 5), (1, 7)\}$ و $g = \{(1, 2), (3, 1), (a, 3), (b, 1)\}$ مفروض‌اند. اگر $(4, 2) \in f \circ g$ و

$(4, 1) \in g \circ f$ باشند، دوتایی (a, b) کدام است؟ (ریاضی ۹۰)

- ① $(3, 4)$ ② $(4, 3)$ ③ $(4, 5)$ ④ $(5, 4)$

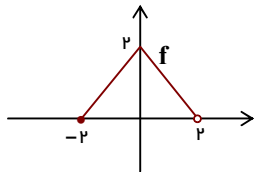
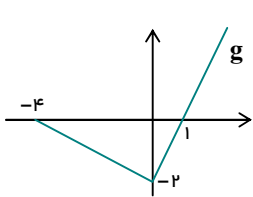
۱۷- برای توابع f و g با نمودارهای زیر، دامنه $f \circ g$ کدام است؟



- ① $[-4, 0]$
 ② $[-4, -2] \cup \{0\}$
 ③ $[0, 2]$
 ④ $\{-4, -3, -2, -1, 0\}$

۱۸- با توجه به نمودارهای مقابل، چند عدد صحیح در دامنه تابع $f \circ g$

قرار دارد؟



- ② ۶
 ④ ۸

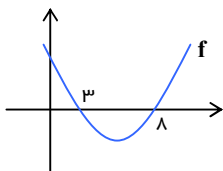
- ① ۵
 ③ ۷

۱۹- اگر $g(x) = 2x - 3$ و $(f \circ g)(x) = 4(x^2 - 4x + 5)$ باشند، تابع $f(x)$ کدام است؟ (ریاضی ۹۳)

- ① $x^2 - 4x + 3$ ② $x^2 - 4x + 5$ ③ $x^2 - 2x + 5$ ④ $x^2 - 2x + 3$

۲۰- اگر $f(x) = \sqrt{10x - x^2}$ و $g(x) = \frac{1}{x+|x|}$ باشند، دامنه $f \circ g - g \circ f$ کدام است؟

- ① $[\frac{1}{20}, +\infty)$ ② $(0, 10)$ ③ $[\frac{1}{20}, 10)$ ④ $(\frac{1}{10}, 10]$



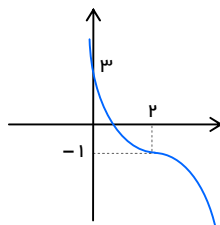
۲۱- نمودار تابع درجه دوم f به صورت مقابل، $g(x) = x + 2\sqrt{x}$ و نمودار $f \circ g$

محور طول را در نقاط a و b قطع می‌کند. مقدار $a+b$ کدام است؟

- ① ۱ ② ۴
 ③ ۵ ④ ۱۱

۲۲- نمودار تابع $f(x) = a(x-b)^3 + c$ به صورت زیر، $g = \{(1, 5), (-1, 4), (-3, 1)\}$ و $(f \circ g)(-3) = \frac{m}{2}$ است. مقدار

$(2f + g)(m)$ کدام است؟



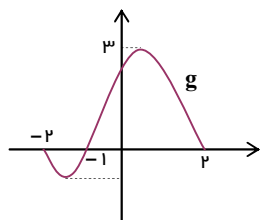
- ① $-16/5$
 ② -29
 ③ 29
 ④ $16/5$

۲۳- اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $(g \circ f)(x) = \frac{x^2+1}{x+1}$ ، آنگاه مقدار $g(2)$ کدام است؟

- ① $2/5$ ② $3/5$ ③ 2 ④ 3

۲۴- اگر $f(x) = x^2 - x - 2$ و $f(g(x)) = x^2 + x - 2$ باشد، آنگاه $(f + g)(x)$ کدام می‌تواند باشد؟

- ① $x^2 + 1$ ② $x^2 - 1$ ③ $x^2 + 2x$ ④ $x^2 - 2x$



۲۵- اگر $f(x) = 4x^2 - 2$ و نمودار تابع g در دامنه‌ی تعریف خود به صورت روبه‌رو

باشد، آنگاه دامنه‌ی تعریف تابع $g \circ f$ کدام است؟

- ① $[-1, 1]$ ② $[\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2}]$ ③ $[-\frac{\sqrt{5}}{2}, -\frac{1}{2}]$ ④ $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$

۲۶- فرض کنید $g(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$ و $f(x) = 1 - x^2$. تعداد نقاط نایبوستگی تابع $g \circ f$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۲۷- نمودار تابع g محور x را در نقاطی به طول ۱ و $2\sqrt{2}$ قطع می‌کند. اگر $f(x) = x\sqrt{x}$ باشد، اختلاف طول نقاطی که

نمودار تابع $g \circ f$ محور x را قطع می‌کند، کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

- ① ۱ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ④ $\sqrt{2}$

**یادآوری: (انتقال عمودی)**

در رسم نمودار $y = f(x) + k$ ، طول نقاط نمودار f ثابت مانده و فقط عرض نقاط تغییر می‌کند:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه k به **پایین** منتقل می‌شود.

برای نمونه؛ رسم نمودار $y = f(x) - 1$ توسط نمودار f به صورت زیر است:



می‌بینید:

در این انتقال، دامنه ثابت مانده، ولی برد از $[0, 2]$ به $[-1, 1]$ تبدیل شده است.

روشی دیگر برای تغییر عمودی نمودار:

ایستگاه ۱: انبساط و انقباض

در نمودار $y = kf(x)$ ، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض‌ها در k ضرب می‌شود. بنابراین:

- اگر $k > 1$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده‌تر می‌شود. (نمودار **انبساط** عمودی می‌یابد.)
- اگر $0 < k < 1$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع‌تر می‌شود. (نمودار **انقباض** عمودی می‌یابد.)

حالت ویژه:

در رسم نمودار $y = -f(x)$ ، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

در انتقال، انبساط و انقباض عمودی، همیشه:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و فقط معمولاً برد تغییر می‌کند.

دقیق‌تر:

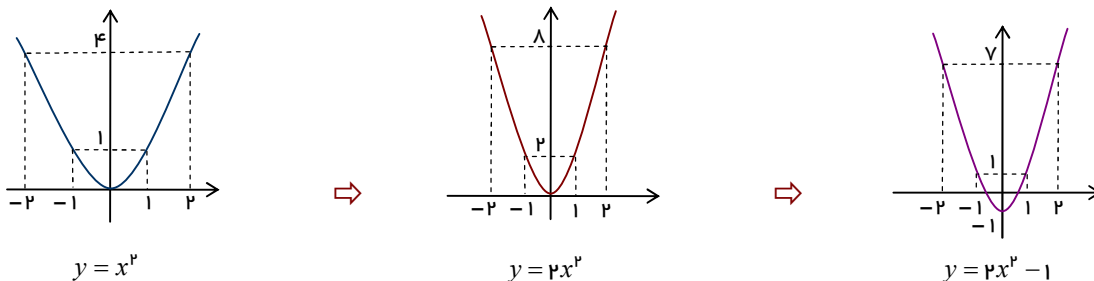
- در تابع $f(x) + k$ ، مقادیر واقع در برد f با k جمع می‌شوند.
- در تابع $kf(x)$ ، مقادیر واقع در برد f در k ضرب می‌شوند.

