آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

ریاضی دهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی
۲۰

محتوای جامع آموزش

(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب

(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی

(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی

(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی

Up to date

فهرست

آموزش:

ریاضی دهم (تجربی - ریاضی)

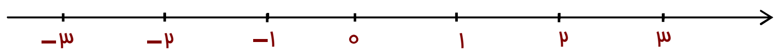
۱

مجموعه، الگو و دنباله

فهرست	صفحه

۱ زیرمجموعه‌های $\mathbb{R}$

اعداد حقیقی $\mathbb{R}$ متناظر تمام نقاط روی محور هستند:



در این بخش، آشنایی بیشتری با این اعداد خواهیم داشت. به‌ویژه، معرفی نوع جدید و مهمی از مجموعه‌ها در عددهای حقیقی را خواهیم دید. یادآوری:

اعداد صحیح:

$$\mathbb{Z}=\{\dots,-3,-2,-1,0,1,2,3,4,\dots\}$$

چند زیر مجموعه‌ی مورد نیاز از $\mathbb{Z}$:

- **اعداد حسابی:** $W=\{0,1,2,3,4,\dots\}$
- **اعداد طبیعی:** $\mathbb{N}=\{1,2,3,4,\dots\}$
- **اعداد طبیعی زوج:** $E=\{2k \mid k\in\mathbb{N}\}=\{2,4,6,\dots\}$

و مجموعه‌ی **اعداد طبیعی فرد:**

$$O=\{2k-1 \mid k\in\mathbb{N}\}=\{1,3,5,\dots\}$$

کسرها از تقسیم دو عدد صحیح ساخته می‌شوند:

اعداد گویا:

مجموعه‌ی تمام عددهای کسری به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Q}=\{\frac{a}{b}:\ a,b\in\mathbb{Z}\ ,\ b\neq 0\}$$

یعنی:

تمام کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها دو عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد.

بنابراین:

تمام عددهای $\frac{2}{5}$، $\frac{-6}{2}=-3$، $\frac{12}{4}=3$ و $\frac{0}{1}=0$ مثال‌هایی از عددهای گویا بوده، ولی $\frac{2}{0}$ تعریف نشده است. بویژه:

تمام عددهای طبیعی و صحیح، عدد گویا هم محسوب می‌شوند.

زیرا می‌توان به این عددها مخرج ۱ داد: $\frac{1}{1}=1$ و $\frac{2}{1}=2$ و . . . . بنابراین:

$$\mathbb{N}\subseteq W\subseteq \mathbb{Z}\subseteq \mathbb{Q}$$

توجه کنید:

می‌توان نشان داد بسیاری از عددهای حقیقی، مانند $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ را نمی‌توان به صورت کسر گویا نوشت؛ بنابراین این عددها گویا نیستند. ولی گاهی:

عدد زیر رادیکال مجذور کامل بوده یا **قابل تبدیل به صورت مجذور یک عدد گویا است.**

در این صورت عدد رادیکالی، گویا خواهد بود.

برای نمونه؛

$$\sqrt{۶۴}=۸\in\mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{۹}{۴۹}}=\sqrt{(\frac{۳}{۷})^{۲}}=\frac{۳}{۷}\in\mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{۵}{۴۵}}=\sqrt{\frac{۱}{۹}}=\frac{۱}{۳}\in\mathbb{Q}$$

بعلاوه:

در سال‌های قبل دیده‌ایم که بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. در کل بدانیم:

بین هر دو عدد حقیقی دلخواه، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

معرفی دقیق‌تر عددهای حقیقی که گویا نیستند:

اعداد گنگ:

هر عدد حقیقی که گویا نباشد، **گنگ** نامیده می‌شود.

یعنی:

هر عددی که نتوان آن را به صورت تقسیم دو عدد صحیح نوشت.

بنابراین:

مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R}-\mathbb{Q}$ است؛ آن را با $\mathbb{Q}'$ یا $\mathbb{Q}^{c}$ نشان می‌دهیم. (**توجه:** $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{Q}'$)

توجه کنید:

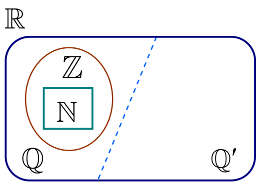
ساده‌ترین عددهای گنگ عبارتند از:

- عددهای رادیکالی نظیر $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۵}$، $\sqrt[۳]{۹}$ و $\sqrt{\frac{۸}{۳}}$ که ساده نمی‌شوند.
- عددهایی نظیر $\sqrt{۳}-\frac{۲}{۵}$ و $۱+\sqrt{۲}$ که از جمع و تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا به‌دست می‌آیند.

