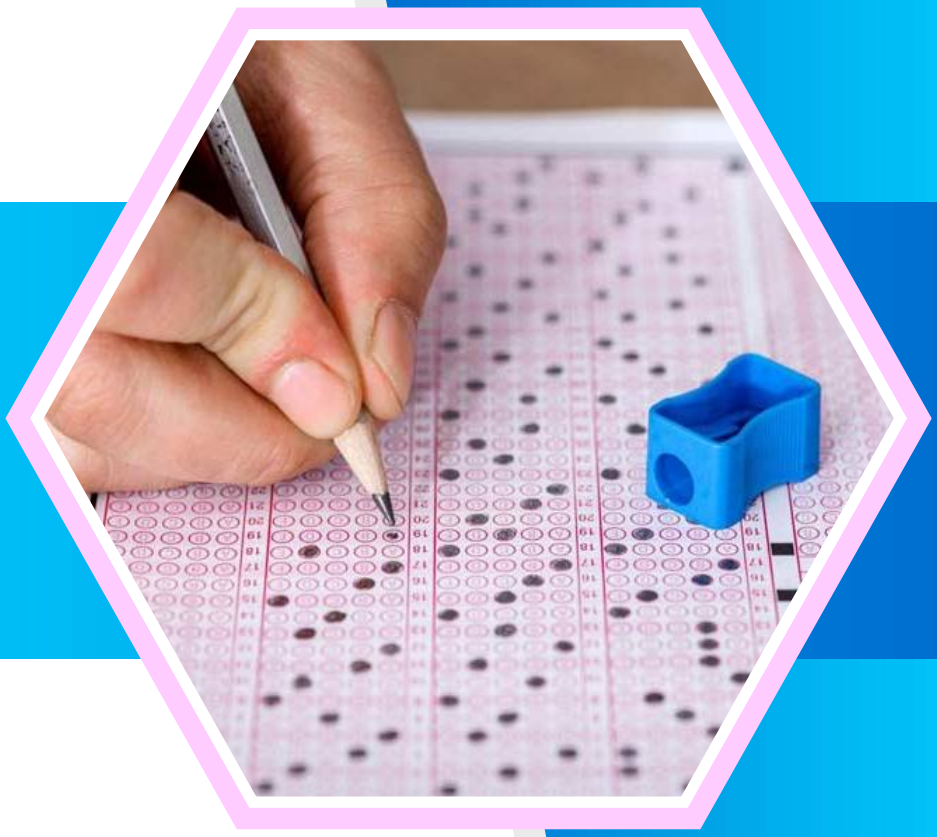
درسنامه ریاضیات انسانی

نمونه آموزش:

ریاضی و آمار (۱)



Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

جزئیات این مجموعه

توجه:

این محتوا، شامل آموزش تشریحی (نهایی) و همچنین ریاضیات کنکور رشته انسانی در یک مجموعه، البته به صورت تفکیک شده است.



پوشش سؤالات امتحانی (نهایی)، آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها

Up to date

فهرست

۱ **اتحاد و معادله** — حل معادله درجه اول، یادآوری اتحاد و تجزیه — ۲

۲ **معادله درجه ۲** — روش‌های حل معادله درجه ۲، معادله گویا و کاربرد — ۳۲

۳ **تابـع** — معرفی تابع و ضابطه، نمودار پیکانی و مختصاتی — ۷۲

۴ **نمودار تابع** — بررسی کامل نمودار توابع درجه اول و درجه دوم — ۱۰۴

۵ **داده و متغیر** — آمار، جامعه و نمونه، جمع‌آوری داده‌ها، انواع متغیر — ۱۳۹

۶ **شاخص‌ها** — مد، میانه، میانگین و شاخص‌های پراکندگی — ۱۶۲

۷ **نمایش داده‌ها** — روش رسم نمودارهای یک متغیره و چند متغیره — ۱۹۴

تشریحی & کنکور

ریاضی و آمار ۱



۲

معادلات درجه دوم و گویا

فهرست	صفحه
■ حل معادله به روش تجزیه	۳۳
■ حل معادله به روش مربع کامل	۳۷
■ حل معادله به روش دلتا	۴۰
■ حل معادلات گویا	۴۶
■ ویژه کنکور	۵۰
■ تمرینِ تست	۶۷

۱ حل معادله با تجزیه

روشی سریع برای حل بسیاری از معادله‌های درجه دوم را در این بخش می‌آوریم.

تبدیل به ضرب:

قاعده‌ی زیر در عبارت‌های ضربی برقرار است:

$$P\times Q=0 \Rightarrow P=0 \quad \text{یا} \quad Q=0$$

یعنی:

اگر معادله به صورت $P\times Q=0$ نوشته شود، هم جواب‌های $P=0$ و هم جواب‌های $Q=0$ قابل قبول هستند.

مثال: معادله‌ی $(2x-1)(-x+3)=0$ را حل کنید.

پاسخ

طبق روش بالا، دو جواب برای معادله حاصل می‌شود:

$$(2x-1)(-x+3)=0 \rightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \Rightarrow x=\frac{1}{2} \\ -x+3=0 \rightarrow -x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{-1}=3 \end{cases}$$

روش تجزیه کردن:

برای حل معادله‌ی درجه‌ی دوم $ax^2+bx+c=0$ طبق روش تجزیه، چنین عمل می‌کنیم:

- عبارت سمت چپ را (در صورت امکان) تجزیه می‌کنیم.
- طبق خاصیت فوق، هر یک از عامل‌های ضرب را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$P\times Q=0 \Rightarrow \begin{cases} P=0 \\ Q=0 \end{cases}$$

از آن‌جا جواب‌های معادله تعیین می‌گردند.

مثال: معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2+5x=0$ ب) $4x^2-25=0$ ب) $x^2-10x=-16$

پاسخ

در هر مورد بعد از تجزیه، مانند قبل عمل می‌کنیم.

الف) توسط فاکتورگیری:

$$x^2+5x=x(x+5)=0 \rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x+5=0 \Rightarrow x=-5 \end{cases}$$

ب) توسط اتحاد مزدوج:

$$(۲x-۵)(۲x+۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} ۲x-۵=۰ \Rightarrow x=\frac{۵}{۲} \\ ۲x+۵=۰ \Rightarrow x=-\frac{۵}{۲} \end{cases}$$

پ) توسط اتحاد جمله مشترک:

$$x^۲-۱۰x+۱۶=۰ \rightarrow (x-۸)(x-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۸=۰ \Rightarrow x=۸ \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

مثال: (از کتاب) معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $x^۴-۲x^۲=۰$ ب) $\frac{x^۲}{۳}=x$

پاسخ

الف) با فاکتورگیری تجزیه انجام می‌شود:

$$x^۲(x^۲-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x^۲=۰ \Rightarrow x=۰ \\ x^۲-۲=۰ \rightarrow x^۲=۲ \Rightarrow x=-\sqrt{۲}, x=\sqrt{۲} \end{cases}$$

ب) خارج کردن معادله از حالت کسری و سپس روش تجزیه:

$$\frac{x^۲}{۳}=x \xrightarrow{\times ۳} x^۲=۳x \rightarrow x^۲-۳x=۰ \rightarrow x(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

مثال: هر یک از معادلات زیر را به روش تجزیه حل کنید.

الف) $x^۲-۳x=۰$ ب) $x^۲-x=۶$ پ) $۳x^۲+۴x+۱=۰$

پاسخ

الف) با فاکتورگیری تجزیه انجام می‌شود:

$$x^۲-۳x=۰ \rightarrow x(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۰ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

ب) جملات را به سمت چپ برده و تجزیه را طبق اتحاد جمله مشترک انجام می‌دهیم:

$$x^۲-x-۶=۰ \rightarrow (x+۲)(x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} x+۲=۰ \Rightarrow x=-۲ \\ x-۳=۰ \Rightarrow x=۳ \end{cases}$$

پ) چون $x^۲$ دارای ضریب است، ضریب را به مجذور تبدیل کرده و سپس طبق اتحاد جمله مشترک عمل کنیم:

$$۳x^۲+۴x+۱=۰ \xrightarrow{\times ۳} ۹x^۲+۱۲x+۳=۰ \rightarrow (۳x)^۲+۴(۳x)+۳=۰$$

$$\rightarrow (۳x+۳)(۳x+۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} ۳x+۳=۰ \rightarrow ۳x=-۳ \Rightarrow x=-۱ \\ ۳x+۱=۰ \rightarrow ۳x=-۱ \Rightarrow x=-\frac{۱}{۳} \end{cases}$$

توجه کنید:

در معادله، حق تقسیم طرفین بر عبارت شامل x را نداریم، چون ممکن است برخی جواب‌ها از دست بروند.

برای نمونه؛

اگر در معادله‌ی مثال قبل، وقتی به صورت $x^۲ = ۳x$ نوشته شد، دو طرف را بر x تقسیم کنید، دچار اشتباه شده‌اید؛ زیرا یک جواب را از دست خواهید داد:

$$x^۲ = ۳x \xrightarrow{\div x} \frac{x^۲}{x} = \frac{۳x}{x} \Rightarrow x = ۳$$

عمل برعکس حل معادله:

مثال: معادله‌ای بنویسید که $x = ۱$ و $x = -۵$ جواب‌های آن باشند.

پاسخ

طبق جواب‌های معادله، باید $x - ۱ = ۰$ و $x - (-۵) = ۰$ باشد؛ پس معادله به صورت $(x-۱)(x+۵) = ۰$ بوده است. با انجام ضرب، یک معادله‌ی درجه دوم خواهیم داشت:

$$(x-۱)(x+۵) = ۰ \rightarrow x^۲ + ۵x - x - ۵ = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۴x - ۵ = ۰$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

معادله‌ای درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن -۴ و ۳ باشند.

پاسخ

مشابه بالا:

$$\underbrace{(x-(-۴))(x-۳)}_{(x+۴)(x-۳)} = ۰ \rightarrow x^۲ - ۳x + ۴x - ۱۲ = ۰ \Rightarrow x^۲ + x - ۱۲ = ۰$$

مثال: معادله‌ای بنویسید که $x = -۳$ جواب مضاعف آن باشند.

پاسخ

معادله باید به صورت $(x-(-۳))(x-(-۳)) = ۰$ یا $(x+۳)(x+۳) = ۰$ باشد. شکل دیگر آن:

$$(x+۳)(x+۳) = ۰ \Rightarrow x^۲ + ۶x + ۹ = ۰$$

پاسخ دهید (۱)

۱- معادله‌های زیر را به روش تجزیه حل کنید:

الف) $x^۲ - ۶x = ۰$ ب) $x^۲ = ۸۱$ پ) $x^۲ - x - ۲ = ۰$

ت) $x^۲ = x - \frac{۱}{۴}$ ث) $۹x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۲- معادله‌ی درجه دوم زیر را به روش تجزیه حل کنید. **(نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)**

$$x^{۲}-۳x=۰$$

منتخب کتاب:

۱- معادله‌های زیر را به (روش تجزیه) حل کنید:

الف) $۲x^{۲}-۸=۰$

ب) $(x+۲)(x-۳)=x-۳$

پ) $\frac{x^{۲}}{۳}=x$

ت) $x^{۲}-۵x+۶=۰$

۲- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که جواب‌های آن ۲ و -۳ باشند.

۲ روش مربع کامل

روش دیگری برای حل معادلات درجه دوم را در این بخش بررسی می‌کنیم.

یادآوری:

قبلاً دیدیم که در معادله به صورت $x^۲ = a$، وقتی $a > ۰$ باشد، روش **ریشه‌گیری** چنین است:

$$x^۲ = a \Rightarrow x = \sqrt{a} \ , \ x = -\sqrt{a}$$

برای نمونه؛

روش حل معادله‌های $x^۲ - ۴x + ۴ = ۱$ و $۹x^۲ + ۶x + ۱ = ۱۶$ را به ترتیب می‌بینید:

$$(x-۲)^۲ = ۱ \rightarrow \begin{cases} x - ۲ = ۱ \rightarrow x = ۳ \\ x - ۲ = -۱ \rightarrow x = ۱ \end{cases}$$

$$(۳x+۱)^۲ = ۱۶ \rightarrow \begin{cases} ۳x + ۱ = ۴ \rightarrow ۳x = ۳ \Rightarrow x = \frac{۳}{۳} = ۱ \\ ۳x + ۱ = -۴ \rightarrow ۳x = -۵ \Rightarrow x = \frac{-۵}{۳} \end{cases}$$

مطلبی بعدی کاربرد روش بالا در حل معادله برای وقتی است که در ظاهر اتحاد مربع دیده نمی‌شود.

روش مربع کامل:

بر مبنای اتحاد مربع، معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ طبق گام‌های زیر حل می‌شود.