بویژه:

در تعیین برد $-f(x)$ ، کافی است برد f را نسبت به مبدأ قرینه کنید. (بیان دیگر: ضرب در -1)

بررسی چند نمونه:

(۱) رسم نمودار تابع $g(x) = 2x^2 - 1$ در دو مرحله توسط نمودار $y = x^2$:



(۲) در تابع $f(x) = 2 - \sqrt{2-x}$ ، چون $R_f = (-\infty, 2]$ است، برد تابع $y = f(x) - 1$ به صورت $(-\infty, 1]$ و برد تابع $y = -2f(x) + 3$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$R_{f(x)} = (-\infty, 2] \xrightarrow{x(-2)} R_{-2f(x)} = [-4, +\infty) \xrightarrow{+3} R_{-2f(x)+3} = [-1, +\infty)$$

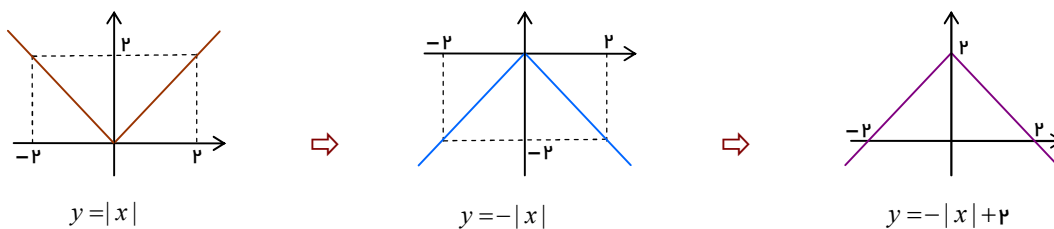
تیب سوالات

مساحت محدود به نمودار $y = -|x| + 2$ و محور طول‌ها کدام است؟

- ۱ ① ۲ ② ۴ ③ $\frac{1}{2}$ ④

گزینه ۳

با دو تغییر و په سادگی نمودار رسم می‌شود:



محدوده‌ی مورد نظر مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S = \frac{2 \times 4}{2} = 4$$

برد تابع f برابر $[-1, 2]$ است. اگر برد تابع $y = -\frac{1}{a}f(x) + b$ برابر $[-1, 1]$ باشد، ab کدام است؟ ($a > 0$)

- ۴ ① $\frac{4}{7}$ ② $\frac{7}{4}$ ③ ۷ ④

گزینه ۳

چون $-\frac{1}{a}$ عددی منفی است، برد تابع $-\frac{1}{a}f(x)$ به صورت $[-\frac{2}{a}, \frac{1}{a}]$ خواهد شد. بنابراین برد تابع $y = -\frac{1}{a}f(x) + b$ به صورت $[-\frac{2}{a} + b, \frac{1}{a} + b]$ بوده و خواهیم داشت:

$$-\frac{2}{a} + b = -1 \quad \text{و} \quad \frac{1}{a} + b = 1$$

از تفریق طرفین دو معادله داریم:

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a} = 1 + 1 \rightarrow 3a = 2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}$$

با جایگذاری در معادله اول: $b = -1 + \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}$ است و بنابراین:

$$ab = \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{9}$$

نوع دیگری از تغییرات عمودی نمودار:

ایستگاه ۲: تأثیر قدرمطلق

حالت کلی:

در رسم نمودار $y = |f(x)|$:

عرض نقاطی از نمودار f که منفی است، قرینه و مثبت خواهند شد.

بنابراین:

فقط قسمت‌های زیر محور طول، به صورت قرینه در بالا رسم شوند. (بقیه بدون تغییر)

موارد ویژه:

روشی سریع برای رسم توابع «گلدان» یا «آبشار» و موارد مشابه مانند:

$$y = |ax \pm b| \pm |cx \pm d| \quad \text{و} \quad y = |ax \pm b| \pm |cx \pm d|$$

مراحل رسم (بدون حفظ فرمول):

- ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین کنید.
- یک عدد قبل از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بعد از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیرید.
- مقدار تابع را در ریشه‌ها و نقاط مرحله‌ی قبل مشخص کنید.
- این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و به طور متوالی توسط پاره خط‌هایی به هم اتصال دهید.

بررسی چند نمونه:

۱) رسم $y = |f(x)|$ توسط نمودار f .

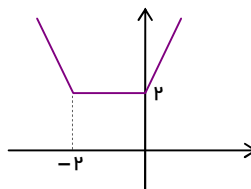


۲) رسم نمودار تابع $y = |x+2| + |x|$ ؛ ابتدا تعیین ریشه‌ها:

$$|x+2|: x+2=0 \rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad |x|: x=0$$

سپس تشکیل جدول مقادیر با دو عدد کمکی:

x	-۳	-۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴

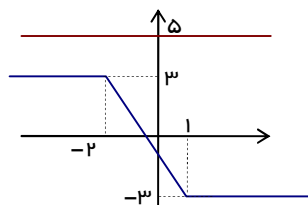


توجه کنید:

ابتدا و انتهای نمودار، نیم‌خط بوده و تا بی‌نهایت ادامه دارند.

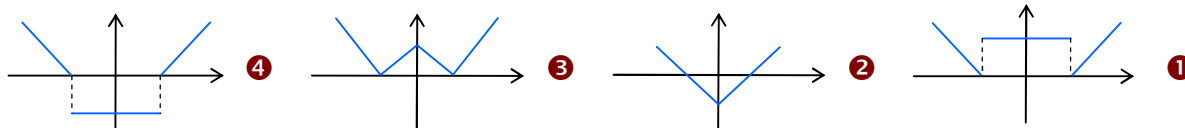
۳) تعداد جواب‌های معادله $|x-1| - |x+2| = 5$ را مشخص می‌کنیم. برای این کار، نمودار $y = |x-1| - |x+2|$ را مانند قبل و خط $y = 5$ را رسم کرده تا برخوردهای آن‌ها تعداد جواب‌ها را معلوم کند:

x	-۳	-۲	۱	۲
y	۳	۳	-۳	-۳



چون نمودارها برخوردی ندارند، معادله هیچ جوابی ندارد.

❓ منحنی نمایش تابع $f(x) = ||x| - 2|$ شبیه کدام است؟



کزینه ۳

روش اول: (جابجایی نمودارها)

نمودار را در سه مرحله‌ی زیر به سادگی رسم کنید. (به عهده‌ی داوطلبان)

$$y = |x| \longrightarrow y = |x| - 2 \longrightarrow y = ||x| - 2|$$

روش دوم: (تکنیک سریع عددی)

در تابع f داریم $f(0) = 2$ ، پس گزینه‌های دو و چهار رد می‌شوند. در x ‌های نزدیک صفر، $||x| - 2|$ از ۲ باید کوچک‌تر باشد و بنابراین گزینه‌ی یک نیز نادرست است.

تمرین تست (۳)



- ۱- نقطه $(-1, 3)$ روی نمودار تابع f قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار $y = -3f(x) + 4$ کدام است؟
 ① $(-1, 5)$ ② $(3, 5)$ ③ $(3, -5)$ ④ $(-1, -5)$
- ۲- نقطه $(3, -2)$ روی نمودار تابع $y = -3f(x) + 4$ قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار $y = \frac{1}{3}f(x) - 1$ کدام است؟
 ① $(3, 0)$ ② $(3, 5)$ ③ $(3, -5)$ ④ $(3, -\frac{3}{4})$
- ۳- در مورد ریشه‌های معادله $x^3 = -|x| + 2$ ، کدام مورد درست است؟
 ① فقط یک ریشه مثبت ② فقط یک ریشه منفی ③ دو ریشه مختلف‌العلامت ④ بدون ریشه

تغییر افقی نمودار

یادآوری: (انتقال افقی)

دو حالت برای انتقال افقی نمودار وجود دارد: ($a > 0$)

رسم نمودار $y = f(x+a)$

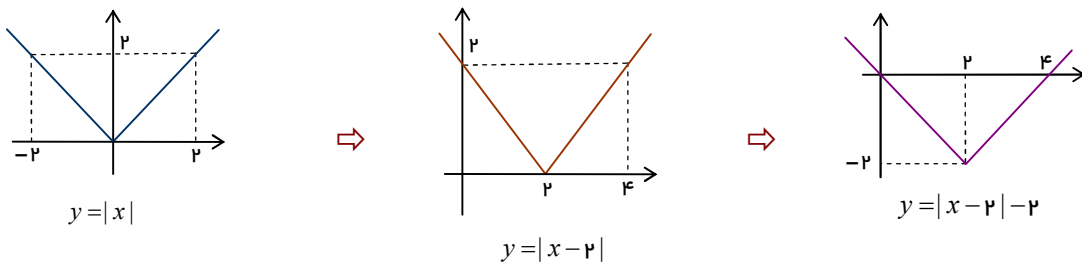
نمودار f را به اندازه a و در **جهت افقی به سمت چپ** منتقل می‌کنیم.