بپذیرید: عدد $\pi\cong ۳/۱۴$ نیز گنگ است. **توجه**: عدد $۳/۱۴$ گویا است. (چرا؟)

بنابراین؛

مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های معروف آن با نمودار ون به صورت روبه‌رو قابل نمایش است:



مثال: جواب هر مورد را نوشته و آن را با جمله‌ای مختصر، توصیف کنید.

① $\mathbb{R}-\mathbb{Q}'$

بدیهی است که: $\mathbb{R} - \mathbb{Q}' = \mathbb{Q}$. یعنی:

مجموعه‌ی تمام اعداد گویا

② $\mathbb{Z} - W$

اگر از $\mathbb{Z}$، عددهای حسابی حذف شوند، فقط عددهای صحیح منفی باقی می‌مانند:

مجموعه‌ی قرینه‌های اعداد طبیعی $\qquad \mathbb{Z} - W = \{-۱, -۲, -۳, \ldots\}$

③ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

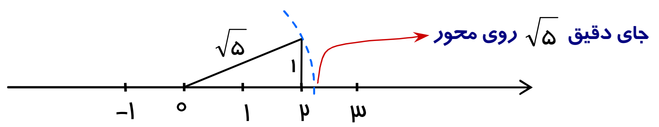
اگر از $\mathbb{R}$ عددهای صحیح حذف شود، حاصل عبارت است از:

مجموعه‌ی اعداد حقیقی غیر صحیح

نمایش روی محور:

- **اعداد گویا:** هر عدد گویا را می‌توان با توجه به مقدار مخرج آن و تقسیم هر واحد از محور، نمایش داد.
- **اعداد گنگ:** برخی از عددهای گنگ را نیز می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه روی محور مشخص کرد.

برای نمونه، نمایش عدد $\sqrt{۵}$ روی محور را ببینید: (دقیق‌تر توضیح دهید!)



توجه:

در پایه‌های قبل دیده‌ایم که بین هر دو کسر می‌توان بی‌شمار کسر گویا نوشت. در کل بدانید:

مانند عددهای گویا، بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

مثال: هر عدد را به صورت تقریبی روی محور اعداد نمایش دهید.

الف) $-\frac{۷}{۴}$ $\qquad$ ب) $۳-\sqrt{۲}$ $\qquad$ پ) $۲\pi-۳$

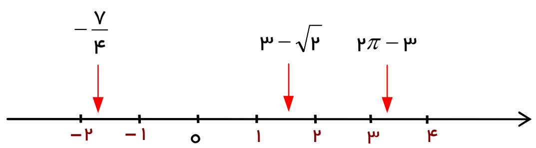
پاسخ

الف) عدد $-\frac{۷}{۴}$ به صورت مخلوط: $-۱\frac{۳}{۴}$ است.

ب) عدد $۳-\sqrt{۲}$ به صورت تقریبی $۳-۱/۴=۱/۶$ است.

پ) عدد $۲\pi-۳$ به صورت تقریبی $۲\times۳/۱۴-۳=۳/۲۸$ است.

نمایش تقریبی هر سه عدد را روی محور می‌بینید:



یک مفهوم جدید:

گاهی لازم است مجموعه‌ای شامل تمام عددهای حقیقی بین دو عدد (برای نمونه؛ بین ۱- و ۳) را نمایش دهیم. یعنی:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -۱ < x < ۳\}$$

نماد مختصر:

با استفاده از عددهای شروع و پایان، آن را با نماد $(-۱,۳)$ نمایش می‌دهیم. نام آن «**بازه**» است و چون شامل عددهای ابتدا و انتها نیست، به آن «**بازه‌ی باز**» گوئیم.

توجه کنید:

در صورتی که عددهای ابتدا و انتهای بازه جزء آن باشند، به جای پرانتز، به ترتیب از کروشه‌های [و] استفاده می‌شود. برای نمونه؛

$$\{x\in \mathbb{R} \mid -۱\le x<۳\}=[-۱,۳)$$

اکنون انواع بازه‌ها را به صورت کلی معرفی می‌کنیم.