گام اول:

عدد ثابت (c) را به سمت راست برده و در صورتی که مقدار a برابر ۱ نباشد، تمام جملات را بر a تقسیم کنید تا ضریب $x^۲$ برابر ۱ شود. برای نمونه، اگر معادله‌ی $۲x^۲ + ۲x - ۱۲ = ۰$ داده شود:

$$۲x^۲ + ۲x = ۱۲ \xrightarrow{\div ۲} \frac{۲x^۲}{۲} + \frac{۲x}{۲} = \frac{۱۲}{۲} \Rightarrow x^۲ + x = ۶$$

گام دوم:

ضریب x را بر ۲ تقسیم کرده و مجذور عدد حاصل را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم. برای نمونه، در معادله‌ی $x^۲ + x = ۶$، چون ضریب x برابر ۱ است، عدد $(\frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۱}{۴}$ را به دو طرف اضافه می‌کنیم:

$$x^۲ + x + \frac{۱}{۴} = ۶ + \frac{۱}{۴} \rightarrow (x + \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲۴+۱}{۴} \Rightarrow (x + \frac{۱}{۲})^۲ = \frac{۲۵}{۴}$$

مانند بالا، در این مرحله:

همیشه در سمت چپ معادله، اتحاد مربع خواهیم داشت.

گام سوم:

اگر سمت راست معادله منفی نباشد، روش ریشه‌گیری را به‌کار برده و جواب‌ها معلوم می‌شوند:

$$(x+\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۲۵}{۴}\rightarrow\begin{cases}x+\frac{۱}{۲}=\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=\frac{۵}{۲}\rightarrow x=\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}=\frac{۴}{۲}\Rightarrow x=۲\\ x+\frac{۱}{۲}=-\sqrt{\frac{۲۵}{۴}}=-\frac{۵}{۲}\rightarrow x=-\frac{۵}{۲}-\frac{۱}{۲}=-\frac{۶}{۲}\Rightarrow x=-۳\end{cases}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

برای حل معادله‌ی $x^۲+۶x=۷$ به روش مربع کامل، عدد ..... را به دو طرف اضافه می‌کنیم.

پاسخ

جواب عدد ۹ است؛ زیرا:

$$۶\div۲=۳\Rightarrow ۳^۲=۹$$

مثال: معادلات زیر را به روش مربع کامل حل کنید.

الف) $x^۲-۴x+۳=۰$ ب) $۳x^۲-۳x=۱۸$

پاسخ

الف) عدد ۳ را به سمت راست پرده و طبق روش بالا، عدد $(\frac{-۴}{۲})^۲=۴$ را به دو طرف معادله اضافه می‌کنیم:

$$\underbrace{x^۲-۴x+۴}=-۳+۴\Rightarrow (x-۲)^۲=۱$$

بقیه روش حل دقیقاً مانند مثال‌های قبلی است:

$$(x-۲)^۲=۱\rightarrow\begin{cases}x-۲=۱\rightarrow x=۳\\ x-۲=-۱\rightarrow x=۱\end{cases}$$

ب) ابتدا تمام جملات را بر ضریب $x^۲$ تقسیم کرده و سپس مانند مورد (الف) عمل می‌کنیم:

$$۳x^۲-۳x=۱۸\xrightarrow{\div ۳}x^۲-x=۶\xrightarrow{(\frac{-۱}{۲})^۲=\frac{۱}{۴}}x^۲-x+\frac{۱}{۴}=۶+\frac{۱}{۴}\Rightarrow x^۲-x+\frac{۱}{۴}=\frac{۲۴+۱}{۴}$$

در نتیجه:

$$(x-\frac{۱}{۲})^۲=\frac{۲۵}{۴}\rightarrow\begin{cases}x-\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۲}\rightarrow x=\frac{۱}{۲}+\frac{۵}{۲}=\frac{۶}{۲}\Rightarrow x=۳\\ x-\frac{۱}{۲}=-\frac{۵}{۲}\rightarrow x=\frac{۱}{۲}-\frac{۵}{۲}=-\frac{۴}{۲}\Rightarrow x=-۲\end{cases}$$

حالت ویژه:

اگر بعد از تبدیل سمت چپ به مربع کامل، سمت راست صفر شود، بازهم دو جواب حاصل می‌شود؛ البته با هم برابرند. (جواب مضاعف). برای نمونه؛

حل معادله‌ی $x^۲+۶x+۳=-۶$ را ببینید:

$$x^۲+۶x+\underbrace{۳+۶}_{=۹}=۰\rightarrow (x+۳)^۲=۰\rightarrow (x+۳)(x+۳)=۰\rightarrow\begin{cases}x+۳=۰\rightarrow x=-۳\\ x+۳=۰\rightarrow x=-۳\end{cases}$$

پاسخ دهید (۲)

۱- معادله‌های زیر را به روش مربع کامل حل کنید:

الف) $x^۲ - ۶x = ۱۶$ ب) $x^۲ + \frac{۱}{۴} = -x$ پ) $۸x^۲ - ۶x = ۲$

منتخب کتاب:

۱- در معادله‌ی $(x-۱)^۲ = k$:

الف) جواب معادله را به ازای مقادیر $k=۴$، $k=۲$، $k=۰$ و $k=-۹$ به‌دست آورید.

ب) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه‌ی مضاعف دارد؟

پ) به ازای چه مقادیری از k معادله دو ریشه‌ی حقیقی دارد؟

ت) به ازای چه مقادیری از k معادله ریشه‌ی حقیقی ندارد؟

۲- هر یک از معادله‌های زیر را به روش تشکیل مربع کامل حل کنید:

الف) $x^۲ - ۵x + ۶ = ۰$ ب) $۹x^۲ + ۳x - ۲ = ۰$

۳ روش دلتـا (Δ)

روش مربع کامل را در مورد شکل کلی معادله درجه دوم: $ax^۲+bx+c=۰$ به‌کار می‌بریم:

$$ax^۲+bx+c=۰ \rightarrow ax^۲+bx=-c \xrightarrow{\div a} x^۲+\frac{b}{a}x=-\frac{c}{a}$$

$$\xrightarrow{+(\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲}{۴a^۲}} x^۲+\frac{b}{a}x+\frac{b^۲}{۴a^۲}=\frac{b^۲}{۴a^۲}-\frac{c}{a} \rightarrow (x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{b^۲-۴ac}{۴a^۲}$$

قرار می‌دهیم: $b^۲-۴ac=\Delta$؛ اگر Δ منفی نباشد، دو جواب برای معادله حاصل می‌شود:

$$(x+\frac{b}{۲a})^۲=\frac{\Delta}{۴a^۲} \rightarrow \begin{cases} x+\frac{b}{۲a}=\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \\ x+\frac{b}{۲a}=-\frac{\sqrt{\Delta}}{۲a} \Rightarrow x=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a} \end{cases}$$

(فراگیری مطلب بالا ضروری نیست، یادگیری و کاربرد روش دلتا که در ادامه آمده، لازم است.)

جمع‌بندی محاسبات بالا، روش حل سریع هر معادله‌ی درجه دوم را به دنبال دارد.

روش دلتا:

معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ را در نظر بگیرید.

عدد $\Delta=b^۲-۴ac$ به نام «**مُبیِّن**» معادله را تعیین می‌کنیم. جواب‌های معادله با توجه به مقدار این عدد، در سه حالت زیر تعیین می‌شوند:

- اگر $\Delta>۰$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمایز) دارد که عبارتند از:

$$x'=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{۲a} \quad و \quad x''=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{۲a}$$

- اگر $\Delta=۰$ باشد، دو جواب بالا تکراری **(مضاعف)** و به صورت زیر خواهند شد:

$$x'=x''=-\frac{b}{۲a}$$

- اگر $\Delta<۰$ باشد، معادله **هیچ جوابی** ندارد.

توجه کنید:

در حالت $\Delta=۰$، برای جواب معادله فقط یک عدد حاصل خواهد شد، ولی آن عدد دو بار جواب محسوب می‌شود؛ به همین دلیل به آن جواب مضاعف گویند. برای نمونه؛

معادله‌ی $x^۲-۴x+۴=۰$ دارای $\Delta=۰$ است، اگر آن را به روش تجزیه حل کنید، دو جواب آن را خواهید دید:

$$(x-۲)^۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \\ x-۲=۰ \Rightarrow x=۲ \end{cases}$$

به روش Δ نیز جواب‌ها $x'=x''=-\frac{b}{۲a}=-\frac{-۴}{۲(۱)}=۲$ هستند.

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $۴x^۲ - x - ۱ = ۰$ ب) $۳x^۲ - x = -۶$

پاسخ

الف) در این معادله $a = ۴$، $b = -۱$ و $c = -۱$ بوده و در نتیجه:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۴)(-۱) = ۱۷$$

چون دلتا مثبت است، دو جواب متمایز حاصل می‌شود:

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۱) - \sqrt{۱۷}}{۲(۴)} = \frac{۱ - \sqrt{۱۷}}{۸} \quad \text{و} \quad x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-(-۱) + \sqrt{۱۷}}{۲(۴)} = \frac{۱ + \sqrt{۱۷}}{۸}$$

ب) این معادله را نیز به صورت $۳x^۲ - x + ۶ = ۰$ مرتب کرده و دلتا را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = (-۱)^۲ - ۴(۳)(۶) = ۱ - ۷۲ = -۷۱$$

چون Δ منفی به‌دست آمد، معادله هیچ جوابی ندارد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

معادله‌ی $۳x^۲ + ۵x - ۲ = ۰$ را به روش کلی (Δ) حل کنید.

پاسخ

تعیین مبین معادله:

$$\Delta = b^۲ - ۴ac = ۵^۲ - ۴(۳)(-۲) = ۲۵ + ۲۴ = ۴۹$$

دلتا مثبت است و بنابراین دو جواب مختلف خواهیم داشت:

$$x'' = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ - \sqrt{۴۹}}{۲(۳)} = \frac{-۵ - ۷}{۶} = \frac{-۱۲}{۶} = -۲$$

$$x' = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{۲a} = \frac{-۵ + \sqrt{۴۹}}{۲(۳)} = \frac{-۵ + ۷}{۶} = \frac{۲}{۶} = \frac{۱}{۳}$$

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $(۲ - t)x^۲ - x = ۳$ دارای جواب $x = -۱$ باشد. سپس جواب دیگر آن را حساب کنید.

پاسخ

باید عدد -۱ در معادله صدق کند:

$$(۲ - t)\underbrace{(-۱)^۲}_{=۱} - (-۱) = ۳ \rightarrow ۲ - t + ۱ = ۳ \Rightarrow t = ۰$$

پس معادله به صورت $۲x^۲ - x - ۳ = ۰$ بوده و از روش دلتا (یا تجزیه)، جواب دیگر معلوم می‌شود:

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۲)(-۳) = ۱ + ۲۴ = ۲۵ \rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

پس:

$$x'' = \frac{-(-۱) - ۵}{۲(۲)} = \frac{-۴}{۴} = -۱ \quad \text{و} \quad x' = \frac{-(-۱) + ۵}{۲(۲)} = \frac{۶}{۴} = \frac{۳}{۲} \quad \text{(جواب دیگر)}$$

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $(۲-t)x^۲ - x - ۳ = ۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

پاسخ

ضرایب به صورت $a = ۲-t$، $b = -۱$ و $c = -۳$ بوده و در نتیجه باید:

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(۲-t)(-۳) = ۱+۱۲(۲-t) = ۰ \rightarrow ۱+۲۴-۱۲t = ۰ \rightarrow -۱۲t = -۲۵ \Rightarrow t = \frac{۲۵}{۱۲}$$

بررسی مسائلی واقعی در اقتصاد که گاهی با معادلات درجه دوم مرتبط هستند.

هزینه، درآمد و سود:

در مسائل اقتصادی ساده، با مفاهیم زیر روبه‌رو هستیم:

❖ **تعداد کالا و قیمت:**

تعداد (مقدار) کالا را با x نشان می‌دهیم و قیمت هر واحد: p، عددی مشخص است و گاهی بر حسب x بیان می‌شود.

(در اقتصاد، معمولاً وقتی x زیاد می‌شود، قیمت p کمتر می‌شود تا سطح فروش حفظ شود.)

❖ **هزینه:**

هزینه‌ی تولید به مقدار x بستگی دارد که آن را با $C(x)$ نشان می‌دهیم.

هزینه‌ها معمولاً از دو بخش تشکیل می‌شوند:

الف) هزینه اولیه:

مانند راه‌اندازی کارگاه، هزینه برق و آب و تبلیغات و . . . که مقدار ثابتی است.

ب) هزینه تولید:

هزینه‌ای است که برای تعداد x کالا باید صرف شود. این هزینه به x بستگی داشته و بر حسب آن بیان می‌شود.

بنابراین هزینه‌ی کل تولید x عدد کالا چنین خواهد بود:

$$C(x) = \text{هزینه تولید تعداد } x \text{ کالا} + \text{هزینه اولیه}$$

❖ **درآمد (فروش):**

مبلغی است که از فروش x عدد کالا حاصل می‌شود و در صورت نیاز، چنین محاسبه می‌شود:

$$R(x) = x \times \text{قیمت هر کالا}$$

❖ **سود:**

اگر هزینه‌ها را از درآمد کم کنیم، سود تولید و فروش x کالا مشخص می‌شود:

$$P(x) = R(x) - C(x) \quad \text{سود}$$

(معمولاً درآمد و سود تعداد x کالا به صورت یک عبارت درجه دوم بر حسب x بیان می‌شوند.)