رسم نمودار $y = f(x-a)$

نمودار f را به اندازه a و در **جهت افقی به سمت راست** منتقل می‌کنیم.

برای نمونه:

نمودار تابع $f(x) = |x-2| - 2$ را با تغییرات مناسب نمودار $y = |x|$ رسم می‌کنیم.



تیب سوالات

نمودار تابع $f(x) = x^3 - 3x$ با کدام انتقال‌ها بر نمودار $g(x) = x^3 + 3x^2 + 1$ منطبق می‌شود؟

- ① واحد به راست و ۱ واحد به بالا
 ② واحد به چپ و ۳ واحد به بالا
 ③ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین
 ④ واحد به راست و ۲ واحد به پایین

گزینه ۲

چون در g جمله $3x^2 + 3x$ داریم، باید در f تبدیل $x \mapsto x+1$ (یعنی: ۱ واحد انتقال به چپ) داشته باشیم:

$$f(x+1) = (x+1)^3 - 3(x+1) = x^3 + 3x^2 - 2$$

اکنون کافی است $f(x+1) + 3$ (یعنی: ۳ واحد انتقال به بالا) را در نظر بگیریم تا $g(x)$ ساخته شود.

نمودار تابع $y = 3 - \sqrt{2x}$ را ابتدا یک واحد در امتداد محور x در جهت منفی و سپس قرینه آن نسبت به محور x را

۵ واحد در امتداد محور y در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. طول نقطه برخورد نمودار تابع جدید با تابع ثابت $f(x) = \frac{y}{p}$

کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

- ① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{16}$

گزینه ۳

کافی است تغییر ضابطه را به ترتیب انجام دهیم:

$$y = 3 - \sqrt{2x} \xrightarrow{x \rightarrow x+1} y = 3 - \sqrt{2x+2} \xrightarrow{f(x) \rightarrow -f(x)} y = \sqrt{2x+2} - 3$$

$$\xrightarrow{y \rightarrow y+5} y = \sqrt{2x+2} + 2$$

نقاط نمودارها:

$$\sqrt{2x+2} + 2 = \frac{9}{2} \xrightarrow{\sqrt{2x+2} = \frac{5}{2}} 2x+2 = \frac{25}{4} \Rightarrow x = \frac{9-2}{4} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{1}{4}$$

نمودار $\frac{1}{f}$ را در امتداد محور x ها، a واحد در جهت مثبت انتقال داده و آن را g می‌نامیم. سپس تابع $|g|$ را در امتداد

محور y ها، 2 واحد در جهت منفی انتقال می‌دهیم. طول نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع $\frac{1}{|f|}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است. اگر

f تابع همانی باشد، اختلاف مقادیر در تساوی $f(x+a) = 3$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

- ① $2 + \sqrt{2}$ ② $2 - \sqrt{2}$ ③ 2 ④ $\sqrt{2}$

گزینه ۲

با توجه به این که $f(x) = x$ است، $g(x) = \frac{1}{x-a}$ بوده؛ برخورد دو نمودار گفته شده را به کار می‌پریم:

$$\frac{1}{|x-a|} - 2 = \frac{1}{|x|} \xrightarrow{x = \frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{|\frac{\sqrt{2}}{2} - a|} - 2 = \frac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}} \rightarrow \frac{1}{|a - \frac{\sqrt{2}}{2}|} = 2 + \sqrt{2}$$

$$\rightarrow |a - \frac{\sqrt{2}}{2}| = \frac{1}{2 + \sqrt{2}} \times \frac{2 - \sqrt{2}}{2 - \sqrt{2}} \rightarrow |a - \frac{\sqrt{2}}{2}| = \frac{2 - \sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$$

تعیین دو مقدار برای a :

$$a - \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow a = 1 \quad , \quad a - \frac{\sqrt{2}}{2} = -(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}) \Rightarrow a = \sqrt{2} - 1$$

تساوی $f(x+a) = 3$ در صورت $x = 3 - a$ است؛ جایگزینی و سپس تعیین اختلاف دو مقدار:

$$(x = 3 - 1 = 2 \quad , \quad x = 3 - (\sqrt{2} - 1) = 4 - \sqrt{2}) \Rightarrow 4 - \sqrt{2} - 2 = 2 - \sqrt{2}$$

روشی مهمی در تغییر افقی نمودار:

ایستگاه: انبساط و انقباض

در رسم نمودار $y = f(kx)$:

- ◆ نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار مشخص می‌کنیم.
- ◆ طول این نقاط بر k تقسیم (یا: در $\frac{1}{k}$ ضرب) شده و عرض‌ها ثابت می‌ماند.

در نتیجه:

- اگر $0 < k < 1$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده‌تر می‌شود، (انبساط افقی می‌یابد).
- اگر $k > 1$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع‌تر می‌شود، (انقباض افقی می‌یابد).

حالت ویژه:

در رسم نمودار $y = f(-x)$ کافی است:

نمودار تابع f نسبت به محور عرض قرینه شود.

تذکره ۱: (تغییر دامنه و برد)

در تغییرات افقی نمودار، بدیهی است که طبق مفاهیم بالا:

برد تابع ثابت مانده و دامنه معمولاً تغییر می‌کند.

دقیق‌تر:

- دامنه‌ی $f(x-a)$: مقادیر دامنه‌ی f با عدد a جمع می‌شوند.
- دامنه‌ی $f(x+a)$: عدد a از مقادیر دامنه‌ی f کم می‌شود.
- دامنه‌ی $f(kx)$: مقادیر دامنه‌ی f بر عدد k تقسیم (یا در $\frac{1}{k}$ ضرب) می‌شوند.

بویژه:

در تعیین دامنه‌ی $f(-x)$ ، کافی است دامنه‌ی $f(x)$ را نسبت به مبدأ قرینه کنید. (به عبارت دیگر: ضرب در -1)

تذکره ۲: (بسیار مهم)

در انواع جابه‌جایی نمودار تابع، دو راهکار زیر را رعایت کنید:

۱) در کل:

ضریب x یا قرینه سازی آن را در آخرین گام تأثیر دهید.

۲) وقتی x با ضریب منفی (مانند: $f(-x-2)$ یا $f(-2x+1)$) وجود دارد:

- ضریب x را موقتاً مثبت کرده و نمودار آن ضابطه را کامل رسم کنید.
- در پایان، نمودار را نسبت به محور عرض قرینه کنید تا نمودار مورد نظر حاصل شود.

بررسی چند نمونه:

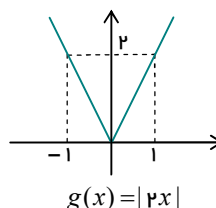
الف) نمودار توابع $g(x) = |2x|$ و $h(x) = \left|\frac{x}{2}\right| - 1$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x) = |x|$ رسم می‌کنیم.