بازه‌های اعداد:

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a<b$ باشد، انواع بازه‌های عددی به صورت زیر نوشته شده و هر یک را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط روی محور نمایش داد:

۱) $\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ a<x<b\}=(a,b)$ بازه‌ی باز

۲) $\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ a\le x<b\}=[a,b)$ بازه‌ی نیم‌باز

۳) $\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ a<x\le b\}=(a,b]$ بازه‌ی نیم‌باز

۴) $\{x \mid x\in \mathbb{R}\ ,\ a\le x\le b\}=[a,b]$ بازه‌ی بسته

توجه کنید:

طبق آن‌چه تاکنون گفته‌ایم، هر بازه به شکل بالا شامل بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ است، ولی فقط تعداد محدودی عدد صحیح داشته یا حتی می‌تواند هیچ عدد صحیحی نداشته باشد.

مثال: نامعادله‌ی $۱\ge -۲x+۳>-۴$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه و روی محور نمایش دهید.

پاسخ

در دو مرحله x را تنها می‌کنیم تا جواب مشخص گردد:

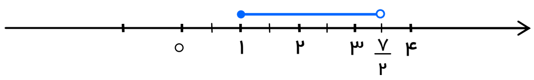
- ابتدا باید عدد $+۳$ را حذف کنیم:

$$۱\ge -۲x+۳>-۴ \xrightarrow{+(-۳)} ۱-۳\ge -۲x+۳-۳>-۴-۳ \rightarrow -۲\ge -۲x>-۷$$

- اکنون در نامعادله‌ی $-۲\ge -۲x>-۷$، لازم است با تقسیم بر -۲، ضریب x حذف شود:

$$-۲\geq -۲x > -۷ \xrightarrow{\div(-۲)} \frac{-۲}{-۲}\leq\frac{-۲x}{-۲}<\frac{-۷}{-۲} \Rightarrow ۱\leq x<\frac{۷}{۲}$$

پس مجموعه جواب $۱\leq x<\frac{۷}{۲}$ بوده و بر حسب بازه‌ها به صورت $[۱,\frac{۷}{۲})$ نوشته خواهد شد. نمایش روی محور:



توجه کنید:

چون عدد ۱ عضو بازه است، برای آن نقطه‌ی توپُر و برای $\frac{۷}{۲}$ که عضو بازه نیست، نقطه‌ی توخالی قرار گرفته است.

---✧---

مثال: هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ و -۲ و $\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}$

ب) $[-۳,-۱]$ و $(\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۲})$ و $(-۲,۰]$

پاسخ

چون $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}\cong ۱/۴-۱/۷=-۰/۳$ و $\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}=\frac{۴+۹}{۶}=\frac{۱۳}{۶}\cong ۲/۱$ است، در نتیجه:

عدد $\sqrt{۲}-\sqrt{۳}$ در $(-۲,۰]$، عدد -۲ در $[-۳,-۱]$ و عدد $\frac{۲}{۳}+\frac{۳}{۲}$ در $(\frac{۵}{۳},\frac{۵}{۲})$ قرار دارد.

---✧---

توجه کنید:

برای محاسبات روی بازه‌ها، مانند اجتماع، اشتراک و . . . ، بهتر است همه‌ی آن‌ها را روی یک محور نمایش داده و محاسبات مربوطه را به سادگی انجام دهیم. نمونه‌های بعد را ببینید:

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک بازه نشان دهید:

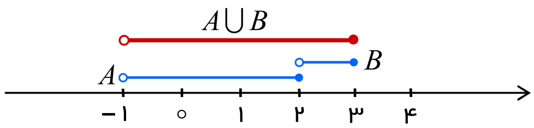
الف) $(-۱,۲]\cup(۲,۳]$

ب) مجموعه‌ی $B-A$ با داشتن $A=[۰,۳)$ و $B=(-۲,۲]$.

پاسخ

هر چند بدون رسم (ذهنی) هم می‌توان جواب را مشخص کرد، هر وقت لازم بود، از محور کمک بگیرید.

الف) نمایش $A=(-۱,۲]$، $B=(۲,۳]$ و $A\cup B$ را در شکل زیر می‌بینید:



بنابراین $(-۱,۲]\cup(۲,۳]=(-۱,۳]$ خواهد بود.