برای نمونه؛

اگر یک شرکت برای راه اندازی تولید x عدد کالا، ۵۰۰۰۰ واحد پول هزینه ثابت لازم داشته و به ازای تولید هر کالا، ۱۵ واحد پول صرف کند؛

الف) هزینه‌ی تولید تعداد x کالا چنین خواهد شد:

$$C(x)=۵۰۰۰۰+۱۵\times x=۵۰۰۰۰+۱۵x$$

ب) اگر شرکت با تولید کالا، بتواند هر کالا را به قیمت $۱۰۰-\frac{x}{۱۰}$ واحد پول بفروشد، درآمد (فروش) چنین خواهد بود:

$$R(x)=x\times(۱۰۰-\frac{x}{۱۰})=۱۰۰x-\frac{x^۲}{۱۰}$$

پ) اگر هزینه‌ها را از درآمد کم کنیم، سود به‌دست خواهد آمد:

$$P(x)=R(x)-C(x)=۱۰۰x-\frac{x^۲}{۱۰}-(۵۰۰۰۰+۱۵x)=۱۰۰x-\frac{x^۲}{۱۰}-۵۰۰۰۰-۱۵x$$

$$\Rightarrow\ P(x)=۸۵x-\frac{x^۲}{۱۰}-۵۰۰۰۰$$

مثال: (از کتاب) یک تولید کننده‌ی دوچرخه، ۷۰۰۰۰۰ واحد پول برای راه‌اندازی کارگاه، خرید تجهیزات، تبلیغات و ... هزینه کرده و بعلاوه، به ازای ساخت هر دوچرخه نیز باید ۱۱۰ واحد پول صرف کند. اگر n تعداد فروش دوچرخه و p قیمت هر دوچرخه باشد، رابطه‌ی زیر بین آن‌ها وجود دارد:

$$n=۷۰۰۰۰-۲۰۰p$$

اکنون، به موارد زیر پاسخ دهید:

الف) اگر قیمت دوچرخه صفر واحد باشد، تعداد فروش چقدر است؟

ب) در چه سطح قیمت، تعداد فروش صفر است؟

پ) هزینه، درآمد و سود کارگاه را در تولید n دوچرخه بنویسید.

پاسخ

الف) عدد $p=۰$ را در معادله قرار می‌دهیم؛

$$n=۷۰۰۰۰-\underbrace{۲۰۰(۰)}_{=۰}=۷۰۰۰۰$$ **عدد دوچرخه**

ب) باید $n=۰$ قرار گیرد؛

$$۰=۷۰۰۰۰-۲۰۰p\ \rightarrow\ ۲۰۰p=۷۰۰۰۰\ \Rightarrow\ p=\frac{۷۰۰۰۰}{۲۰۰}=۳۵۰$$

(یعنی اگر قیمت هر دوچرخه را ۳۵۰ واحد پول انتخاب کنیم، هیچ فروشی نخواهیم داشت.)

پ) هزینه برابر مجموع هزینه‌ی اولیه و هزینه n عدد کالا است؛

$$C(n)=۷۰۰۰۰۰+۱۱۰n$$

باید p را بر حسب n بنویسیم؛

$$n=۷۰۰۰۰-۲۰۰p\ \rightarrow\ ۲۰۰p=۷۰۰۰۰-n\ \xrightarrow{\div ۲۰۰}\ p=۳۵۰-\frac{n}{۲۰۰}$$

بنابراین؛

$$R(n)=n\times p=n(۳۵۰-\frac{n}{۲۰۰})=۳۵۰n-\frac{n^۲}{۲۰۰}$$ (درآمد)

$$P(n)=R(n)-C(n)=۳۵۰n-\frac{n^۲}{۲۰۰}-(۷۰۰۰۰۰+۱۱۰n)=-\frac{n^۲}{۲۰۰}+۲۴۰n-۷۰۰۰۰۰$$ (سود)

حالت خاصی در سود حاصل از فروش کالا:

نقطه‌ی سربه‌سر: (مهم)

میزانی از تولید است که در آن درآمد و هزینه یکسان بوده و در نتیجه تولید و فروش کالا نه سود دارد و نه ضرر.

به بیان دیگر:

در نقطه‌ی سر به سر، هزینه و درآمد برابر بوده و سود برابر صفر است.

مثال: یک شرکت تولیدی برای تولید x عدد کالا، مقدار $C(x)=۱۲۰+۱۰x$ واحد هزینه کرده و هر کالا را $۲۰-\frac{۱}{۵}x$ واحد می‌فروشد.

الف) درآمد و سود فروش x کالا را بنویسید.

ب) اگر شرکت هیچ کالایی نفروشد، چقدر از دست می‌دهد؟

پ) کارگاه برای فروش تعداد چند کالا، به نقطه‌ی سربه‌سر خود می‌رسد؟

پاسخ

الف) مشابه مورد قبل:

$$R(x)=x\times(۲۰-\frac{۱}{۵}x)=۲۰x-\frac{۱}{۵}x^۲$$

$$P(x)=R(x)-C(x)=۲۰x-\frac{۱}{۵}x^۲-(۱۲۰+۱۰x)=-\frac{۱}{۵}x^۲+۱۰x-۱۲۰$$

ب) اگر هیچ کالایی نفروشد، $x=۰$ است و:

$C(۰)=۱۲۰+۱۰(۰)=۱۲۰+۰=۱۲۰$ **(یعنی ۱۲۰ واحد پول از دست می‌دهد.)**

پ) باید سود برابر صفر شود: $P(x)=-\frac{۱}{۵}x^۲+۱۰x-۱۲۰=۰$. حل معادله با ضرب در -۵:

$$x^۲-۵۰x+۶۰۰=۰ \rightarrow (x-۲۰)(x-۳۰)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۲۰=۰ \Rightarrow x=۲۰ \\ x-۳۰=۰ \Rightarrow x=۳۰ \end{cases}$$

(بنابراین: اگر ۲۰ یا ۳۰ عدد کالا تولید شده و به فروش برسد، سود یا ضرر اتفاق نمی‌افتد.)

پاسخ دهید (۳)

۱- معادله‌ی $x^۲-x=۲$ را به روش کلی حل کنید.

۲- یکی از جواب‌های معادله‌ی $۲x^۲-kx+۲۸=۰$ برابر -۴ است. جواب دیگر آن را بیابید.

۳- الف) معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+bx+c=۰$ با ریشه‌های x' و x'' را در نظر بگیرید. با استفاده از فرمول جواب‌ها بر حسب Δ، نشان دهید:

$$x'+x''=-\frac{b}{a} \quad \text{و} \quad x'\times x''=\frac{c}{a}$$

ب) در معادله‌ی $۴x^۲-۳x=۷$، مجموع ریشه‌ها . . . . . و ضرب ریشه‌ها . . . . . است.

منتخب کتاب:

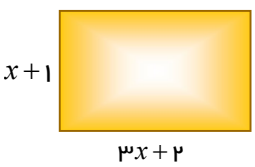
۱- معادله‌های زیر را حل کنید:

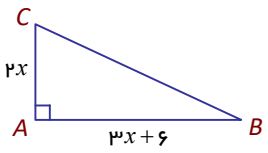
الف) $x^۲-x=۰$ ب) $۲x^۲+x-۱=۰$ پ) $۴x^۲-۴x+۱=۰$

ت) $x^۲+۱۷x-۱۸=۰$ ث) $x^۲+\sqrt{۳}x-۱=۰$ ج) $۳x^۲-x+۴=۰$

۲- اگر یکی از جواب‌های معادله‌ی $۲x^۲-ax+۲۸=۰$ برابر -۴ باشد، جواب دیگر این معادله چیست؟

۳- مساحت مثلث و مستطیل در شکل‌های زیر برابر هستند. طول و عرض مستطیل را تعیین کنید:





۴- کدام‌یک از معادله‌های زیر به ازای هر مقدار a همواره دارای جواب‌های حقیقی است؟

الف) $x^۲+ax-۱=۰$ ب) $x^۲-x+a=۰$

۴ حل معادلات گویا

معادله‌ای که بر حسب عبارت‌های گویا، یعنی: عبارات کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای، باشد را یک «**معادله‌ی گویا**» گوئیم. مانند:

$$\frac{x}{x^۲+۴x}=\frac{۲}{x}-\frac{۱}{x+۴}$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی گویا:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و توسط آن بین کسرها مخرج مشترک می‌گیریم.
- با حذف مخرج‌ها، معادله‌ای که به‌دست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که اگر در تمام مخرج‌ها جای x قرار گیرند، هیچ کدام صفر نشود.

توجه کنید:

ک.م.م. برابر ضرب تمام عامل‌ها در تجزیه‌ی عبارات است. (اگر عامل مشترک وجود داشت، آن با توان بیشتر و فقط یک‌بار نوشته می‌شود.)

مثال: در معادله‌ی $\frac{x-۱}{x-۲}=\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

چون $x^۲-۲x=x(x-۲)$، همین عبارت مخرج مشترک است. طبق روش بالا:

$$\frac{x(x-۱)}{x(x-۲)}=\frac{x^۲-۲x+۲-\overbrace{(x-۲)(x+۱)}^{x^۲+x-۲x-۲}}{x(x-۲)} \rightarrow \frac{x^۲-x}{x(x-۲)}=\frac{x^۲-۲x+۲-x^۲+x+۲}{x(x-۲)}$$

$$\rightarrow x^۲-x=-x+۴ \rightarrow x^۲=۴ \rightarrow x=\pm ۲$$

اما عدد ۲ مخرج کسر سمت چپ را صفر می‌کند و بنابراین قابل قبول نیست و فقط -۲ پذیرفته می‌شود.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

معادله‌ی $\frac{۳x+۱}{x^۲-۱}+\frac{x}{x+۱}=۱$ را حل کنید.

پاسخ

با توجه به این‌که $x^۲-۱=(x-۱)(x+۱)$ است، طبق روش بالا:

$$\frac{۳x+۱+\overbrace{x(x-۱)}^{x^۲-x}}{x^۲-۱}=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۱} \rightarrow \frac{x^۲+۲x+۱}{x^۲-۱}=\frac{x^۲-۱}{x^۲-۱}$$

$$\rightarrow x^۲+۲x+۱=x^۲-۱ \rightarrow ۲x=-۲ \Rightarrow x=-۱$$

چون با جایگذاری -۱ مخرج‌ها صفر می‌شود، این عدد قابل قبول نبوده و معادله جواب ندارد.

مثال: (از کتاب) به ازای چه مقدار a، معادله‌ی $\frac{a}{x}=\frac{x+۱}{x+a}$ دارای جواب $x=۱$ است؟

پاسخ

باید عدد ۱ در معادله صدق کند: $\frac{a}{۱}=\frac{۱+۱}{۱+a} \Rightarrow \frac{a}{۱}=\frac{۲}{a+۱}$. معادله‌ی گویا را بر حسب a حل می‌کنیم:

$$\frac{a(a+۱)}{۱\times(a+۱)}=\frac{۲}{a+۱} \rightarrow \frac{a^۲+a}{a+۱}=\frac{۲}{a+۱} \rightarrow a^۲+a=۲ \rightarrow a^۲+a-۲=۰$$

$$\rightarrow (a+۲)(a-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} a+۲=۰ \Rightarrow a=-۲ \\ a-۱=۰ \Rightarrow a=۱ \end{cases}$$

چون این دو جواب مخرج‌ها را در معادله‌ی گویای $\frac{a}{۱}=\frac{۲}{a+۱}$ صفر نمی‌کنند، هر دو قابل قبول هستند.

در پایان، چند مسئله‌ی گوناگون را توسط معادلات گویا پاسخ می‌دهیم. (با دقت بخوانید!)

مثال: (مشابه کتاب) در یک محلول آب نمک، نسبت وزن آب به وزن نمک برابر ۶ است. اگر ۱۵ گرم نمک به این محلول اضافه شود، نسبت وزن آب به وزن محلول $\frac{۳}{۴}$ خواهد شد. وزن محلول اولیه چقدر بوده است؟

پاسخ

اگر وزن نمک در محلول اولیه را x گرم بگیریم، وزن آب $۶x$ گرم و وزن کل محلول $x+۶x=۷x$ گرم خواهد بود. وقتی ۱۵ گرم نمک به آن اضافه شود:

وزن آب همچنان $۶x$ گرم و وزن کل محلول $۷x+۱۵$ گرم می‌شود.

پس باید: $\frac{۶x}{۷x+۱۵}=\frac{۳}{۴}$ باشد. حل معادله:

$$\frac{۴\times۶x}{۴(۷x+۱۵)}=\frac{۳(۷x+۱۵)}{۴(۷x+۱۵)} \rightarrow \frac{۲۴x}{۴(۷x+۱۵)}=\frac{۲۱x+۴۵}{۴(۷x+۱۵)} \rightarrow ۲۴x=۲۱x+۴۵$$

$$\rightarrow ۲۴x-۲۱x=۴۵ \rightarrow ۳x=۴۵ \Rightarrow x=\frac{۴۵}{۳}=۱۵$$

در نتیجه، وزن محلول اولیه برابر است با:

$$۷x=۷\times۱۵=۱۰۵ \quad \text{گرم}$$

مثال: اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ

فرض کنید ماشین (۱) دو برابر سریع‌تر از ماشین (۲) باشد. پس؛

اگر ماشین (۲) در x ساعت کل کار را انجام دهد، ماشین (۱) در $۲x$ ساعت کل کار را انجام می‌دهد.