- چون $g(x) = f(2x)$ ، باید انقباض افقی با $k = 2$ رسم شود:

$$(-2, 2) \in f \xrightarrow{k=2} \left(\frac{-2}{2}, 2\right) = (-1, 2) \in g$$

$$(0, 0) \in f \longrightarrow \left(\frac{0}{2}, 0\right) = (0, 0) \in g$$

$$(2, 2) \in f \longrightarrow \left(\frac{2}{2}, 2\right) = (1, 2) \in g$$



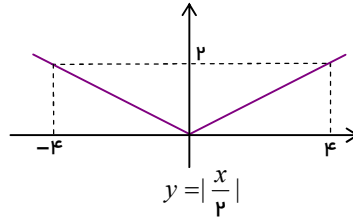
$g(x) = |2x|$

• برای رسم تابع h ، ابتدا انبساط افقی $|\frac{x}{p}|$ را رسم می‌کنیم:

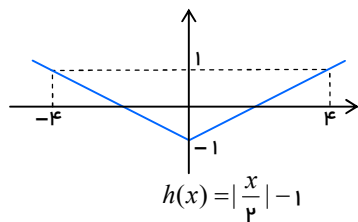
$$(-p, p) \in f \xrightarrow{k=\frac{1}{p}} \left(\frac{-p}{\frac{1}{p}}, p\right) = (-p^2, p)$$

$$(0, 0) \in f \longrightarrow \left(\frac{0}{\frac{1}{p}}, 0\right) = (0, 0)$$

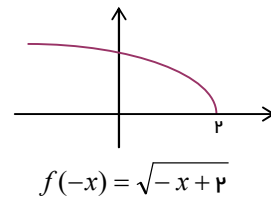
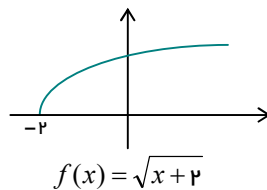
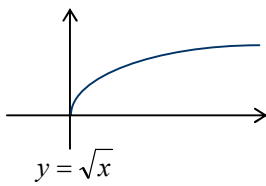
$$(p, p) \in f \longrightarrow \left(\frac{p}{\frac{1}{p}}, p\right) = (p^2, p)$$



اکنون کافی است، عرض نقاط یک واحد کم شود:



ب رسم نمودار $y = \sqrt{-x+2}$ به صورت زیر انجام می‌شود:



پ برای رسم $f(2x-1)$ و $f(-2x+1)$ ، طبق مراحل زیر عمل کنید:

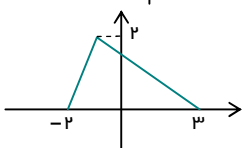
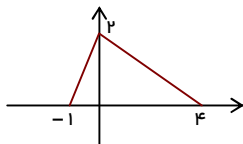
$$f(x) \longrightarrow f(x-1) \longrightarrow f(2x-1) \quad \frac{1}{p} \text{ ابتدا یک واحد به راست و سپس ضرب طول نقاط در } \frac{1}{p}$$

$$f(x) \longrightarrow f(x+1) \longrightarrow f(2x+1) \longrightarrow f(-2x+1)$$

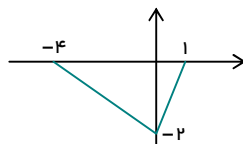
ابتدا یک واحد به چپ، سپس انقباض با ضریب ۲ و در پایان قرینه نسبت به محور عرض

تیب سوالات

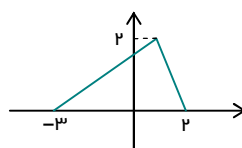
❓ نمودار تابع $f(\frac{1+x}{p})$ به صورت مقابل است. نمودار $f(\frac{-x+1}{p})$ کدام است؟



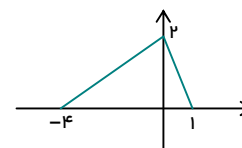
④



③



②

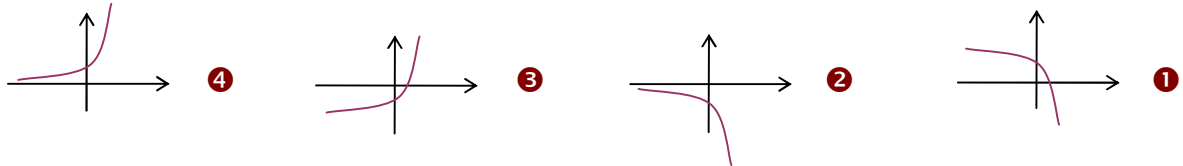


①

گزینه ۱

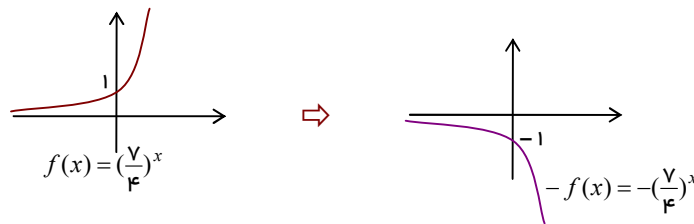
طبق مطلب قبل، فقط نمودار نسبت به محور عرض قرینه می‌شود.

نمودار تابع $y = -\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$ شبیه کدام است؟



گزینه ۲

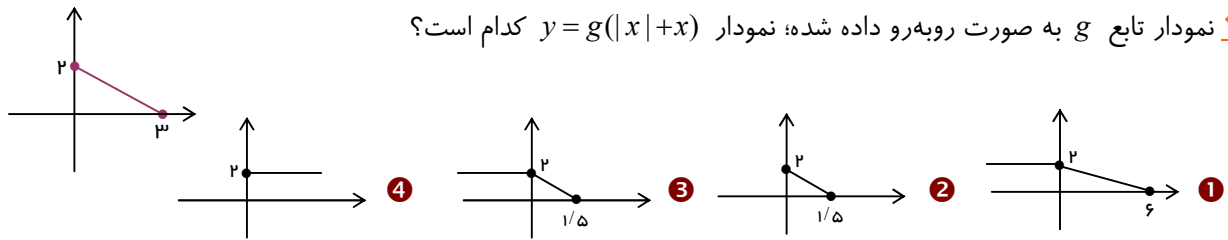
بهتر است ابتدا بنویسیم: $y = -\left(\frac{3}{4}\right)^x$. پس نمودار نمایی و صعودی $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ را تقریبی رسم کرده و سپس قرینه نسبت به محور طول:



روش دیگر:

رسم $y = \left(\frac{4}{3}\right)^x$ ، سپس رسم $y = \left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$ (قرینه نسبت به محور عرض) و در پایان $y = -\left(\frac{4}{3}\right)^{-x}$ (قرینه نسبت به محور طول).

نمودار تابع g به صورت روبه‌رو داده شده؛ نمودار $y = g(|x| + x)$ کدام است؟



گزینه ۳

ضابطه‌ی y را در دو حالت، ساده‌تر می‌نویسیم:

$$x < 0 : y = g(-x + x) = g(0) = 2$$

$$x \geq 0 : y = g(x + x) = g(2x)$$

پنجاهمین در سمت چپ مبدأ باید خط افقی $y = 2$ و در سمت راست مبدأ، نمودار انتقاضی از نمودار g با تقسیم طول نقاط بر ۲ رسم شده باشد.