ب) باید قسمتی از B که در A نیست را تعیین کنیم؛ جواب $B-A=(-۲,۰)$ خواهد شد.

---✧---

با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱. اگر رابطه‌ی $[-۲,a+۱]=[a,b]\cap[-۳,a+۲]$ برای بازه‌ها برقرار باشد، حاصل‌ضرب a و b را بیابید.

جواب: ۲

برخی بازه‌ها، ابتدا یا انتها ندارند:

بازه‌های بی‌کران:

بازه‌هایی که از یک طرف یا از هر دو طرف بی‌کران (نامحدود) هستند، با استفاده از نماد بی‌نهایت ∞، به‌طریق مشابه تعریف می‌شوند:

۱) $\{x\in\mathbb{R} \mid x>a\}=(a,+\infty)$

۲) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\geq a\}=[a,+\infty)$

۳) $\{x\in\mathbb{R} \mid x<a\}=(-\infty,a)$

۴) $\{x\in\mathbb{R} \mid x\leq a\}=(-\infty,a]$

۵) $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$ مجموعه تمام اعداد روی محور حقیقی

توجه کنید:

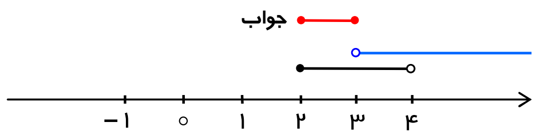
هرگاه در سمتی از یک بازه نماد $+\infty$ یا $-\infty$ قرار گیرد، بازه‌ی نظیر آن به‌صورت پرانتز (باز) است. زیرا این دو نماد خودشان عدد نبوده و عضو هیچ بازه‌ای نیستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را با رسم بازه‌ها روی محور به‌دست آورید.

$$[۲,۴)-(۳,+\infty)$$

پاسخ

می‌دانید که باید قسمت‌های مشترک بین دو بازه، از $[۲,۴)$ حذف شود:



$$[۲,۴)-(۳,+\infty)=[۲,۳]$$

مثال: هر مورد را بر حسب اجتماع بازه‌ها بنویسید.

① $\mathbb{R}-\{-۱\}$

تمام محور به جز عدد -۱ قبول هستند:

$$(-\infty,-۱)\cup(-۱,+\infty)$$

② $[-۲,+\infty)-(-۲,۲]$

در صورت نیاز با رسم محور، به آسانی داریم:

$$[-۲,+\infty)-(-۲,۲]=\{-۲\}\cup(۲,+\infty)$$

مثال: (از کتاب) هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $۰/۲$ و $-\frac{۵}{۴}$ و -۵۰۰ و $۶/۲۲\times۱۰^{۲۳}$

ب) $(-\infty,-۴)$ و $[۳,+\infty)$ و $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$ و $(-۲,۳)$

پاسخ

به آسانی (یا با نمایش روی محور) معلوم است که:

عدد $۰/۲$ در $(-\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۲}]$، عدد $-\frac{۵}{۴}$ در $(-۲,۳)$، عدد -۵۰۰ در $(-\infty,-۴)$

و عدد $۶/۲۲\times۱۰^{۲۳}$ در $[۳,+\infty)$ قرار دارد.

در صورت لزوم، با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۲. اگر $A=\{x|\, x\in\mathbb{R}\ ,\ x<۲\}$ و $B=\{x|\, x\in\mathbb{R}\ ,\ x>-۳\}$، نقطه‌ی وسط بازه‌ی $A\cap B$ را مشخص کنید.

جواب: $-\frac{۱}{۲}$

در پایان این بخش، مجموعه‌ها را از جنبه‌ی دیگری به دو نوع تقسیم می‌کنیم:

متناهی یا نامتناهی:

مجموعه‌ها بر حسب تعداد عضوهایشان به دو نوع متناهی و نامتناهی تقسیم می‌شوند. بعلاوه؛ یک مجموعه فقط وقتی متناهی است که:

تعداد عضوهای آن مشخص و برابر عددی از مجموعه‌ی اعداد حسابی باشد.

برای نمونه؛

مجموعه‌ی $\{101,102,103,\dots,999\}$ متناهی و زیرمجموعه‌ی $\{\dots,-2,-1,0,1,2\}$ از $\mathbb{Z}$، نامتناهی است.