اکنون تصور کنید ماشین‌ها تنهایی یک ساعت کار کنند، طبق اطلاعات بالا:

ماشین (۲) اندازه‌ی $\frac{۱}{x}$ از کل کار و ماشین (۱) اندازه‌ی $\frac{۱}{۲x}$ از کل کار را انجام خواهد داد.

پس اگر هر دو ماشین یک ساعت با هم کار کنند، $\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}$ از کار انجام می‌شود که طبق فرض سؤال برابر $\frac{۱}{۴}$ از آن است:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۲x}=\frac{۱}{۴} \rightarrow \frac{۴+۲}{۴x}=\frac{x}{۴x} \rightarrow ۴+۲=x \Rightarrow x=۶\ ,\ ۲x=۱۲$$

مثال: (از کتاب) یک کیک را بین چند نفر تقسیم کردیم و به هر یک مقدار مساوی رسید. سپس یک نفر دیگر به جمع آن‌ها اضافه شد و دوباره کیک را بین آن‌ها تقسیم کردیم. در این مرحله به هر یک به اندازه‌ی $\frac{۱}{۶}$ کمتر رسید. مشخص کنید آن‌ها در ابتدا چند نفر بوده‌اند.

پاسخ

تعداد آن‌ها در ابتدا را n می‌گیریم؛ پس به هر کدام $\frac{۱}{n}$ از کیک رسیده است. در ادامه $n+۱$ نفر می‌شوند و به هر کدام مقدارِ کمتر $\frac{۱}{n+۱}$ از کیک می‌رسد. باید داشته باشیم؛

$$\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}=\frac{۱}{۶}$$

با استفاده از مخرج مشترک $۶n(n+۱)$ معادله را حل می‌کنیم؛

$$\frac{۶(n+۱)-۶n}{۶n(n+۱)}=\frac{n(n+۱)}{۶n(n+۱)} \rightarrow \frac{۶n+۶-۶n}{۶n(n+۱)}=\frac{n^۲+n}{۶n(n+۱)} \rightarrow n^۲+n=۶$$

$$\rightarrow n^۲+n-۶=۰ \rightarrow (n+۳)(n-۲)=۰ \rightarrow \begin{cases} n+۳=۰ \Rightarrow n=-۳ \\ n-۲=۰ \Rightarrow n=۲ \end{cases}$$

چون تعداد نمی‌تواند منفی شود، فقط $n=۲$ قبول است.

پاسخ دهید (۴)

۱- به ازای چه مقدار a معادله‌ی $\frac{x+۱}{x+a}=\frac{a}{x}$ دارای جواب $x=۱$ است؟

۲- معادله‌های: الف) $\frac{۴}{۲x-۱}=\frac{۵}{x+۲}$ ب) $\frac{x}{x+۴}=\frac{x+۱}{x+۲}$ و پ) $\frac{۳x+۱}{x+۳}=\frac{x+۳}{x-۱}$ را حل کنید.

۳- معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{x-۲}{x-۵}+\frac{x-۱}{x+۴}-\frac{x^۲-۶x+۵}{(x-۵)(x+۴)}=۰$

ب) $\frac{۳}{x^۲-۱}-\frac{x+۱}{x-۱}=-۱$

۴- اختلاف معکوس‌های دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{۱}{۲۴}$ است. آن دو عدد را بیابید.

منتخب کتاب:

۱- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید.

الف) $\frac{۲}{x+۲}+\frac{x}{x+۲}=x+۳$

ب) $\frac{x^۲-۲x+۲}{x^۲-۲x}-\frac{x+۱}{x}=\frac{x-۱}{x-۲}$

پ) $\frac{۳}{x-۱}-\frac{۲}{x+۳}=\frac{۴}{x-۲}$

ت) $\frac{۱۱}{x^۲-۴}+\frac{x+۳}{۲-x}=\frac{۲x-۳}{x+۲}$

۲- به ازای چه مقدار k، معادله‌ی $\frac{۴-t}{۲-۲t}=\frac{۳t^۲+k}{(t^۲+۱)^۲-۶۸}$ دارای جواب $t=-۳$ است؟

۳- مجموع معکوس دو عدد زوج طبیعی متوالی برابر $\frac{۵}{۱۲}$ است. آن دو عدد را بیابید.

۴- هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی به تنهایی برای این کار ۳ ساعت زمان بیشتر نسبت به چاپگر جدید نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

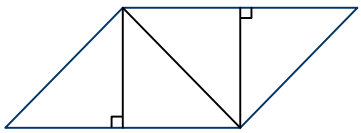
ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور سراسری آورده می‌شوند.

اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان مدرسه هستید، می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

در ابتدا، نمونه‌های متنوعی از حل معادله‌ی درجه دوم ببینید.

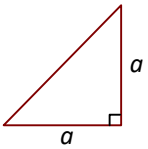
در شکل زیر که از کنار هم قرار گرفتن چهار مثلث یکسان تشکیل شده است، مساحت متوازی الاضلاع از مساحت هر مثلث قائم الزاویه ۳ واحد بیشتر است. اندازه قطر مربع کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)



۱) $\sqrt{۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$
۳) ۲ ۴) ۳

گزینه ۳

چون در سؤال چهارضلعی وسط مربع ذکر شده، مثلث‌ها باید قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین باشند:



بنابراین:

$$a\times ۲a=\frac{a\times a}{۲}+۳ \xrightarrow{\times ۲} \underbrace{۴a^۲=a^۲+۶}_{۳a^۲=۶} \rightarrow a^۲=۲$$

طبق رابطه فیثاغورس، قطر مربع برابر $\sqrt{a^۲+a^۲}=\sqrt{۲a^۲}$ است و در نتیجه:

$$\xrightarrow{a^۲=۲} ۲a^۲=۴ \Rightarrow \sqrt{۲a^۲}=\sqrt{۴}=۲$$

مجذور عددی ۴۲ واحد از خود آن عدد بزرگ‌تر است. مجموع این عدد و مجذورش کدام می‌تواند باشد؟

۱) ۴۲ ۲) ۳۲ ۳) ۵۶ ۴) ۷۲

گزینه ۳

معادله به صورت $x^۲=x+۴۲$ نوشته می‌شود. به روش تجزیه:

$$x^۲-x-۴۲=۰ \rightarrow (x-۷)(x+۶)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۷=۰ \Rightarrow x=۷ \\ x+۶=۰ \Rightarrow x=-۶ \end{cases}$$

باید مجموع عدد و مجذورش در هر دو حالت حساب شود تا گزینه‌ی جواب معلوم گردد:

$۷+۷^۲=۷+۴۹=۵۶$ (جواب تست)

$(-۶)+(-۶)^۲=-۶+۳۶=۳۰$ (در گزینه‌ها نیست.)

در مورد معادله‌ی $(x+۲)(x-۴)=-۳(x-۴)$ کدام گزینه صحیح است؟

❶ فقط یک جواب مثبت دارد.
❷ فقط یک جواب منفی دارد.
❸ دو جواب هم‌علامت دارد.
❹ دو جواب مثبت و منفی دارد.

گزینه ۴

چون $(x-۴)$ در هر دو طرف مشترک است، می‌توان تجزیه از طریق فاکتورگیری را انجام داد:

$$(x+۲)(x-۴)+۳(x-۴)=۰ \rightarrow (x-۴)(x+۲+۳)=۰$$

$$\rightarrow (x-۴)(x+۵)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \\ x+۵=۰ \Rightarrow x=-۵ \end{cases}$$

اگر $P(x)=۲۰۰(-x^۲-۵۴۰x+۱۱۲۰۰۰)$ سود حاصل از فروش تعداد x کالای تولیدی یک شرکت باشد، این شرکت با فروش چند کالا، نه سود و نه ضرر می‌کند؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۸۰۰ ❷ ۷۰۰ ❸ ۱۶۰ ❹ ۱۴۰

گزینه ۳

باید $P(x)=۰$ شود. پس:

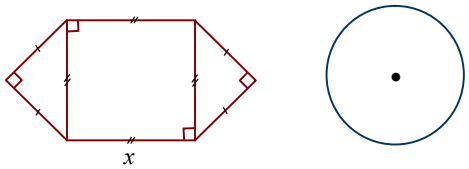
$$-x^۲-۵۴۰x+۱۱۲۰۰۰=۰ \rightarrow x^۲+۵۴۰x-۱۱۲۰۰۰=۰$$

با قدری دقت می‌توان عددهای مربوطه در تجزیه را تشخیص داد:

$$(x+۷۰۰)(x-۱۶۰)=۰ \xrightarrow{x>۰} x-۱۶۰=۰ \Rightarrow x=۱۶۰$$

اگر شعاع دایره‌ی شکل زیر برابر $\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x$ و مجموع مساحت‌های دو شکل برابر ۱۶ باشد، محیط دایره کدام است؟

(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)



❶ $\sqrt{\pi}$
❷ $۲\sqrt{\pi}$
❸ $۳\sqrt{\pi}$
❹ $۴\sqrt{\pi}$

گزینه ۴

اگر ضلع مثلث‌های طرفین را a بگیریم، باید:

$$\underbrace{a^۲+a^۲}_{۲a^۲}=x^۲ \rightarrow a^۲=\frac{x^۲}{۲} \Rightarrow a=\frac{x}{\sqrt{۲}}$$

با توجه به مساحت داده شده:

$$\underbrace{۲\times\frac{a\times a}{۲}}_{a^۲}+x^۲+\pi\times(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x)^۲=۱۶\rightarrow\underbrace{\frac{x^۲}{۲}+x^۲}+\underbrace{\pi\times\frac{۱}{۲\pi}x^۲}_{\frac{x^۲}{۲}}=۱۶\rightarrow ۲x^۲=۱۶$$

$$\rightarrow x^۲=۸\xrightarrow{۸=۴\times۲}x=\sqrt{۴\times۲}=۲\sqrt{۲}$$

محیط دایره:

$$۲\pi\times(\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}x)=\overbrace{\sqrt{۲\pi}\sqrt{۲\pi}}^{۲\pi}\times\frac{۱}{\sqrt{۲\pi}}\times۲\sqrt{۲}=\sqrt{۲\pi}\times۲\sqrt{۲}=۲\times\underbrace{\sqrt{۴\pi}}_{۲\sqrt{\pi}}=۴\sqrt{\pi}$$

در حل معادله‌ی $۹x^۲+۳x-۲=۰$ به روش مربع کامل، به معادله‌ی $(x+h)^۲=k$ خواهیم رسید. مقدار k کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۴}$ ❷ $\frac{۱}{۲}$ ❸ $\frac{۱}{۳}$ ❹ $\frac{۱}{۶}$

گزینه ۱

با تقسیم جملات بر ۹، روش مربع کامل را به‌کار می‌بریم:

$$x^۲+\frac{۳}{۹}x=\frac{۲}{۹}\rightarrow x^۲+\frac{۱}{۳}x=\frac{۲}{۹}\xrightarrow{(\frac{۱}{۳}\div۲)^۲=(\frac{۱}{۶})^۲=\frac{۱}{۳۶}}x^۲+\frac{۱}{۳}x+\frac{۱}{۳۶}=\frac{۲}{۹}+\frac{۱}{۳۶}$$

$$\rightarrow(x+\frac{۱}{۶})^۲=\frac{۲\times۴+۱}{۳۶}=\frac{۹}{۳۶}\Rightarrow(x+\frac{۱}{۶})^۲=\frac{۱}{۴}$$

پس $k=\frac{۱}{۴}$ بوده است.

معادله درجه دوم $ax^۲+(۲-۳a)x-۱۸=۰$ را با استفاده از روش مربع کامل به شکل $(x-۱/۳)^۲=b$ در آورده‌ایم. مقدار $\sqrt{b}$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۱/۷ ❷ ۱/۹ ❸ ۲/۱ ❹ ۲/۳

گزینه ۴

با تقسیم جملات بر a، معادله به صورت $x^۲+(\frac{۲}{a}-۳)x=\frac{۱۸}{a}$ نوشته می‌شود. نصف ضریب x عبارت است از: $\frac{\frac{۲}{a}}{۲}-\frac{۳}{۲}=\frac{۱}{a}-\frac{۳}{۲}$.