دامنه تابع $y = f(x)$ و $y = f(kx)$ برابر $[b, c]$ است. اگر $k = 2a^2 - a - 5$ باشد، حاصل ضرب مقادیر a کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

④ ۳

③ -۳

② -۲/۵

① ۲/۵

گزینه ۳

چون دامنه‌ی f با انقباض $f(kx)$ تغییر نکرده، پس $k=1$ بوده است. جایگذاری و حل معادله:

$$1 = 2a^2 - a - 5 \rightarrow 2a^2 - a - 6 = 0 \rightarrow \frac{c}{a} = \frac{-6}{2} = -3$$

---◇---

◇ نقطه $(9, 5)$ روی نمودار $y = 3 - f(1 + \frac{x}{3})$ قرار دارد. نقطه متناظر آن روی نمودار $y = 3f(-2x+1) - 4$ کدام است؟④ $(\frac{3}{2}, 2)$ ③ $(-\frac{3}{2}, -10)$ ② $(\frac{3}{2}, 10)$ ① $(-\frac{3}{2}, -2)$

گزینه ۳

جایگذاری مختصات نقطه در ضابطه:

$$5 = 3 - f(1 + \frac{9}{3}) = 3 - f(4) \rightarrow f(4) = -2$$

پناپراین $(4, -2)$ نقطه‌ی متناظر روی نمودار f بوده است. تغییرات این نقطه در $y = 3f(-2x+1) - 4$:افقی (تغییرات طول):

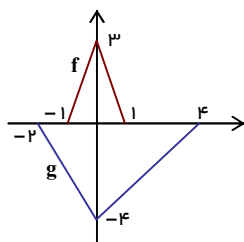
$$\text{اول: } x+1 \rightarrow x \rightarrow 3 \rightarrow 4 \text{ دوم: } x+1 \rightarrow 2x+1 \rightarrow 3 \rightarrow \frac{3}{2} \text{ سوم: } -2x+1 \rightarrow 2x+1 \rightarrow -\frac{3}{2} \rightarrow \frac{3}{2}$$

عمودی:

$$\text{اول: } 3y \rightarrow y \rightarrow -6 \rightarrow -2 \text{ دوم: } 3y-4 \rightarrow 3y \rightarrow -10 \rightarrow -6$$

پس نقطه‌ی مورد نظر $(-\frac{3}{2}, -10)$ بوده است.

---◇---

◇ در شکل مقابل، نمودارهای دو تابع f و g را در یک دستگاه مختصاتمی‌بینید. ضابطه‌ی f بر حسب تابع g کدام است؟

② $-\frac{3}{4}g(3(x+1))$

① $-\frac{3}{4}g(3x+1)$

④ $-\frac{4}{3}g(3(x-1))$

③ $-\frac{4}{3}g(3x-1)$

گزینه ۱

با قدری دقت می‌پسند که کافی است:

۱) نمودار g یک واحد به چپ: $g(x+1)$ ۲) انقباض افقی با ضریب ۳: $g(3x+1)$ ۳) انقباض عمودی با ضریب $-\frac{3}{4}$: $-\frac{3}{4}g(3x+1)$

---◇---

تذکر مهم: (با دقت به‌واید!)

در عبارتی مانند $f(3-x)$ ، دو مفهوم: دامنه f و دامنه $f(3-x)$ متفاوت بوده و لازم است به آن توجه داشته باشید:• دامنه‌ی $f(3-x)$ یعنی مقادیری که می‌توانند جای x قرار گیرند. (در واقع، دامنه تابع مرکب!)

برای نمونه:

اگر دامنه‌ی $f(3-x)$ برابر $[-1, 2]$ داده شود، باید $-1 \leq x \leq 2$ بوده و می‌توان دامنه‌ی f را تعیین کرد:

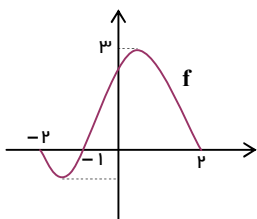
$$-2 \leq -x \leq 1 \xrightarrow{+3} 1 \leq 3-x \leq 4 \Rightarrow D_f = [1, 4]$$

• دامنه‌ی f یعنی مقادیری که می‌توانند به تابع وارد شوند.

برای نمونه:

اگر دامنه‌ی f برابر $[-1, 1]$ داده شده، و دامنه‌ی $f(3-x)$ خواسته شود، باید $3-x$ در $[-1, 1]$ باشد:

$$-1 \leq 3-x \leq 1 \xrightarrow{-3} -4 \leq -x \leq -2 \xrightarrow{\times(-)} 2 \leq x \leq 4 \Rightarrow D_{f(3-x)} = [2, 4]$$

❓ نمودار تابع f به صورت روبه‌رو داده شده؛ دامنه‌ی تابع

$$y = \frac{1-2f(2+x)}{f(-x)}$$
 شامل چند عدد صحیح کدام است؟

- ۳ ۲
۲ ۴

- ۴ ۱
۱ ۳

گزینه ۴ ✓

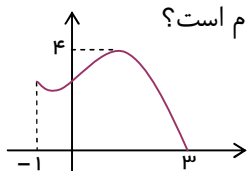
با توجه به $D_f = [-2, 2]$ ، تعیین دامنه‌های صورت و مخرج (ترتیب: راست به چپ):

$$-2 \leq -x \leq 2 \Rightarrow -2 \leq x \leq 2 \quad \text{و} \quad -2 \leq 2+x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq x \leq 0$$

اشتراک دامنه‌ها $-2 \leq x \leq 0$ است؛ واضح است که در این محدوده، مخرج فقط به ازای $x = -2$ صفر می‌شود. بنابراین:

$$D_y = (-2, 0] \Rightarrow x = -1, 0$$

--- ❖ ---

❓ اگر نمودار تابع $y = 3f(2x-1) + 1$ به صورت مقابل باشد، دامنه‌ی تابع $f\left(\frac{x}{2}\right) + 3$ کدام است؟

- $[-6, 10]$ ۲
 $[-3, 13]$ ۴

- $[0, 1]$ ۱
 $[2, 3]$ ۳

گزینه ۲ ✓

با توجه به شکل، عددهای موجود در بازه‌ی $[-1, 3]$ را می‌توان در $y = 3f(2x-1) + 1$ جای x قرار داد:

$$-1 \leq x \leq 3 \xrightarrow{\times 2} -2 \leq 2x \leq 6 \xrightarrow{-1} -3 \leq 2x-1 \leq 5$$

یعنی:

عددهای موجود در بازه‌ی $[-3, 5]$ را می‌توان در تابع f قرار داد و بنابراین:

$$D_f = [-3, 5] \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} D_{f\left(\frac{x}{2}\right)+3} = \left[\frac{-3}{2}, \frac{5}{2}\right] = [-1.5, 2.5]$$

--- ❖ ---

نهمین تست (۴)

۱- نمودار $y = |2-x| + 1$ محورهای مختصات را در چند نقطه قطع می‌کند؟

④ ۳

③ ۲

② ۱

① ۰

۲- اگر برد تابع f برابر $[-2, 1]$ باشد، برد تابع $g(x) = 2f(x+3) + 1$ کدام است؟

④ $[0, \frac{3}{2}]$ ③ $[-2, 4]$ ② $[-3, 3]$ ① $[3, 9]$

۳- اگر $f(x) = \sqrt{x^2 - 2x - 8}$ و $g(x) = \sqrt{x+2} + 1$ باشند، با کدام یک از روش‌های زیر، نمودار $f \circ g$ بر نمودار g منطبق می‌شود؟

② ۹ واحد به راست و ۱ واحد به پایین

① ۹ واحد به چپ و ۱ واحد به پایین

④ ۹ واحد به چپ و ۱ واحد به بالا

③ ۹ واحد به راست و ۱ واحد به بالا

۴- نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را در امتداد محور x ها، ۱۲ واحد در جهت مثبت و سپس در امتداد محور y ها، ۲ واحد در جهت مثبت انتقال می‌دهیم. فاصله‌ی نقطه‌ی برخورد منحنی حاصل با نمودار تابع f ، از مبدأ مختصات کدام است؟ (کنکور ۹۹)

④ $6\sqrt{10}$ ③ $4\sqrt{17}$ ② $6\sqrt{7}$ ① $4\sqrt{15}$

۵- با کدام تغییرات $f(x) = x^2 - 2x - 3$ به $y = -x^2$ تبدیل می‌شود؟

① سه واحد انتقال به بالا، یک واحد به راست و قرینه نسبت به محور طول

② چهار واحد انتقال به پایین، یک واحد به چپ و قرینه نسبت به محور طول

③ سه واحد انتقال به بالا، قرینه نسبت به محور طول، یک واحد انتقال به چپ و قرینه نسبت به محور عرض

④ چهار واحد انتقال به بالا، قرینه نسبت به محور عرض، یک واحد انتقال به راست و قرینه نسبت به محور طول