به موارد زیر نیز توجه داشته باشید:

- تعداد عضوهای مجموعه‌ی $\varnothing$ (مجموعه‌ی تهی) برابر صفر بوده و این مجموعه متناهی است.
- تمام مجموعه‌های استاندارد $\mathbb{N}$، W، $\mathbb{Z}$، $\mathbb{Q}$، $\mathbb{Q}'$ و $\mathbb{R}$ نامتناهی هستند.
- تمام بازه‌ها نامتناهی هستند. (مثال بعد را ببینید.)

مثال: الف) عددهای $\frac{1}{2}$، $\frac{1}{3}$، $\frac{1}{4}$ و . . . ، در مقایسه با عددهای صفر و یک چگونه‌اند؟

ب) با توجه به قسمت قبل، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن بازه $(0,1)$ چه می‌توان گفت؟

پاسخ

الف) واضح است که هر کدام از این عددهای مثبت، از 1 کوچک‌تر هستند. یعنی:

$$0<\dots<\frac{1}{5}<\frac{1}{4}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}<1$$

ب) عددهای کسری در قسمت (الف) بی‌پایان هستند و چون همگی در بازه‌ی $(0,1)$ قرار دارند؛

بازه‌ی $(0,1)$ به عنوان یک مجموعه، نامتناهی است.

مثال: با بررسی اعضای مجموعه‌های زیر، متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام را معلوم کنید.

الف) $A=\{(-1)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ ب) $B=\{2^n+(-2)^n \mid n\in\mathbb{N}\}$ پ) $C=\{\frac{|n|}{n^2}n \mid n\in\mathbb{N}\}$

پاسخ

الف) با توجه به زوج یا فرد بودن توان، فقط دو عدد در A قرار داشته و متناهی است:

$$\text{زوج } n:\ (-1)^n=1 \quad \text{و} \quad \text{فرد } n:\ (-1)^n=-1 \ \Rightarrow\ A=\{-1,1\}$$

ب)

$$\text{زوج } n:\ 2^n+(-2)^n=2^n+2^n=2\times 2^n=2^{n+1} \quad \text{و} \quad \text{فرد } n:\ 2^n+(-2)^n=2^n-2^n=0$$

پس مجموعه‌ی $B=\{0,2^{2+1},2^{4+1},2^{6+1},\dots\}=\{0,2^3,2^5,2^7,\dots\}$ نامتناهی است.

پ) چون n مثبت است، قدر مطلق روی آن بی اثر است و: $\frac{|n|}{n^2}n=\frac{n}{n^2}n=\frac{n^2}{n^2}=1$. یعنی مجموعه فقط یک عضو داشته و متناهی است:

$$C=\{1\}$$

ویژه دانش‌آموز

۳. با تعیین اعضای مجموعه‌ی زیر، مشخص کنید که آن متناهی است یا نامتناهی؟

$$A=\{x\in \mathbb{Z} : \frac{۱}{x}\in \mathbb{Z}\ \}$$

جواب: ۲ عضو

مثال: مجموعه‌های A و B نامتناهی و مجموعه‌ی C متناهی است. متناهی یا نامتناهی بودن هر مورد را در صورت امکان معلوم کنید.

الف) $A\bigcup C$ ب) $B\bigcap C$ پ) $B-A$

پاسخ

الف) چون A نامتناهی بوده و $A\bigcup C$ شامل تمام عضوهای A هم هست، باید نامتناهی باشد.

ب) چون C متناهی است و $B\bigcap C$ عضوی خارج از C ندارد، باید متناهی باشد.

پ) نمی‌توان جواب قطعی داد، یعنی: $B-A$ ممکن است متناهی یا نامتناهی شود. نمونه‌ها:

- اگر $A=W$ و $B=\mathbb{Z}$ باشند، $B-A=\{-۱,-۲,-۳,\dots\}$ نامتناهی می‌شود.
- اگر $A=\mathbb{N}$ و $B=W$ باشند، $B-A=\{۰\}$ متناهی می‌شود.