جمع مجذور این عبارت با دو طرف معادله:

$$(x+(\frac{۱}{a}-\frac{۳}{۲}))^۲=\frac{۱۸}{a}+(\frac{۱}{a}-\frac{۳}{۲})^۲$$

از مقایسه با شکل $(x-۱/۳)^۲=b$ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{a}-۱/۵=-۱/۳\rightarrow\frac{۱}{a}=۰/۲=\frac{۲}{۱۰}=\frac{۱}{۵}\Rightarrow a=۵$$

چون $b=\frac{۱۸}{a}+(\frac{۱}{a}-\frac{۳}{۲})^۲$ است، در نتیجه:

$$b=\frac{۱۸}{۵}+\underbrace{(۰/۲-۱/۵)^۲}_{(۱/۳)^۲}=۳/۶+۱/۶۹=۵/۲۹\Rightarrow\sqrt{b}=\sqrt{۵/۲۹}=۲/۳$$

جواب‌های معادله‌ی $۳x^۲ + ۲\sqrt{۲}x = ۲$ کدام‌ها هستند؟

❶ $-\sqrt{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ❷ $\sqrt{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ❸ $\sqrt{۲}$ و $-\frac{\sqrt{۲}}{۳}$ ❹ $-\sqrt{۲}$ و $\frac{\sqrt{۲}}{۳}$

گزینه ۴

معادله را به صورت مرتب $۳x^۲ + ۲\sqrt{۲}x - ۲ = ۰$ نوشته و روش دلتا را به‌کار می‌بریم:

$$\Delta = (۲\sqrt{۲})^۲ - ۴(۳)(-۲) = ۴\times ۲ + ۲۴ = ۳۲ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۳۲} = \sqrt{۱۶\times ۲} = ۴\sqrt{۲}$$

جواب‌ها برابرند با:

$$x_۱ = \frac{-۲\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۲}}{۲(۳)} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۶} = \frac{\sqrt{۲}}{۳} \quad و \quad x_۲ = \frac{-۲\sqrt{۲} - ۴\sqrt{۲}}{۲(۳)} = \frac{-۶\sqrt{۲}}{۶} = -\sqrt{۲}$$

ریشه‌ی کوچک‌تر معادله‌ی $x^۲ - ۶x + ۲ = ۰$ به صورت $h - \sqrt{k}$ است. مقدار $h + k$ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ -۴ ❸ ۱۱ ❹ ۴

گزینه ۱

طبق روش دلتا:

$$\Delta = (-۶)^۲ - ۴(۱)(۲) = ۳۶ - ۸ = ۲۸ \Rightarrow \sqrt{\Delta} = \sqrt{۲۸} = \sqrt{۴\times ۷} = ۲\sqrt{۷}$$

جواب کوچک‌تر برابر $\frac{۶ - ۲\sqrt{۷}}{۲(۱)} = \frac{۲(۳ - \sqrt{۷})}{۲} = ۳ - \sqrt{۷}$ است. با مقایسه این جواب و $h - \sqrt{k}$ داریم:

$$h = ۳ \ , \ k = ۷ \Rightarrow h + k = ۳ + ۷ = ۱۰$$

یادآوری:

برای حل یک نامعادله‌ی درجه اول:

- نامعادله را ساده می‌کنیم. (مجهول‌ها در یک طرف و معلوم‌ها طرف دیگر!)
- از تقسیم طرفین نامساوی بر ضریب x مجموعه جواب نامعادله مشخص شود.

توجه کنید:

در صورتی که ضریب x منفی باشد، هنگام تقسیم طرفین بر آن، جهت نامساوی برعکس می‌شود.

مثال: نامعادله‌ی $-۲x + ۳ > x - ۶$ را حل کنید.

پاسخ

طبق تکنیک بالا عمل می‌کنیم:

$$-۲x + ۳ > x - ۶ \rightarrow -۲x - x > -۶ - ۳ \rightarrow -۳x > -۹$$

$$\xrightarrow{\div(-۳)} \frac{-۳x}{-۳} < \frac{-۹}{-۳} \Rightarrow x < ۳$$

بنابراین، مجموعه جواب این نامعادله تمام اعداد حقیقی کوچک‌تر از ۳ است که می‌توان آن را چنین هم نوشت:

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x < ۳\}$$

نکته ۱

در معادله‌ی $ax^۲ + bx + c = ۰$ به یاد داشته باشید:

- شرطِ داشتن دو ریشه‌ی متمایز عبارت است از: $\Delta > ۰$. (شرط وجود دو جواب $\Delta \geq ۰$ است.)
- شرطِ جواب نداشتن معادله عبارت است از: $\Delta < ۰$.

پس:

در سؤالات مربوطه، نامعادله‌ی $\Delta > ۰$ یا $\Delta < ۰$ را تشکیل داده و آن را به روش بالا حل می‌کنیم.

برای کدام مقادیر a، معادله‌ی $ax^۲ - x + ۳ = ۰$ دو ریشه‌ی حقیقی متمایز دارد؟

❶ $a > \frac{۱}{۳}$ ❷ $a < \frac{۱}{۳}$ ❸ $a < \frac{۱}{۱۲}$ ❹ $a > \frac{۱}{۱۲}$

گزینه ۳

باید شرط $\Delta > ۰$ برقرار باشد:

$$\Delta = (-۱)^۲ - ۴(a)(۳) > ۰ \rightarrow ۱ - ۱۲a > ۰ \rightarrow -۱۲a > -۱ \xrightarrow{\div(-۱۲)} a < \frac{-۱}{-۱۲} = \frac{۱}{۱۲}$$

در معادله‌ی $(x-۱)^۲ = -۲m + ۳$ حدود m برای وجود دو جواب متمایز کدام است؟

❶ $m \geq \frac{۳}{۲}$ ❷ $m \leq \frac{۳}{۲}$ ❸ $m < \frac{۳}{۲}$ ❹ $m > \frac{۳}{۲}$

گزینه ۳

باید سمت راست عددی مثبت باشد:

$$-۲m + ۳ > ۰ \rightarrow -۲m > -۳ \xrightarrow{\div(-۲)} m < \frac{-۳}{-۲} = \frac{۳}{۲}$$

برای کدام مقادیر a، معادله‌ی $ax^۲ + ۵x + ۲ = ۰$ جواب ندارد؟

❶ $a > \frac{۲۵}{۸}$ ❷ $a < \frac{۲۵}{۸}$ ❸ $a \geq \frac{۲۵}{۴}$ ❹ $a \leq -\frac{۲۵}{۴}$

گزینه ۱

شرط جواب نداشتن، منفی بودن دلتا است:

$$\Delta = (۵)^۲ - ۴(a)(۲) < ۰ \rightarrow ۲۵ - ۸a < ۰ \rightarrow -۸a < -۲۵ \xrightarrow{\div(-۸)} a > \frac{-۲۵}{-۸} = \frac{۲۵}{۸}$$

معادله‌ی درجه دوم $ax^۲+(a-۱)x+b=۰$ دارای ریشه‌ی مضاعف -۲ است. مقدار $a-b$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ -۱ ❸ ۲ ❹ -۲

گزینه ۱

جواب مضاعف برابر $-\frac{b}{۲a}$ است. پس:

$$-\frac{a-۱}{۲(a)}=-۲ \rightarrow \frac{a-۱}{۲a}=۲ \rightarrow ۴a=a-۱ \rightarrow ۳a=-۱ \Rightarrow a=-\frac{۱}{۳}$$

با جایگذاری، معادله را دوباره نوشته و شرط $\Delta=۰$ را به‌کار می‌بریم:

$$-\frac{۱}{۳}x^۲+\underbrace{(-\frac{۱}{۳}-۱)}_{=-\frac{۴}{۳}}x+b=۰ \xrightarrow{\times ۳} -x^۲-۴x+۳b=۰ \xrightarrow{\Delta=۰} (-۴)^۲-۴(-۱)(۳b)=۰$$

$$\rightarrow ۱۶+۱۲b=۰ \Rightarrow b=\frac{-۱۶}{۱۲}=-\frac{۴}{۳}$$

پس $a-b=-\frac{۱}{۳}+\frac{۴}{۳}=\frac{۳}{۳}=۱$ خواهد بود.

توجه کنید:

از تساوی $a^۲=b^۲$، هر دو حالت زیر ممکن است:

$$a=-b \quad \text{یا} \quad a=b$$

که گاهی در حل معادلات دارای کاربرد است.

اختلاف جواب‌های معادله‌ی $۹x^۲=(x+۲)^۲$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ $\frac{۱}{۲}$ ❸ ۲ ❹ $\frac{۳}{۲}$

گزینه ۴

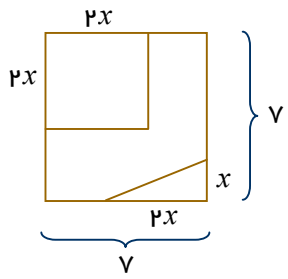
چون $۹x^۲=(۳x)^۲$ است، طبق روش گفته شده:

$$\begin{cases} ۳x=x+۲ \rightarrow ۳x-x=۲ \Rightarrow x=\frac{۲}{۲}=۱ \\ ۳x=-(x+۲) \rightarrow ۳x=-x-۲ \rightarrow ۳x+x=-۲ \Rightarrow x=\frac{-۲}{۴}=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

اختلاف جواب‌ها برابر است با:

$$\text{اختلاف جواب‌ها} = \text{جواب بزرگ} - \text{جواب کوچک} = ۱-(-\frac{۱}{۲})=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}$$

از مربعی به ضلع ۷ سانتی‌متر، مربع و مثلث زیر بریده شده‌اند. اگر مساحت باقی‌مانده ۲۴ سانتی‌متر مربع باشد، مقدار x کدام است؟



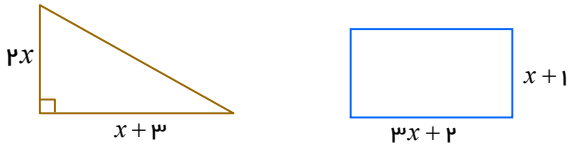
۱) $\sqrt{۷}$
۲) ۵
۳) $\sqrt{۴/۸}$
۴) $\sqrt{۵}$

گزینه ۴

مساحت مربع اصلی: $۷\times ۷ = ۴۹$، مساحت مربع کوچک: $۲x\times ۲x = ۴x^۲$ و مساحت مثلث: $\frac{x\times ۲x}{۲} = x^۲$ است. پس:

$$۴۹-(۴x^۲+x^۲)=۲۴ \rightarrow ۴۹-۵x^۲=۲۴ \rightarrow -۵x^۲=۲۴-۴۹=-۲۵$$
$$\rightarrow x^۲=\frac{-۲۵}{-۵}=۵ \Rightarrow x=\sqrt{۵}$$

اگر مجموع مساحت‌های مثلث و مستطیل داده شده ۲۳ واحد مربع باشد، محیط مستطیل کدام است؟



۱) ۱۸
۲) ۲۰
۳) ۲۴
۴) ۳۰

گزینه ۱

باید داشته باشیم:

$$\frac{۲x\times(x+۳)}{۲}+(x+۱)(۳x+۲)=۲۳ \rightarrow x^۲+۳x+۳x^۲+۲x+۳x+۲-۲۳=۰ \rightarrow ۴x^۲+۸x-۲۱=۰$$

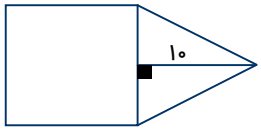
معادله را به روش اتحاد مشترک تجزیه می‌کنیم:

$$(۲x)^۲+۴(۲x)-۲۱=۰ \rightarrow (۲x+۷)(۲x-۳)=۰ \rightarrow \begin{cases} ۲x+۷=۰ \Rightarrow x=-\frac{۷}{۲} \\ ۲x-۳=۰ \Rightarrow x=\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

فقط $x=\frac{۳}{۲}$ قابل قبول است و محیط مستطیل برابر است با:

$$۲(\frac{۳}{۲}+۱+۳(\frac{۳}{۲})+۲)=۳+۲+۹+۴=۱۸$$

در شکل زیر، مساحت مثلث متساوی الساقین، از $\frac{۲}{۳}$ مساحت مربع به اندازه‌ی $\frac{۸}{۳}$ واحد مربع، کمتر است. مساحت مثلث کدام است؟ (کنکور ۱۳۹۹)



۱) ۳۰
۲) ۳۵
۳) ۴۰
۴) ۴۵

گزینه ۳

اگر اندازه‌ی ضلع مربع را x بگیریم، مساحت مربع $x^۲$ و مساحت مثلث $\frac{۱۰\times x}{۲}=۵x$ بوده و باید داشته باشیم:

$$\frac{۲}{۳}x^۲-\frac{۸}{۳}=۵x \xrightarrow{\times ۳} ۲x^۲-۱۵x-۸=۰$$

طبق روش دلتا:

$$\Delta=(-۱۵)^۲-۴(۲)(-۸)=۲۲۵+۶۴=۲۸۹ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۱۷} \begin{cases} x=\frac{۱۵+۱۷}{۴}=۸ \\ x=\frac{۱۵-۱۷}{۴}=-\frac{۱}{۲} \end{cases}$$

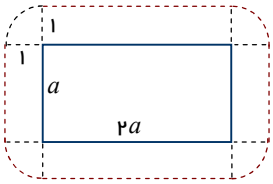
فقط $x=۸$ قابل قبول بوده و مساحت مثلث $۵(۸)=۴۰$ است.