۶- نمودار تابع $f(x) = x^3$ را یک واحد به راست و دو واحد به سمت بالا انتقال می‌دهیم تا تابع g حاصل شود. مقدار $g(\sqrt[3]{4} + 1)$ کدام است؟

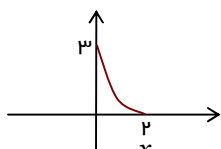
④ ۸

③ ۶

② ۴

① ۲

۷- نمودار تابع f به صورت زیر داده شده است. نمودار تابع $y = \frac{2}{3}f(x-1) - 1$ کدام محور را قطع می‌کند؟



② فقط عرض

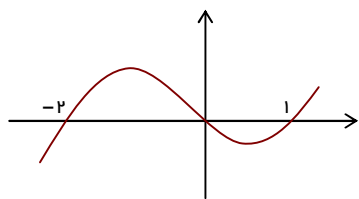
① فقط طول

④ هیچ یک

③ هر دو

۸- اگر دامنه و برد f به ترتیب $[-1, 3]$ و $[1, 5]$ باشند، تفاضل برد از دامنه‌ی تابع $g(x) = 3 - 2f(1 - \frac{x}{2})$ کدام است؟

④ $[-7, -4]$ ③ $[-7, -4]$ ② $[-4, 4]$ ① $(1, 4]$



۹- شکل روبه‌رو، نمودار تابع f است. دامنه‌ی تابع $y = \sqrt{-\frac{f(x)}{f(2+x)}}$ شامل چند

عدد صحیح است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

- ۱ ۳
 ۲ ۶
 ۳ ۴
 ۴ ۵

۱۰- اگر $f(x) = x^3 - 6x^2 + 12x$ و $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x$ باشد، ضابطه‌ی g با کدام انتقال از تابع $\sqrt[3]{x^2 - 9}$ ساخته می‌شود؟

- ۱ واحد به چپ و ۲ واحد به پایین
 ۲ واحد به راست و ۱ واحد به بالا
 ۳ واحد به راست و ۱ واحد به بالا
 ۴ واحد به راست و ۲ واحد به پایین

۱۱- نقطه $(1, \frac{1}{3})$ روی نمودار $y = -\frac{2}{3}f(1-2x) + 3$ است. نقطه متناظر آن روی نمودار $y = -f(-\frac{x}{2}-1) - 1$ کدام است؟

- ۱ $(2, -5)$
 ۲ $(-2, 5)$
 ۳ $(0, -5)$
 ۴ $(2, 5)$

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برفی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری درصد ۱۰۰ در آزمون‌ها»

ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید...

تذکر ساده:

هرگاه لازم باشد که دو چند جمله‌ای یکسان (برابر) باشند، باید ضرایب جملات با درجه‌ی یکسان آن‌ها با هم برابر باشند. برای نمونه:

$$ax^2 + bx + c - 2 = -x + 2x^2 + 3 \Rightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -1 \\ c - 2 = 3 \Rightarrow c = 5 \end{cases}$$

چند جمله‌ای $g(x)$ طوری داده شده که $f(x) = \frac{2x^2 + ax + b}{g(x) - 16}$ یک تابع با دامنه‌ی $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ و برد $\{-2\}$ است.

حاصل $\frac{f(b)}{g(a) - 2}$ کدام است؟

4 تعریف نشده

3 $-\frac{1}{4}$

2 $-\frac{1}{9}$

1 $-\frac{1}{2}$

گزینه ۲

برای این که دامنه $\mathbb{R} - \{-2, 2\}$ باشد، مخرج باید مضرب عبارت زیر باشد:

$$(x-2)(x+2) = x^2 - 4$$

با توجه به برد $\{-2\}$ ، باید f تابع ثابت $f(x) = -2$ باشد، و بنابراین لازم است ضریب x^2 در مخرج -1 باشد:

$$g(x) - 16 = -(x^2 - 4) \rightarrow g(x) = -x^2 + 20$$

$$\frac{2x^2 + ax + b}{-x^2 + 20} = -2 \rightarrow 2x^2 + ax + b = 2x^2 - 40 \rightarrow a = 0, b = -40$$

اکنون:

$$g(a) - 2 = g(0) - 2 = 20 - 2 = 18 \Rightarrow \frac{f(b)}{g(a) - 2} = \frac{-2}{18} = -\frac{1}{9}$$

--- ---

نمودارهای تابع خطی f و تابع درجه دوم g محور عرض‌ها را به ترتیب در ۲ و ۳ قطع می‌کنند. اگر

$fog(x) = 2x^2 + x - 1$ باشد، آنگاه $(f-g)(x)$ کدام است؟

4 $2x^2 - 1$

3 $x^2 + x - 1$

2 $x^2 - 2$

1 $-2x^2 - 2x + 1$

گزینه ۴

طبق شرایط داده شده $f(x) = ax + 2$ و $g(x) = bx^2 + cx + 3$ را به صورت مجهول در نظر می‌گیریم. باید:

$$f(g(x)) = a(bx^2 + cx + 3) + 2 = 2x^2 + x - 1 \rightarrow abx^2 + acx + 3a + 2 = 2x^2 + x - 1$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 3a + 2 = -1 \Rightarrow a = -1 \\ -1c = 1 \Rightarrow c = -1 \\ -1b = 2 \Rightarrow b = -2 \end{cases}$$

بنابراین:

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = -x + 2 - (-2x^2 - x - 3) = 2x^2 - 1$$

اگر $f(x) = \frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2}$ و $g(x) = \frac{1}{\sqrt{x} - 2}$ باشد، چند عدد طبیعی در دامنه‌ی تابع $g \circ f$ قرار ندارد؟

۴

۵

۲

۳

گزینه ۳

واضح است که $f(4)$ وجود ندارد. با توجه به $g(f(x))$ ، سایر نقاط مشکل‌دار دو نوع هستند:

اول: اگر $f(x)$ منفی شود، طبق روش کوتاه در حل نامعادلات:

$$\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} < 0 \rightarrow 2 < \sqrt{x} < 3 \Rightarrow x = 5, 6, 7, 8$$

دوم: با توجه به مخرج g ، جواب $\frac{\sqrt{x} - 3}{\sqrt{x} - 2} = 4$ نیز قابل قبول نیست:

$$\sqrt{x} - 3 = 4\sqrt{x} - 8 \rightarrow 3\sqrt{x} = 5 \Rightarrow x = \frac{25}{9} \quad (\text{طبیعی نیست})$$

جواب فقط اعداد طبیعی ۴، ۵، ۶، ۷ و ۸ است.

برای توابع $f(x) = 2x + a$ و $g(x) = \frac{x}{x + a}$ ، می‌دانیم طول نقطه‌ی تقاطع نمودارهای $f \circ g$ و $g \circ f$ بزرگ‌تر از $-a$

نبوده؛ بزرگ‌ترین مقدار ممکن برای a کدام است؟

۴

۳

۲

۱

گزینه ۴

تشکیل معادله‌ی $f \circ g(x) = g \circ f(x)$ و حل آن:

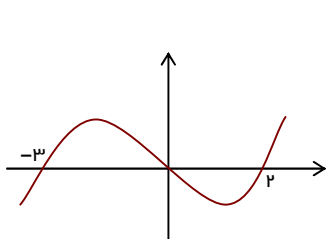
$$\frac{2x}{x+a} + a = \frac{2x+a}{2x+a+a} \rightarrow \frac{2x+a}{2(x+a)} - \frac{2x}{x+a} = a \rightarrow \frac{2x+a-4x}{2x+2a} = a$$

$$\rightarrow 2ax + 2a^2 = a - 2x \Rightarrow x = \frac{a - 2a^2}{2a + 2}$$

طبق شرط گفته شده:

$$\frac{a - 2a^2}{2a + 2} \leq -a \rightarrow \frac{a - 2a^2 + 2a^2 + 2a}{2a + 2} \leq 0 \rightarrow \frac{3a}{2a + 2} \leq 0$$

مجموعه جواب نامعادله به روش سریع $[-1, 0)$ و بزرگ‌ترین مقدار a برابر صفر است.