پاسخ دهید (۱)

۱- مجموعه جواب نامعادلات زیر را به صورت بازه نمایش دهید:

الف) $۲x+۵\leq ۶x-۱$ ب) $-۲<۸x-۱\leq ۵$

پ) $-۱<-\frac{x-۳}{۳}\leq ۲$ ت) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۱}{۳}x+x\geq ۲(-x+۱)$

۲- اگر $A=\{x\in \mathbb{R} \mid x\geq ۱\}$ و $B=\{x\in \mathbb{R} \mid -۳<x\leq ۲\}$ و $C=\{x\in \mathbb{R} \mid x\geq ۱\}$ باشند، عبارت‌های زیر را به صورت بازه مشخص کنید:

الف) $(A\bigcap B)\bigcup C$ ب) $C-(A\bigcup B)$

۳- اگر نقطه‌ی میانی بازه‌ی $[۴t-۱,t+۷]$ برابر -۲ باشد، مقدار t و بازه‌ی مربوطه را مشخص کنید.

۴- مقادیر a و b را طوری مشخص کنید که نقطه‌ی میانی بازه‌ی $(۲a+b,a-b)$ برابر ۳ و طول آن برابر ۵ باشد:

۵- محدوده‌ی m را چنان مشخص کنید که بازه‌ی $(m-۳,۲m+۱]$ شامل عدد -۳ باشد.

۶- فرض کنید A و B دو مجموعه و $A \subseteq B$ باشد. همواره کدام مورد درست و کدام نادرست است؟
الف) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه B نامتناهی است.
ب) اگر A متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.
پ) اگر B متناهی باشد، آنگاه A متناهی است. (نهایی؛ خرداد ۴۰۳)
ت) اگر B نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

منتخب کتاب:

۱- فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.
الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.
ب) U متناهی است یا نامتناهی؟
پ) یک زیر مجموعه‌ی متناهی از U بنویسید.
ت) دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی مانند A و B از U بنویسید؛ به طوری که: $A \subseteq B$.

۲- اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

توجه:

سؤالات ترکیبی و همچنین چالشی، جهت آمادگی هر چه بیشتر دانش‌آموزان در امتحانات و پاسخ به سؤالات نسبتاً دشوار آورده شده است. لطفا طبق نظر دبیرتان، اقدام به پاسخگویی کرده یا از آن‌ها صرف نظر کنید.

سؤال ترکیبی:

۱- درستی یا نادرستی هر مورد را با ذکر دلیل بیان کنید.
الف) اگر هر زیر مجموعه از A متناهی باشد، آنگاه خود A متناهی است.
ب) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، $B-A$ برابر تهی است.

۲- اشتراک دو مجموعه‌ی $A=[2m+1,+\infty)$ و $B=(-\infty,1-m]$ متناهی است. حدود m را مشخص کنید.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

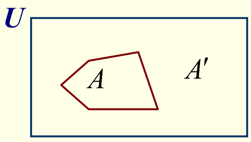
۱- برای عدد طبیعی n قرار دهید: $A_n=[(-1)^n n, n-a]$. مقدار a را چنان مشخص کنید که مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^{4} A_n$ دارای یازده عدد صحیح باشد. (منظور عبارت $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ است.)

۲ مرجع و متمم

مفاهیم این بخش هنگام کاربرد مجموعه‌ها بسیار مفید واقع می‌شوند.

مرجع و متمم:

گاهی هنگام کار با مجموعه‌ها، مجموعه‌ای با نماد U در نظر می‌گیریم که:



تمام مجموعه‌های مورد بحث ما، زیر مجموعه‌ی آن هستند.

به این مجموعه، مجموعه‌ی «**مرجع**» یا مجموعه‌ی «**جهانی**» گفته می‌شود.

بعلاوه:

اگر A یک زیرمجموعه از U باشد، مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «**متمم**» A گوئیم. یعنی: $A' = U - A$

بنابراین:

هر مجموعه‌ی A، یک زیرمجموعه‌ی U است و بعلاوه، به نوعی می‌توان گفت A و A' مقابل (خلاف) یکدیگر هستند.

نمونه‌ای ساده از مرجع و متمم:

$$U=\{۰,۱,۲,۳,\dots,۹\}\ ,\ B=\{۰,۲,۴,۶,۸\}\Rightarrow B'=\{۱,۳,۵,۷,۹\}$$

مثال: (مشابه کتاب) متمم مجموعه‌ی $A=\mathbb{N}$ را در دو حالت زیر مشخص کنید.