می‌خواهیم دور تا دور باغچه‌ای به شکل مستطیل که طول آن، دو برابر عرض آن است را حصار بکشیم، به طوری که بازدید کنندگان به یک متری باغچه نزدیک نشوند. اگر مساحت زمین محصور شده، $۱+\frac{۱}{۱۸}\pi$ برابر بیشتر از مساحت باغچه باشد، طول باغچه چند متر است؟ **(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)**

❶ ۴ ❷ ۸ ❸ ۶ ❹ ۳

گزینه ۶

باغچه و حصار دور آن را در شکل می‌بینید:



مساحت اطراف زمین، از چهار مستطیل و چهار ربع دایره (= کلاً یک دایره) تشکیل شده است. پس باید:

$$۲a^۲+a+a+۲a+۲a+\pi\times ۱^۲=۲a^۲+(۱+\frac{۱}{۱۸}\pi)\times ۲a^۲$$

ساده کردن عبارت: $۶a+\pi=۲a^۲+\frac{۱}{۹}\pi a^۲$. با قدری دقت و بررسی (مانند زیر) معلوم می‌شود که فقط $a=۳$ در تساوی صادق است و در نتیجه جواب $۲a=۶$ خواهد شد.

$$۶\times ۳+\pi=۲\times ۹+\frac{۱}{۹}\pi\times ۹ \rightarrow ۱۸+\pi=۱۸+\pi$$

تشکیل معادله:

اگر α و β، ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم داده شوند، می‌توان آن معادله را مستقیماً نوشت:

$$(x-\alpha)(x-\beta)=۰$$

بویژه:

اگر بخواهیم معادله ریشه‌ی مضاعف α داشته باشد، معادله به صورت زیر است:

$$(x-\alpha)(x-\alpha)=۰ \Rightarrow (x-\alpha)^۲=۰$$

بنابراین، در حالتی خاص:

شرط ریشه‌ی مضاعف در معادله به صورت $(x\pm a)^۲=k$، این است که $k=۰$ باشد.

روش کلی، استفاده از مورد بعدی است:

نکته ۲

نوشتن معادله:

جمع ریشه‌ها: $s=\alpha+\beta$ و ضرب ریشه‌ها: $p=\alpha\beta$ را حساب کرده و در رابطه‌ی زیر قرار دهید:

$$x^{۲}-sx+p=۰$$

کدام معادله دارای جواب‌های $x=-\frac{۱}{۲}$ و $x=\frac{۳}{۲}$ است؟

❶ $x^{۲}-۴x-۳=۰$
❷ $x^{۲}+۴x-۳=۰$
❸ $۴x^{۲}+۴x-۳=۰$
❹ $۴x^{۲}-۴x-۳=۰$

گزینه ۴

طبق روش بالا:

$$s=-\frac{۱}{۲}+\frac{۳}{۲}=\frac{-۱+۳}{۲}=۱\quad,\quad p=-\frac{۱}{۲}\times\frac{۳}{۲}=-\frac{۳}{۴}$$

پس معادله $x^{۲}-x-\frac{۳}{۴}=۰$ است که ساده‌تر هم بیان می‌شود:

$$\xrightarrow{\times ۴}\quad ۴x^{۲}-۴x-۳=۰$$

گاهی حل یک معادله‌ی درجه دوم در لحظه ممکن است.

نکته ۳

در معادله‌ی $ax^{۲}+bx+c=۰$ در موارد زیر جواب‌ها سریع تعیین می‌شوند:

- اگر $a+b+c=۰$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.
- اگر $a+c=b$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای آن‌که عدد ۱ ریشه‌ی معادله‌ی $x^{۳}+k^{۲}x^{۲}-۳kx+۱=۰$ باشد، مقادیر قابل قبول k کدام است؟

❶ $k=۱$ و $k=۲$
❷ $k=۱$ و $k=-۱$
❸ $k=۰$ و $k=۲$
❹ $k=۱$ و $k=-۱$

گزینه ۱

عدد ۱ باید در معادله صدق کند:

$$(۱)^{۳}+k^{۲}(۱)^{۲}-۳k(۱)+۱=۰\ \rightarrow\ k^{۲}-۳k+۲=۰$$

در این معادله جمع ضرایب صفر است، پس:

$$k=۱ \quad و \quad k=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۱}=۲$$

نکته ۴

در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$:

اگر علامت‌های a و c مختلف باشد، همیشه $\Delta>۰$ بوده و معادله دو جواب با علامت‌های مثبت و منفی دارد.

معادله‌ی درجه دوم $(m^۲+۱)x^۲-۲mx-۱=۰$ همواره . . .

❶ دو جواب مثبت دارد.
❷ جواب ندارد.
❸ دو جواب تکراری دارد.
❹ دو جواب مثبت و منفی دارد.

گزینه ۴

به ضرایب توجه کنید:

$$\underbrace{(m^۲+۱)}_{a}x^۲-۲mx\underbrace{-۱}_{c}=۰$$

چون $a=m^۲+۱$ مثبت و $c=-۱$ منفی است، معادله دو جواب با علامت‌های مختلف دارد.

تبدیل به درجه ۲:

گاهی یک معادله با تغییر کوچکی تبدیل به معادله‌ی درجه دو معمولی می‌شود. به یک نمونه توجه کنید.

مثال: در معادله‌ی $(۲x-۱)^۲+۲(۲x-۱)-۳=۰$ ریشه‌ها را مشخص کنید.

پاسخ

تغییر متغیر: $۲x-۱=t$ را به‌کار می‌بریم. با جایگزینی در معادله‌ی داده شده، باید جواب‌های $t^۲+۲t-۳=۰$ را مشخص کنیم. چون مجموع ضرایب این معادله برابر صفر است:

پس یکی از جواب‌ها $t=۱$ و دیگری $t=\frac{c}{a}=\frac{-۳}{۱}=-۳$ است.

با جایگزینی در رابطه‌ی $۲x-۱=t$ جواب‌های x به‌دست خواهند آمد:

- $t=۱: \quad ۲x-۱=۱ \rightarrow ۲x=۲ \Rightarrow x=۱$
- $t=-۳: \quad ۲x-۱=-۳ \rightarrow ۲x=-۲ \Rightarrow x=-۱$

برخی روابط ساده بین ریشه‌ها، بدون حل معادله (با استفاده از ضرایب) قابل تعیین است.

نکته ۵

جمع و ضرب ریشه‌ها:

اگر بدانیم معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دو ریشه دارد (یعنی: $\Delta \geq ۰$)، در این صورت:

- جمع ریشه‌ها برابر است با: $-\frac{b}{a}$
- ضرب ریشه‌ها برابر است با: $\frac{c}{a}$

مجموع جواب‌های معادله‌ی $(۲x-۱)^۲-۵(۲x-۱)=۲$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) $\frac{۵}{۲}$ ۳) $-\frac{۵}{۲}$ ۴) $-\frac{۷}{۲}$

گزینه ۱

بهتر است معادله را مرتب نوشته تا ضرایب معلوم شوند:

$$(۲x)^۲-۲(۲x)(۱)+(۱)^۲-۵(۲x)-۵(-۱)-۲=۰ \rightarrow ۴x^۲-۴x+۱-۱۰x+۵-۲=۰$$
$$\rightarrow ۴x^۲-۱۴x+۴=۰$$

اکنون می‌توان مجموع جواب‌ها را تعیین کرد:

$$s=-\frac{b}{a}=-\frac{-۱۴}{۴}=\frac{۱۴}{۴}=\frac{۷}{۲}$$

در معادله‌ی $x^۲+(۱-a)x+۲a=۰$ مجموع ریشه‌ها برابر حاصل‌ضرب آن‌ها است. مقدار a کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

گزینه ۲

شرط برابر بودن جمع و ضرب ریشه‌ها:

$$-\frac{b}{a}=\frac{c}{a} \xrightarrow{\times a} -b=c$$

در نتیجه:

$$-(۱-a)=۲a \rightarrow -۱+a=۲a \Rightarrow a=-۱$$

در معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲+(m+۱)x-۱۲=۰$، مجموع دو ریشه $\frac{۵}{۲}$ می‌باشد. ریشه‌ی مثبت کدام است؟ (کنکور ۹۷)

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۲ ۴) ۳

گزینه ۱

باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{a}=\frac{۵}{۲} \rightarrow -\frac{m+۱}{۲}=\frac{۵}{۲} \xrightarrow{\times(-۲)} m+۱=-۵ \Rightarrow m=-۶$$

پس معادله به صورت $۲x^۲-۵x-۱۲=۰$ بوده؛ طبق روش دلتا:

$$\Delta=(-۵)^۲-۴(۲)(-۱۲)=۲۵+۹۶=۱۲۱ \xrightarrow{\sqrt{\Delta}=۱۱} \begin{cases} x=\frac{۵+۱۱}{۲(۲)}=۴ \\ x=\frac{۵-۱۱}{۲(۲)}=-\frac{۳}{۲} \end{cases}$$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲-۴x+۲=۰$ باشند، حاصل عبارت $۳\alpha+۳\beta-۷\alpha\beta$ کدام است؟

❶ -۴ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ -۲

گزینه ۴

جمع جواب‌ها $s=-\frac{b}{a}=-\frac{-۴}{۱}=۴$ و ضرب جواب‌ها $p=\frac{c}{a}=\frac{۲}{۱}=۲$ است. پس:

$$۳\alpha+۳\beta-۷\alpha\beta=۳(\underbrace{\alpha+\beta}_{s})-۷\underbrace{\alpha\beta}_{p}=۳(۴)-۷(۲)=۱۲-۱۴=-۲$$

در معادله‌ی $-x^۲+ax+۵=۰$ یکی از ریشه‌ها $\frac{۱}{۵}$ است. ریشه‌ی دیگر کدام است؟

❶ -۵ ❷ -۱۰ ❸ -۱۵ ❹ -۲۵

گزینه ۴

اگر ریشه‌ی دیگر را β بگیرید، با توجه به فرمول ضرب ریشه‌ها:

$$\frac{۱}{۵}\times\beta=\frac{c}{a} \rightarrow \frac{۱}{۵}\beta=\frac{۵}{-۱}=-۵ \xrightarrow{\times۵} \beta=۵(-۵)=-۲۵$$

ضرایب معادله‌ی $۲kx^۲-۴x-۴k-۵=۰$ صحیح هستند. اگر به ازای مقدار k، حاصل‌ضرب ریشه‌های این معادلـه دارای بیشترین مقدار باشد، مقدار Δ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۷ ❹ ۲۸

گزینه ۱

حاصل‌ضرب جواب‌های معادله:

$$\frac{c}{a}=\frac{-۴k-۵}{۲k}=-\frac{۴k}{۲k}-\frac{۵}{۲k}=-۲-\frac{۵}{۲k}$$

اگر $۲k$ برابر -۱ باشد، بیشترین مقدار $-۲-\frac{۵}{۲k}$ حاصل می‌شود. پس $k=-\frac{۱}{۲}$ بوده، معادله به صورت $-x^۲-۴x-۳=۰$ و Δ قابل تعیین است:

$$\Delta=(-۴)^۲-۴(-۱)(-۳)=۱۶-۱۲=۴$$

هر دو ریشه‌ی معادله $(۲a+۱)x^۲-۴ax+۲a-۱=۰$ مثبت هستند. a کدام مقدار زیر می‌تواند باشد؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ $\frac{۱}{۴}$ ❷ $-\frac{۳}{۱۰}$ ❸ $-\frac{۲}{۳}$ ❹ $\frac{۳}{۸}$

گزینه ۳

طبق اطلاعات داده شده باید جمع و ضرب ریشه‌ها مثبت باشد:

ضرب: $\frac{۲a-۱}{۲a+۱}>۰$ جمع: $-\frac{-۴a}{۲a+۱}>۰ \rightarrow \frac{۴a}{۲a+۱}>۰$

مجبوریم گزینه‌ها را در این دو شرط آزمایش کنیم که با قدری دقت، غیر از گزینه‌ی سوم، بقیه رد می‌شوند:

$$\frac{\overbrace{۲(-\frac{۲}{۳})-۱}^{<۰}}{\underbrace{۲(-\frac{۲}{۳})+۱}_{<۰}}>۰ \quad \text{و} \quad \frac{\overbrace{۴(-\frac{۲}{۳})}^{<۰}}{\underbrace{۲(-\frac{۲}{۳})+۱}_{<۰}}>۰$$

یادآوری: (اثر قدرمطلق)

وقتی عدد یا عبارتی داخل قدرمطلق قرار می‌گیرد؛

فقط اگر کلیت مقدار داخل قدر منفی باشد، قرینه‌ی آن خارج می‌شود.

در غیر این صورت، قدرمطلق بی تاثیر است. چند نمونه:

$|۴|=۴ \quad |-۳|=(-۳)=۳ \quad |۴-۹|=|-۵|=۵ \quad |\underbrace{۲-\sqrt{۵}}_{<۰}|=-(۲-\sqrt{۵})=-۲+\sqrt{۵}$

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^۲+۷x-۳=۰$ و $\alpha>۰$ باشد، حاصل $|\alpha+۲\beta|+|\alpha|-|\beta|$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

❶ $۲\alpha+۳\beta$ ❷ $-۲\alpha-۳\beta$ ❸ β ❹ $-\beta$

گزینه ۴

جمع جواب‌ها $\alpha+\beta=-\frac{b}{a}=-۷$ و ضرب جواب‌ها $\alpha\beta=\frac{c}{a}=-۳$ است. پس β منفی بوده و در نتیجه $\alpha+۲\beta=\alpha+\beta+\beta=-۷+\beta$ نیز منفی است. بنابراین:

$$|\alpha+۲\beta|+|\alpha|-|\beta|=-(\alpha+۲\beta)+\alpha-(-\beta)=-\alpha-۲\beta+\alpha+\beta=-\beta$$

نکته ۶

ریشه‌های قرینه و معکوس:

در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$، با توجه به نکته‌ی قبل:

- چون جمع ریشه‌ها $-\frac{b}{a}$ است، شرط قرینه بودن آن‌ها $b=۰$ است.
- چون ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}$ است، شرط معکوس (وارون) بودن جواب‌ها $\frac{c}{a}=۱$ است.