با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{f(x+1)}{f(2-x)}}$

شامل چند عدد صحیح است؟

۸ ④

۷ ③

۶ ②

۵ ①

گزینه ۳

چون f در نقاط -۳ ، ۰ و ۲ برابر صفر است:

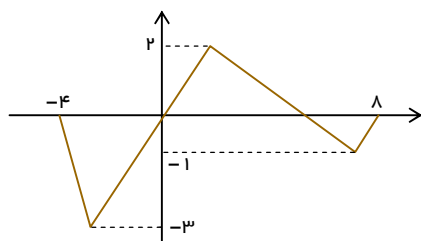
$f(x+1)$ در نقاط -۴ ، -۱ و ۱ و $f(2-x)$ در نقاط ۵ ، ۲ و ۰ برابر صفر خواهد شد. (چرا؟)

اکنون می‌توانیم زیر رادیکال؛ $P = \frac{f(x+1)}{f(2-x)}$ را تعیین علامت کنیم: (به روش سریع)

x	-۴	-۱	۰	۱	۲	۵
P	$-$	$+$	$-$	$+$	$-$	$+$

پناپراین:

دامنه به صورت $(-۴, -۱] \cup (۰, ۱] \cup (۲, ۵)$ و شامل ۷ عدد صحیح است.



نمودار تابع $y = f\left(\frac{2-x}{3}\right)$ به صورت روبه‌رو است. اجتماع دامنه و

برد تابع $y = 2 - f\left(-\frac{x}{3}\right)$ کدام است؟

② $[-۴, ۵]$ ① $[-۴, ۹]$ ④ $[۰, ۹]$ ③ $[۰, ۵]$

گزینه ۲

برد f با چابچایی‌های افقی آن $y = f\left(\frac{2-x}{3}\right)$ یکسان است. پس: $R_f = [-۳, ۲]$. دامنه‌ی f را مشخص می‌کنیم:

$$-۴ \leq x \leq 8 \rightarrow -8 \leq -x \leq 4 \rightarrow -6 \leq 2-x \leq 6 \Rightarrow -2 \leq \frac{2-x}{3} \leq 2$$

پس $D_f = [-۲, ۲]$ است. اکنون دامنه و برد تابع دوم را تعیین می‌کنیم:

$$-2 \leq -\frac{x}{3} \leq 2 \xrightarrow{\times(-3)} -4 \leq x \leq 4 \Rightarrow D = [-4, 4]$$

$$-3 \leq f\left(-\frac{x}{3}\right) \leq 2 \xrightarrow{\times(-)} -2 \leq -f\left(-\frac{x}{3}\right) \leq 3 \xrightarrow{+2} 0 \leq 2 - f\left(-\frac{x}{3}\right) \leq 5 \Rightarrow R = [0, 5]$$

چون $[-۴, ۴] \cup [0, 5] = [-۴, 5]$ است.

برای تبدیل نمودار $y = 2f(2+3x) - 1$ به $y = f(x)$ کدام ترتیب مراحل درست است؟

① انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{3}$ ، انتقال ۲ واحد به راست و انبساط افقی با ضریب ۳

② انتقال یک واحد به بالا، انبساط عمودی با ضریب ۲، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به راست

③ انتقال دو واحد به راست، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{3}$ ، انبساط افقی با ضریب ۳ و انتقال ۲ واحد به بالا

۴ انتقال یک واحد به بالا، انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{p}$ ، انبساط افقی با ضریب p و انتقال p واحد به راست

گزینه ۴

مراحل لازم را یک به یک بیان می‌کنیم:

- **یک واحد انتقال به بالا:** تبدیل $y = pf(p+3x) - 1$ به $y = pf(p+3x)$.
- **انقباض عمودی با ضریب $\frac{1}{p}$:** تبدیل $y = pf(p+3x)$ به $y = f(p+3x)$.
- **انبساط افقی با ضریب p :** تبدیل $y = f(p+3x)$ به $y = f(p+\frac{1}{p}x)$.
- **انتقال دو واحد به راست:** تبدیل $y = f(p+x)$ به $y = f(p+(x-p)) = f(x)$.

نمودار $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 3}{x^2 + x + 1}$ را m واحد به راست و n واحد به پایین انتقال می‌دهیم تا بر نمودار $g(x) = \frac{2x - x^2}{x^2 - x + 1}$

منطبق شود. اگر m و n اعدادی طبیعی باشند، مقدار $m - n$ کدام است؟

۱ ۴

۰ ۳

۲ ۲

-۱ ۱

گزینه ۱

ضابطه‌ها را می‌توان مشابه نوشت:

$$g(x) = \frac{-(x-1)^2 + 1}{(x-\frac{1}{p})^2 + \frac{3}{4}} \quad \text{و} \quad f(x) = \frac{(x+1)^2 + 2}{(x+\frac{1}{p})^2 + \frac{3}{4}}$$

پس اگر یک واحد به راست برویم (یعنی: $m = 1$)، مخرج f به مخرج g تبدیل می‌شود:

$$f(x-1) = \frac{x^2 + 2}{(x-\frac{1}{p})^2 + \frac{3}{4}}$$

بعلاوه، پایده: $f(x-1) - n = g(x)$ باشد:

$$n = f(x-1) - g(x) = \frac{x^2 + 2}{x^2 - x + 1} - \frac{2x - x^2}{x^2 - x + 1} = \frac{2(x^2 - x + 1)}{x^2 - x + 1} = 2$$

در نتیجه $m - n = 1 - 2 = -1$ خواهد بود.

۴ در تابع خطی نزولی $y = f(x)$ ، نمودار تابع fof را با ضریب p در راستای محور طول منقبض کرده، نمودار را یک واحد

به صورت عمودی به پایین انتقال داده و در پایان نمودار را نسبت به محور عرض قرینه می‌کنیم. اگر نمودار تابع بر نیمساز ربع

دوم و چهارم منطبق شود، عرض از مبدأ تابع f کدام است؟

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \quad ۴$$

$$\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}} \quad ۳$$

$$\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}} \quad ۲$$

$$\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1} \quad ۱$$

گزینه ۱

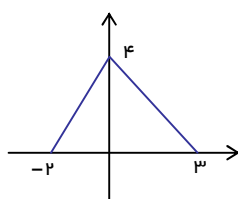
قرار می‌دهیم: $f(x) = ax + b$, ($a < 0$)، مراحل گفته شده:

$$f(f(x)) = a(ax+b) + b = a^2x + ab + b \xrightarrow{x \rightarrow 3x} y = 3a^2x + ab + b$$

$$\xrightarrow{-1} y = -3a^2x + ab + b - 1 \xrightarrow{x \rightarrow -x} y = -3a^2x + ab + b - 1$$

این ضابطه باید به صورت $y = -x$ باشد. بنابراین:

$$-3a^2 = -1 \rightarrow a = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{a < 0} a = -\frac{1}{\sqrt{3}} \xrightarrow{ab+b-1=0} b(a+1) = 1 \Rightarrow b = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-1}$$



نمودار تابع $y = f(2x-1)$ به صورت مقابل داده شده، مساحت محدود به

نمودار $y = -2f(4x+1)$ و محور طول کدام است؟

۲۰ ②

۱۰ ①

۱۵ ④

۵ ③

گزینه ۱

از لحاظ افقی: $2x \mapsto 4x$ ، انقباض یا ضریب ۲ داشته‌ایم، پس قاعده مثلث از ۵ به $\frac{5}{2}$ تبدیل می‌شود. از لحاظ عمودی، انبساط یا ضریب ۲ (در واقع -2 ، ولی با طول سروکار داریم و علامت مهم نیست!) رخ داده و بنابراین ارتفاع مثلث از ۴ به ۸ تبدیل خواهد شد.

$$S = \frac{8 \times \frac{5}{2}}{2} = 10$$

ایستگاه ۱: برد تابع مرکب

برای تعیین برد تابع $y = g(f(x))$ ، در صورت امکان:

(۱) با توجه به دامنه f و تحلیل مقادیر یا نمودار، برد آن را مشخص کنید.