① اگر $U=W$ باشد.

$$A'=W-\mathbb{N}=\{۰\}$$

② اگر $U=\mathbb{Z}$ باشد.

$$A'=\mathbb{Z}-\mathbb{N}=\{۰,-۱,-۲,-۳,\dots\}$$

مثال: اگر $A=[-۲,\infty)$ و $B=(-\infty,۰)$ و مرجع $\mathbb{R}$ باشد، حاصل هر مورد را بنویسید.

الف) $B-A'$ ب) $B'\bigcap A$ پ) $\varnothing - A'$

پاسخ

متمم‌ها را (با تصور روی محور) مشخص می‌کنیم:

$$A'=(-\infty,-۲)\quad و\quad B'=[۰,+\infty)$$

الف)

$$B-A'=(-\infty,۰)-(-\infty,-۲)=[-۲,۰)$$

ب)

$$B'\bigcap A=[۰,+\infty)\bigcap[-۲,\infty)=[۰,+\infty)$$

پ) چون تهی هیچ عضوی ندارد:

$$\varnothing - A'=\varnothing$$

---✧---

توجه کنید:

- همیشه $\varnothing' = U$ است، زیرا طبق تعریف بالا:

$$\varnothing' = U - \varnothing = U$$

- همیشه $U' = \varnothing$ است، زیرا:

$$U' = U - U = \varnothing$$

بررسی خواص بیشتری از مرجع و متمم:

مثال: فرض کنید $U = \{۱,۲,۳, \dots ,۸\}$ مجموعه‌ی مرجع داده شده و $A = \{۲,۳,۷\}$ را در نظر بگیرید. به چند نمونه و نکات حاصل از آن توجه کنید:

① می‌خواهیم از A دو بار متمم بگیریم:

$$A' = U - A = \{۱,۲, \dots ,۸\} - \{۲,۳,۷\} = \{۱,۴,۵,۶,۸\}$$

اکنون از مجموعه‌ی A' متمم می‌گیریم:

$$(A')' = U - A' = \{۱,۲, \dots ,۸\} - \{۱,۴,۵,۶,۸\} = \{۲,۳,۷\}$$

نکته:

تساوی $(A')' = A$ که در این قسمت و البته در شکل قبل دیدیم، همواره برقرار است.

② اشتراک مجموعه‌ی A با متمم خود را ببینید:

$$A \cap A' = \{۲,۳,۷\} \cap \{۱,۴,۵,۶,۸\} = \varnothing$$

نکته:

رابطه‌ی $A \cap A' = \varnothing$ برای هر مجموعه‌ای درست است.

③ اجتماع مجموعه‌ی A را با متمم خود ببینید:

$$A \cup A' = \{۲,۳,۷\} \cup \{۱,۴,۵,۶,۸\} = \{۱,۲, \dots ,۸\} = U$$

نکته:

رابطه‌ی $A \cup A' = U$ نیز همواره درست است.

---✧---

مثال: مجموعه‌ی $\mathbb{N}$ را به عنوان مرجع گرفته و موارد زیر را انجام دهید:

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' نامتناهی باشد. آیا ممکن است A' متناهی شود؟

ب) مجموعه‌ای متناهی مانند B مثال بزنید که B' نامتناهی باشد. آیا ممکن است B' متناهی شود؟

پاسخ

الف) اگر $A = \{۱,۳,۵,۷, \dots\}$ باشد، $A' = \{۲,۴,۶,۸, \dots\}$ نامتناهی است.

اگر قرار دهیم: $A = \{۱۱,۱۲,۱۳,۱۴, \dots\}$، می‌بینید که A' می‌تواند متناهی هم بشود:

$$A' = \{۱,۲,۳, \dots ,۱۰\}$$

ب) اگر $B = \{۱,۲,۳,۴\}$ باشد، $B' = \{۵,۶,۷,۸, \dots\}$ نامتناهی است. (ما:

B' نمی‌تواند متناهی شود؛

زیرا:

باید $B \bigcup B' = \mathbb{N}$ باشد که اگر هر دوی B و B' متناهی باشند، لازم است $\mathbb{N}$ هم متناهی شود که صحیح نیست.

برخی دیگر از خواص مجموعه‌ها را توسط نمونه‌هایی بیان می‌کنیم.