بعلاوه:

همواره باید از شرط $\Delta \geq ۰$ (یا وجود جواب) در معادله مطمئن باشید.

در چه شرایطی معادله‌ی $x^۲+ax-b=۰$ دو ریشه‌ی قرینه دارد؟

❶ $a>۰$ و $b=۰$ ❷ $a<۰$ و $b=۰$ ❸ $a=۰$ و $b<۰$ ❹ $a=۰$ و $b>۰$

گزینه ۴

طبق نکته‌ی قبل، باید $a=۰$ باشد. در این صورت معادله به صورت $x^۲=b$ بوده و برای وجود جواب باید:

$$b>۰$$

معادله‌ی گویا را می‌توان قدری سریع‌تر از آن‌چه قبلاً گفته شد، حل کرد:

نکته ۷

برای حل معادله‌ی گویا:

- بین کسرها، مخرج مشترک (ک.م.م) بگیرید.
- مخرج مشترک را در تمام عبارات دو طرف ضرب کرده و همه را ساده کنید.

در این صورت:

به یک معادله‌ی درجه اول یا دوم می‌رسید که قابل حل است.

توجه کنید: (حالت خاص)

گاهی معادله‌ی گویا به شکل ساده‌تر $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ تبدیل می‌شود که با عمل «طرفین- وسطین» قابل حل خواهد شد.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \rightarrow a\times d=b\times c$$

تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{۵x-۵}{x-۳}=\frac{۱۰}{x-۳}-۲$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۰ ❸ ۲ ❹ ۳

گزینه ۲

مشابه موارد قبل:

$$(x-۳)\times\frac{۵x-۵}{x-۳}=(x-۳)\times\frac{۱۰}{x-۳}-(x-۳)\times۲ \rightarrow ۵x-۵=۱۰-۲x+۶$$

$$\rightarrow ۵x+۲x=۱۶+۵ \rightarrow ۷x=۲۱ \Rightarrow x=\frac{۲۱}{۷}=۳$$

چون عدد حاصل شده، مخرج کسرها را صفر می‌کند، قابل قبول نیست.

یک کیک را ابتدا بین افراد حاضر در یک مهمانی به طور مساوی تقسیم کردیم. سپس چهار نفر این مهمانی را ترک کردند و دوباره کیکی به همان اندازه‌ی قبل را بین نفرات باقی‌مانده تقسیم کردیم که $\frac{۱}{۳}$ بیشتر از قبل به هر نفر رسید. اگر نصف کیک را بین نفرات ابتدایی تقسیم می‌کردیم، به هر نفر چه سهمی از کیک می‌رسید؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ $\frac{۱}{۶}$ ❷ $\frac{۱}{۱۲}$ ❸ $\frac{۱}{۱۶}$ ❹ $\frac{۱}{۲۴}$

گزینه ۲

تعداد نفرات اولیه را x می‌گیریم. سهم هر نفر در ابتدا $\frac{۱}{x}$ و بعد از خروج چهار نفر، $\frac{۱}{x-۴}$ بوده است. طبق شرایط گفته شده:

$$\frac{۱}{x-۴}=\frac{۱}{x}+\frac{۱}{۳} \rightarrow \frac{۱}{x-۴}=\frac{x+۳}{۳x} \rightarrow x^۲+۳x-۴x-۱۲=۳x$$

$$\rightarrow x^۲-۴x-۱۲=۰ \rightarrow (x-۶)(x+۲)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۶$$

در نتیجه جواب:

$$\frac{\frac{۱}{۲}}{۶}=\frac{۱}{۱۲}$$

حاصل‌ضرب ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x}{x-۲}-\frac{۳}{x+۳}=۲$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ -۱۸ ❷ $-۶/۵$ ❸ -۳ ❹ $-۱/۵$

گزینه ۱

استفاده از عبارت $(x-۲)(x+۳)$:

$$(x-۲)(x+۳)\times\frac{x}{x-۲}-(x-۲)(x+۳)\times\frac{۳}{x+۳}=(x-۲)(x+۳)\times۲ \rightarrow x^۲+۳x-۳x+۶=۲(x^۲+x-۶)$$

$$\rightarrow x^۲+۶=۲x^۲+۲x-۱۲ \rightarrow x^۲+۲x-۱۸=۰$$

حاصل‌ضرب ریشه‌ها $\frac{c}{a}=\frac{-۱۸}{۱}=-۱۸$ است.

قدرمطلق تفاضل ریشه‌های معادله‌ی $\frac{x-۳}{x-۴}+\frac{۱}{۲x-۲}=\frac{۲}{۳}$ کدام است؟ (کنکور خارج ۹۹)

❶ ۴ ❷ ۴/۵ ❸ ۵/۵ ❹ ۵

گزینه ۲

با توجه به مخرج $۲(x-۱)$، $۲x-۲=۲(x-۱)$، کافی است همه در $۶(x-۴)(x-۱)$ ضرب شوند:

$$۶(x-۴)(x-۱)\times\frac{x-۳}{x-۴}+۶(x-۴)(x-۱)\times\frac{۱}{۲x-۲}=۶(x-۴)(x-۱)\times\frac{۲}{۳}$$

$$\rightarrow\ ۶(x-۱)(x-۳)+۳(x-۴)=۲(x-۴)(x-۱)\times۲$$

$$\rightarrow\ ۶x^{۲}-۲۴x+۱۸+۳x-۱۲=۴x^{۲}-۲۰x+۱۶\ \rightarrow\ ۲x^{۲}-x-۱۰=۰$$

به روش دلتا دو جواب -۲ و $۲/۵$ حاصل می‌شود و قدرمطلق تفاضل آن‌ها برابر است با:

$$|۲/۵-(-۲)|=۴/۵$$

به ازای کدام مقدار a، معادله‌ی $\frac{x-۲}{ax-۵}=\frac{a+۲}{x-۱}-۱$ دارای جواب $x=۳$ است؟ (کنکور ۹۸)

❶ -۲ و $\frac{۱}{۳}$ ❷ ۲ و $-\frac{۱}{۳}$ ❸ ۱ و $-\frac{۲}{۳}$ ❹ ۱ و $\frac{۲}{۳}$

گزینه ۲

عدد ۳ را در معادله جایگزین x می‌کنیم: $\frac{۱}{۳a-۵}=\frac{a+۲}{۲}-۱$. اکنون معادله‌ی گویا را بر حسب a حل می‌کنیم:

$$۲(۳a-۵)\times\frac{۱}{۳a-۵}=۲(۳a-۵)\times\frac{a+۲}{۲}-۲(۳a-۵)\times۱\ \rightarrow\ ۲=۳a^{۲}+۶a-۵a-۱۰-۶a+۱۰$$

$$\rightarrow\ ۳a^{۲}-۵a-۲=۰\xrightarrow{\Delta=۲۵+۲۴=۴۹}\begin{cases}a=\frac{۵+۷}{۶}=۲\\ a=\frac{۵-۷}{۶}=-\frac{۱}{۳}\end{cases}$$

مجموع معکوس دو مضرب متوالی عدد ۵ برابر $\frac{۱}{۶}$ است، اگر a مجموع آن دو عدد باشد، مجموع ارقام a کدام است؟

(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۶ ❷ ۷ ❸ ۸ ❹ ۹

گزینه ۲

اگر یکی از عددها را x بگیریم، عدد بعدی آن $x+۵$ است. طبق اطلاعات داده شده:

$$\frac{۱}{x}+\frac{۱}{x+۵}=\frac{۱}{۶}\ \rightarrow\ \frac{x+۵+x}{x(x+۵)}=\frac{۱}{۶}\ \Rightarrow\ \frac{۲x+۵}{x^{۲}+۵x}=\frac{۱}{۶}$$

معادله را با طرفین- وسطین به صورت زیر نوشته و حل می‌کنیم:

$$x^{۲}+۵x=۱۲x+۳۰\ \rightarrow\ x^{۲}-۷x-۳۰=۰\ \rightarrow\ (x-۱۰)(x+۳)=۰\ \Rightarrow\ x=۱۰\ ,\ x=-۳$$

چون جواب باید مضرب ۵ باشد، فقط $x=۱۰$ قابل قبول است. در نتیجه عدد دیگر $x+۵=۱۵$ است و جواب:

$$a=۱۰+۱۵=۲۵\longrightarrow\ ۲+۵=۷$$

معادله‌ی $\frac{ax^{۳}+۲x}{x+۱}=x^{۲}-x$ دارای سه ریشه‌ی حقیقی متمایز است. کدام نامساوی زیر همواره برقرار است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ $a<-۲$ ❷ $a\geq -۲$ ❸ $a\leq ۱$ ❹ $a<۱$

گزینه ۴

معادله را به شکل مناسبی می‌نویسیم:

$$\frac{\overbrace{ax^۳+۲x}^{=x(ax^۲+۲)}}{x+۱}=\overbrace{x^۲-x}^{=x(x-۱)} \rightarrow x(ax^۲+۲)=x\overbrace{(x-۱)(x+۱)}^{=(x^۲-۱)} \rightarrow x[ax^۲+۲-(x^۲-۱)]=۰$$

$$\rightarrow x[(a-۱)x^۲+۳)]=۰$$

یک جواب $x=۰$ است. طبق فرض باید معادله‌ی زیر هم دو جواب داشته باشد:

$$(a-۱)x^۲+۳=۰ \rightarrow (a-۱)x^۲=-۳ \Rightarrow x^۲=\frac{-۳}{a-۱}$$

پس $\frac{-۳}{a-۱}$ مثبت بوده و بنابراین:

$$a-۱<۰ \Rightarrow a<۱$$

رانندهٔ یک خودرو باید مسیری ۲۰۰ کیلومتری را طی کند. اگر او سرعتش را ۲۰ کیلومتر بر ساعت کاهش دهد، ۵۰ دقیقه دیرتر به مقصد می‌رسد. نسبت سرعت اولیه خودرو به سرعت خودرو پس از کاهش کدام است؟ **(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)**

❶ $\frac{۳}{۲}$ ❷ $\frac{۴}{۳}$ ❸ $\frac{۵}{۴}$ ❹ $\frac{۶}{۵}$

گزینه ۲

اگر سرعت اولیه را x بگیریم، زمان رسیدن به مقصد $\frac{۲۰۰}{x}$ ساعت و در صورت کاهش سرعت، این زمان به $\frac{۲۰۰}{x-۲۰}$ ساعت افزایش می‌یابد. چون اختلاف این دو مقدار $\frac{۵۰}{۶۰}=\frac{۵}{۶}$ ساعت داده شده، داریم:

$$\frac{۲۰۰}{x-۲۰}-\frac{۲۰۰}{x}=\frac{۵}{۶} \xrightarrow{\times ۶x(x-۲۰)} ۶x\times ۲۰۰-\overbrace{۶(x-۲۰)\times ۲۰۰}^{-۶x\times ۲۰۰+۱۲۰\times ۲۰۰}=۵x(x-۲۰)$$

$$\xrightarrow{\div ۵} ۱۲۰\times ۴۰=x^۲-۲۰x \rightarrow x^۲-۲۰x-۴۸۰۰=۰$$

با قدری دقت، معادله به روش تجزیه قابل حل است:

$$(x+۶۰)(x-۸۰)=۰ \xrightarrow{x>۰} x=۸۰ \Rightarrow \text{جواب}=\frac{۸۰}{۸۰-۲۰}=\frac{۸۰}{۶۰}=\frac{۴}{۳}$$

مطلب بعدی در برخی سؤالات نسبتاً قوی و گاهی برای حل سریع مورد نیاز است.

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a+\frac{۱}{a}$، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مورد بسیار مهم زیر وجود دارند:

تساوی $a+\frac{۱}{a}=۲$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=۱$ باشد.

۹:

تساوی $a+\frac{۱}{a}=-۲$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a=-۱$ باشد.

مثال: معادله‌ی $\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}$ را حل کنید.

پاسخ

به محض مشاهده‌ی دو عبارت معکوس هم در یک عبارت، نکته‌ی قبل را به یاد آورید:

$$\frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۲-\frac{۲x+۱}{x^۲-۲} \rightarrow \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}+\frac{۲x+۱}{x^۲-۲}=۲ \Rightarrow \frac{x^۲-۲}{۲x+۱}=۱$$

معادله‌ی جدید را با طرفین وسطین جواب می‌دهیم:

$$x^۲-۲=۲x+۱ \rightarrow x^۲-۲x-۳=۰ \Rightarrow x=-۱,۳$$

جواب‌های به‌دست آمده ریشه‌ی هیچ مخرجی از معادله نبوده و هر دو قابل قبول هستند.