(۲) برد f را به عنوان دامنه‌ی g گرفته و مجدداً با تحلیل مقادیر یا نمودار، برد g را در این دامنه (= برد تابع $g \circ f$) تعیین کنید.

توجه کنید:

در انجام این روش، شناخت نمودار توابع معروف ضروری است.

تیب سوالات

اگر $f(x) = x - [x]$ و $g(x) = \sqrt{2-x}$ باشد، برد تابع $g \circ f$ کدام است؟

$(1, \sqrt{2}]$ ④

$[1, \sqrt{2}]$ ③

$[0, \sqrt{2}]$ ②

$(0, \sqrt{2}]$ ①

گزینه ۴

چون x با $[x]$ کمتر از یک واحد اختلاف دارد، $R_f = [0, 1)$ بوده و بنابراین باید برد $g(x) = \sqrt{2-x}$ در این بازه تعیین شود. واضح است که مقادیر تابع در محدوده $1 < g(x) \leq \sqrt{2}$ خواهند بود.

برد تابع $f(x) = 2^{|x| - |x+2|}$ شامل چند عدد صحیح است؟

۴ ④

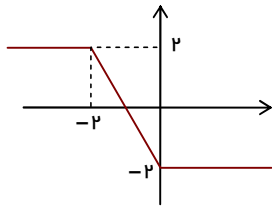
۳ ③

۲ ②

۱ ①

گزینه ۴ ✓

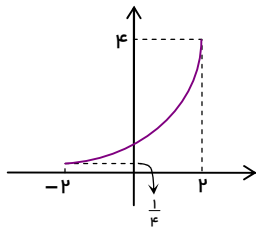
نمودار $y = |x| - |x+2|$ به روش سریع بالا رسم می‌شود:



چون برد این تابع $[-2, 2]$ است، پس تابع $y = 2^x$ را با دامنه $-2 \leq x \leq 2$ در نظر می‌گیریم.

طبق نمودار تابع نمایی:

برد این تابع: $[\frac{1}{4}, 4]$ شامل چهار عدد صحیح ۱ تا ۴ است.





ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱- دو تابع با ضابطه‌های $f(x) = [x] + [-x]$ و $g(x) = x^2 + x - 2$ مفروض‌اند. اگر $g(f(x)) = -2$ باشد، مجموعه مقادیر x کدام است؟

∅ ④

\mathbb{R} ③

\mathbb{Z} ②

$\mathbb{R} - \mathbb{Z}$ ①

۲- اگر $f(x) = x + [x]$ و $g(x) = x - [x]$ باشد، آنگاه ضابطه‌ی $f \circ g(x)$ برابر کدام است؟ (براکت \equiv جزء صحیح)

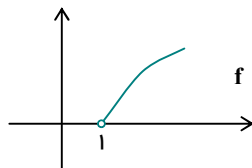
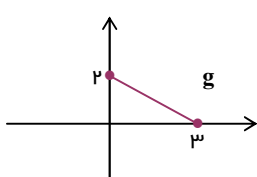
$(f-g)(x)$ ④

$(f+g)(x)$ ③

$g(x)$ ②

$f(x)$ ①

۳- برای توابع f و g با نمودارهای زیر، طول بازه‌ی دامنه‌ی $f \circ g$ کدام است؟

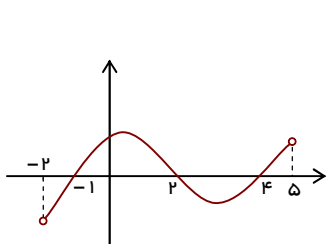


۱ ②

$\frac{1}{2}$ ①

۲ ④

$\frac{3}{2}$ ③



۴- با توجه به نمودار تابع f در شکل مقابل، دامنه‌ی تابع $g(x) = \sqrt{\frac{x^2 - 2x}{f(3-x)}}$

شامل چند عدد صحیح است؟

- ① ۴ ② ۲ ③ ۳ ④ ۶

۵- اگر $f(x) = \tan x$ و $g(x) = \frac{2x(1-x^2)}{x^2+1+2x^2}$ باشند، مقدار تابع $g \circ f(x)$ به ازای $x = \frac{\pi}{24}$ کدام است؟

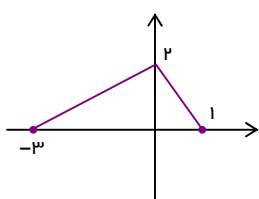
- ① $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{1}{2}$ ④ $\frac{1}{4}$

۶- اگر f تابعی خطی، $f \circ g(x) = 2x^2 - 6x - 1$ و $g \circ f(x) = 4x^2 - 10x + 4$ باشد، طول نقطه‌ی برخورد نمودار f با محور طول‌ها کدام است؟

- ① -۲ ② -۱ ③ ۱ ④ $\frac{1}{2}$

۷- اگر $f(x) = \sqrt{1-|x|}$ و $g(x) = 3-2x$ باشد، دامنه‌ی تابع $f \circ g + g \circ f$ کدام است؟

- ① $\{1\}$ ② $\{1, 2\}$ ③ $[-1, 1]$ ④ $[-1, 2]$



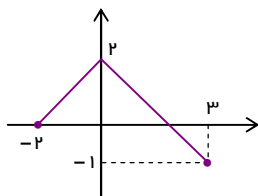
۸- نمودار تابع f به صورت مقابل است. اگر نمودار تابع $y = f\left(\frac{a-2x}{3}\right)$ نمودار f را

قطع نکند، حداقل مقدار طبیعی a کدام است؟

- ① ۷ ② ۶ ③ ۵ ④ ۴

۹- در تابع f داریم: $D_f = [a, b]$ ، $D_f \cap D_{f(-x)} = \{c\}$ و $D_{f(x)} \cup D_{f(-x)} = [-4, k]$. حاصل $a+b$ کدام می‌تواند باشد؟

- ① ۲ ② -۲ ③ -۴ ④ ۰



۱۰- نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت مقابل است. اگر اشتراک دامنه و برد تابع

$g(x) = a - 2f\left(\frac{x}{2} - a\right)$ مجموعه‌ای تک عضوی باشد، مجموع مقادیر ممکن برای a

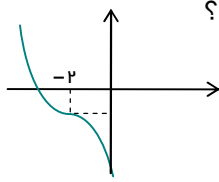
کدام است؟

- ① ۸ ② ۲ ③ -۴ ④ -۶

۱۱- فرینه نمودار تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} & x \geq 0 \\ x^2 + 2x + 6 & x < 0 \end{cases}$ نسبت به محور عرض را یک واحد به راست و شش واحد به پایین

انتقال می‌دهیم. کمترین طول برخورد نمودار حاصل با محور x کدام است؟

- ① ۳ ② -۳۵ ③ -۳ ④ -۵۱



۱۲- نمودار تابع $y = ax^3 - bx^2 - 3x + c$ به صورت روبه‌رو داده شده؛ مقدار b کدام است؟

۲ $\frac{3}{2}$ ②

۴ $\frac{3}{4}$ ①

۲ $-\frac{3}{2}$ ④

۴ $-\frac{3}{4}$ ③

۱۳- اگر $g(x) = \sqrt{1-x}$ و $f(g(x)) = \sqrt{2 - \sqrt{1-x} - x}$ باشد، برد تابع $f + g$ در دامنه‌ی $(-3, -1)$ کدام است؟

۲ $(0, 2)$ ④

۶ $(2 + \sqrt{2}, 6)$ ③

۴ $(\sqrt{2} - \sqrt{2}, 4)$ ②

۲ $(\sqrt{2}, 2)$ ①

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