در پایان، نمونه‌ای دیگر از کاربرد معادلات گویا:

دو شیر به یک استخر متصل هستند. شیر اول استخر را ۱۰ ساعت زودتر از شیر دوم پر می‌کند و دو شیر با هم در ۱۲ ساعت استخر را پر می‌کنند. شیر دوم به تنهایی در چند ساعت استخر را پر می‌کند؟

❶ ۳۰ ❷ ۲۰ ❸ ۱۴ ❹ ۲۴

گزینه ۱

فرض کنید شیر دوم به تنهایی در x ساعت استخر را پر کند. پس شیر اول به تنهایی در $x-۱۰$ ساعت این کار را انجام می‌دهد. معادله‌ی مربوطه چنین است:

$$\frac{۱}{x-۱۰}+\frac{۱}{x}=\frac{۱}{۱۲}$$

حل معادله با ضرب $۱۲x(x-۱۰)$:

$$۱۲x(x-۱۰)\times\frac{۱}{x-۱۰}+۱۲x(x-۱۰)\times\frac{۱}{x}=۱۲x(x-۱۰)\times\frac{۱}{۱۲} \rightarrow ۱۲x+۱۲x-۱۲۰=x^۲-۱۰x$$

$$\rightarrow x^۲-۳۴x+۱۲۰=۰$$

با قدری دقت، معادله با عددهای ۴ و ۳۰ به روش اتحاد مشترک تجزیه می‌شود:

$$(x-۳۰)(x-۴)=۰ \rightarrow \begin{cases} x-۳۰=۰ \Rightarrow x=۳۰ \\ x-۴=۰ \Rightarrow x=۴ \end{cases}$$

(**توجه:** جواب ۴ غیرممکن است. چرا؟)

TEST تمرین تست

۱ مجموع عددی با نصف معکوس آن عدد برابر $\frac{۴۳}{۳۰}$ می‌باشد. این عدد کدام است؟

❶ $\frac{۷}{۵}$ یا $\frac{۳}{۵}$ ❷ $\frac{۵}{۶}$ یا $\frac{۳}{۵}$ ❸ $\frac{۵}{۷}$ یا $\frac{۵}{۳}$ ❹ $\frac{۵}{۳}$ یا $\frac{۶}{۵}$

۲ علی استخری به طول ۴۰ متر را ۲۰ ثانیه دیرتر از امیر شنا می‌کند. اگر آن‌ها از دو طرف استخر به سمت یکدیگر شنا کنند، پس از ۲۴ ثانیه به هم می‌رسند. سرعت علی چند متر بر ثانیه است؟

❶ ۱ ❷ $\frac{۳}{۲}$ ❸ $\frac{۲}{۳}$ ❹ ۲

۳ جواب‌های معادله‌ی $(x+۲)(x-۳)=(x-۳)$ کدام است؟

❶ فقط ۳ ❷ فقط -۱ ❸ -۱ و ۳ ❹ -۳ و ۳

۴ کدام معادله دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟

❶ $۴۵۹x^۲+۶۵x+۱۰۰=۰$ ❷ $۲۹۵x^۲-۷۰x-۱۱=۰$
❸ $۲۰۹x^۲-۱۴۵x+۱۳۱=۰$ ❹ $۱۲۱x^۲-۲۰۰x+۱۱۱=۰$

۵ در حل معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۶x=۱$ در روش مربع کامل چه عددی را باید به دو طرف تساوی اضافه کرد؟

❶ ۳۶ ❷ ۹ ❸ -۹ ❹ -۳۶

۶ معادله‌ی درجه دوم $x^۲-۱۰x-۱=۰$ در روش مربع کامل به $(x+m)^۲=h$ تبدیل شده است. $m+h$ کدام است؟

❶ ۱۸ ❷ ۲۱ ❸ ۲۵ ❹ ۳۱

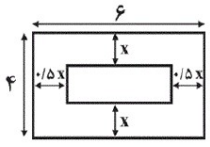
۷ اگر $m>۰$ بوده و یکی از جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $(x+m)^۲+۳m-۲x=۱۰$ برابر -۲ باشد، جواب دیگر معادله کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۲ ❸ ۰ ❹ -۱

۸ ریشه‌ی کوچک‌تر معادله‌ی $۲x^۲-۷x+۳=۰$ کدام است؟

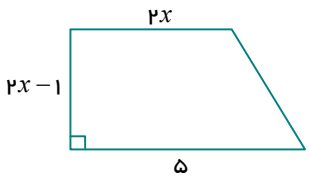
❶ -۳ ❷ $-\frac{۱}{۲}$ ❸ $\frac{۱}{۲}$ ❹ ۳

۹ اگر در شکل روبه‌رو مساحت مستطیل داخلی ۱۶ واحد باشد، مقدار x کدام است؟



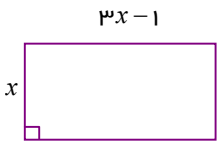
❶ $۲\sqrt{۳}-۲$ ❷ $۳\sqrt{۲}-۴$
❸ $۴-۲\sqrt{۳}$ ❹ $۴\sqrt{۲}-۳$

۱۰ اگر مساحت ذوزنقه‌ی شکل مقابل برابر ۸ باشد، x کدام است؟



❶ $\frac{۷}{۲}$ ❷ $\frac{۳}{۲}$ ❸ $\frac{۵}{۲}$ ❹ $\frac{۱}{۲}$

۱۱ اگر در مستطیل شکل زیر، عدد مساحت ۲ واحد بیشتر از عدد محیط آن باشد، محیط شکل کدام است؟



❶ ۱۱
❷ ۱۲
❸ ۲۴
❹ ۲۲

۱۲ اگر معادله‌ی درجه دوم $۲x^۲ - ۳x + m - ۱ = ۰$ ریشه‌ی حقیقی نداشته باشد، حدود m کدام است؟

❶ $m \le \frac{۱۷}{۸}$ ❷ $m < \frac{۱۷}{۸}$ ❸ $m > \frac{۱۷}{۸}$ ❹ $m \ge \frac{۱۷}{۸}$

۱۳ در معادله‌ی $x^۲ - ۵x - ۱ = ۰$ حاصل جمع ریشه‌ها چند برابر حاصل ضرب آن‌ها است؟

❶ ۵ ❷ -۵ ❸ -۱ ❹ ۱

۱۴ برای کدام مقدار t، معادله‌ی $x^۲ - (t-۱)x - t = ۰$ دو جواب حقیقی قرینه دارد؟

❶ ۲ ❷ ۰ ❸ -۱ ❹ ۱

۱۵ به ازای چه مقادیری از a معادله‌ی $ax^۲ - ۴x + ۳ = ۰$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی متمایز است؟ ($a \neq ۰$)

❶ $a < \frac{۴}{۳}$ ❷ $a \ge \frac{۴}{۳}$ ❸ برای هر مقدار a ❹ $a > ۰$

۱۶ جواب معادله‌ی $\frac{x-۲}{x-۳} = \frac{x+۱}{x+۲}$ کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۲}$ ❷ $\frac{۱}{۴}$ ❸ $\frac{۷}{۲}$ ❹ $\frac{۴۹}{۴}$

۱۷ در مورد معادله‌ی $\frac{۱}{x^۲ - ۴} = \frac{x}{۲-x} + \frac{۳-x}{x+۲}$ کدام گزینه صحیح است؟

❶ یک جواب مثبت دارد.
❷ یک جواب منفی دارد.
❸ دو جواب متمایز دارد.
❹ جواب ندارد.

۱۸ به ازای کدام مقدار a معادله‌ی $\frac{ax}{x-۱} + \frac{x+۱}{x} = a$ دارای جواب $x = -۲$ است؟

❶ $\frac{۶}{۵}$ ❷ $\frac{۲}{۳}$ ❸ $\frac{۵}{۶}$ ❹ $\frac{۳}{۲}$

۱۹ به ازای کدام مقدار مثبت a معادله‌ی $\frac{۶x}{x-۱}+\frac{x-۱}{ax}=a$ دارای جواب $x=-\frac{۱}{۲}$ است؟

❶ ۴ ❷ ۴/۵ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۰ اختلاف ریشه‌های معادله‌ی $۱۵x^۲+۲۸x+۱۳=۰$ کدام است؟

❶ $\frac{۲۸}{۱۵}$ ❷ $\frac{۲}{۱۵}$ ❸ $\frac{۱۵}{۲۸}$ ❹ $\frac{۱۵}{۲}$

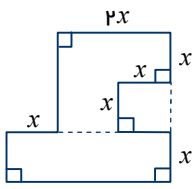
۲۱ برای کدام مقدار a معادله‌ی $ax^۲+۳x=۲a$ دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

❶ $a>۷$ ❷ $a<-۷$ ❸ هر مقدار a ❹ هیچ مقدار a

۲۲ برای کدام مقدار a معادله‌ی $۷x^۲-۳ax-۱=۰$ دو جواب حقیقی متمایز دارد؟

❶ $a>۷$ ❷ $a<-۷$ ❸ هر مقدار a ❹ هیچ مقدار a

۲۳ در شکل مقابل، اگر اندازه‌ی مساحت نصف محیط باشد، مقدار x کدام است؟



❶ $\frac{۷}{۳}$ ❷ $\frac{۷}{۶}$ ❸ $\frac{۶}{۷}$ ❹ $\frac{۳}{۷}$

۲۴ به ازای کدام مقدار a، معادله‌ی $\frac{a}{x}=\frac{a}{x+۱}+\frac{۴}{a-۲x}$ دارای جواب $x=۱$ است؟ (کنکور خارج ۹۸)

❶ -۲ و ۴ ❷ ۲ و -۴ ❸ ۳ و -۲ ❹ ۴ و ۲

۲۵ در معادله‌ی درجه دوم $۳x^۲+۷x-۲m+۲=۰$، حاصل‌ضرب دو ریشه -۲ می‌باشد. ریشه‌ی بزرگ‌تر کدام است؟ (کنکور خارج ۹۷)

❶ $\frac{۲}{۳}$ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ $\frac{۴}{۳}$

۲۶ در معادله‌ی $\frac{x^۲+۱}{x+۴}-\frac{۱۱x-۱}{x+۴}+x=۰$، ریشه‌ها چگونه‌اند؟ (کنکور خارج ۹۶)

❶ یک جواب قابل قبول
❷ دو جواب وارون هم
❸ دو جواب مساوی
❹ دو جواب قرینه

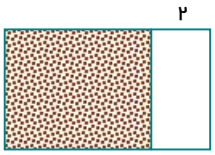
۲۷ به ازای یک مقدار m، ریشه‌های معادله‌ی $۲x^۲+۳mx+۲m+۶=۰$ معکوس یکدیگرند. مجموع این دو ریشه کدام است؟ (کنکور خارج ۹۵)

❶ ۱/۵ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ $-۱/۵$

۲۸ در معادله‌ی $\frac{x-۶}{x-۲}-\frac{x^۲-۴x}{x-۲}+۲x=۰$، ریشه‌ها چگونه‌اند؟ (کنکور ۹۵)

❶ یک جواب قابل قبول
❷ دو جواب وارون هم
❸ دو جواب مساوی
❹ دو جواب قرینه

۲۹ در شکل زیر، مساحت مربع از $\frac{۳}{۴}$ مساحت مستطیل بزرگ‌تر، ۱۸ واحد مربع بیشتر است. محیط مستطیل بزرگ‌تر کدام است؟ (کنکور خارج ۹۹)



❶ ۴۴
❷ ۴۸
❸ ۵۲
❹ ۵۴

۳۰ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\frac{۲x-۱}{x+۲}-\frac{x-۳}{x-۲}=\frac{۲}{۳}$ کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ -۴
❷ ۴
❸ ۶
❹ ۱۲

۳۱ در معادله‌ی $x+\frac{۲x-۱}{x-۴}=-۲$، ریشه‌ها چگونه‌اند؟ (کنکور ۹۶)

❶ فقط یک جواب قابل قبول
❷ دو جواب وارون هم
❸ دو جواب مساوی
❹ دو جواب قرینه

۳۲ اگر عبارت‌های گویا تعریف شده باشند، مجموع جواب‌های معادله‌ی $\frac{۴x^۲-(۲-x)^۲}{x+۲}-\frac{۷}{x}=۲$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ -۱
❷ $\frac{۲}{۳}$
❸ $\frac{۴}{۳}$
❹ $\frac{۷}{۳}$

۳۳ در شکل زیر مستطیل بزرگ از سه مربع یکسان تشکیل شده است. اگر مساحت مستطیل بزرگ از $\frac{۲}{۳}$ مساحت یکی از مربع‌ها ۱۴ واحد بیشتر باشد، اختلاف طول و عرض مستطیل بزرگ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)



❶ $۲\sqrt{۶}$
❷ $\sqrt{۶}$
❸ $\sqrt{۳}$
❹ $۲\sqrt{۳}$

۳۴ معادله‌ی $\frac{x^۲-۲x+۳}{x^۲-۲x}-۱=\frac{x}{x-۲}$ دارای چند جواب منفی است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۰
❷ ۱
❸ ۲
❹ ۳

۳۵ اگر $\frac{۶-a}{۳}=\frac{۳}{a}$ باشد، معادله‌ی $\frac{a}{x}=\frac{x+۱}{x+a}$ دارای چند جواب است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۳
❷ ۲
❸ ۱
❹ ۰

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