مثال: (از کتاب) فرض کنید $U=\{۱,۲,۳,۴,۵\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A=\{۱,۲,۳\}$، $B=\{۲,۴\}$ و $C=\{۲,۳\}$ باشد. با دو بار متمم گیری از A، تساوی $(A')'=A$ که قبلاً دیدیم، این‌جا هم مشاهده می‌شود.

اکنون در هر مورد زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $A'=\{\quad\}$ و $C'=\{\quad\}$

نتیجه:

در این نمونه، از $A \subseteq C$، رابطه‌ی .... بین متمم‌ها وجود دارد که همیشه برقرار است.

ب) $A \bigcup B=\{\quad\}$ و $(A \bigcup B)'=\{\quad\}$ و $A' \bigcap B'=\{\quad\}$

نتیجه:

تساوی .... که اینجا مشاهده می‌شود، همیشه برقرار است.

سؤال:

حدستان در مورد طرف دوم: .... $=(A \bigcap B)'$ چیست؟ آن را با محاسبه مانند بالا نشان دهید.

پ) $A-B=\{\quad\}$ و $A \bigcap B'=\{\quad\}$ و $A-(A \bigcap B)=\{\quad\}$

نتیجه:

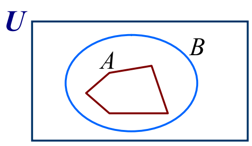
تساوی‌های .... $=A-B$ و .... $=A-B$ که در این نمونه دیده می‌شود، همیشه برقرار هستند.

مثال: خاصیت زیر را با نمودار ون نشان دهید:

اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه خواهیم داشت: $B' \subseteq A'$.

پاسخ

شکل مربوطه به $A \subseteq B$:



با رسم متمم‌ها، مشاهده می‌کنید که A' شامل کل B' است:

ویژه دانش‌آموز

۴. رابطه‌ی مهم زیر را با استفاده از نمودار ون نیز نشان دهید:

$$A - B = A \bigcap B'$$

مثال: با فرض $B' \subset A'$، کدام رابطه‌ی $A \bigcup B = A$ یا $A - B = \varnothing$ صحیح است؟

پاسخ

طبق آن‌چه گفته شد، باید $(A')' \subset (B')'$ و در نتیجه: $A \subset B$ باشد. اکنون واضح است که $A - B = \varnothing$ بوده، ولی $A \bigcup B = B$ است. (فقط مورد دوم صحیح است.)

در ادامه، به مباحثی در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها می‌پردازیم.

تعداد عضوها:

اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. برای نمونه؛

$$A = \{-۱, ۰, ۱, ۳, ۴\} \Rightarrow n(A) = ۵$$

بعلاوه:

به چند رابطه‌ی مهم در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها توجه کنید:

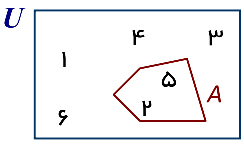
رابطه ۱:

چون A و A' خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

برای نمونه؛

در شکل مقابل مجموعه‌ی مرجع به صورت $U = \{۱, ۲, \dots, ۶\}$ دارای ۶ عضو است که ۲ تای آن‌ها در A و ۴ تای بقیه خارج A، یعنی در A' قرار دارند.



$$n(A') = n(U) - n(A) = ۶ - ۲ = ۴$$

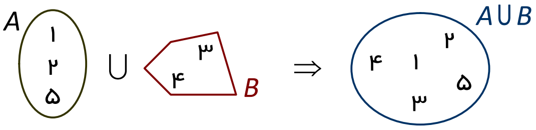
رابطه ۲:

اگر A و B دو مجموعه‌ی مجزا (یعنی جدا از هم: $A \bigcap B = \varnothing$) باشند، همواره:

$$n(A \bigcup B) = n(A) + n(B)$$

برای نمونه؛

در شکل زیر، مجموعه‌ی A دارای ۳ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲ عضو است و هنگام اجتماع گرفتن، کل ۵ عضو در کنار یکدیگر قرار خواهند گرفت:



$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)=۳+۲=۵$$

رابطه ۳:

در صورتی که مجموعه‌های A و B اشتراک هم داشته باشند، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

زیرا:

عضوهای مشترک در محاسبه‌ی $n(A\cup B)$ فقط یک‌بار به حساب می‌آید، ولی در $n(A)+n(B)$ دو بار شمرده شده و باید یک‌بار هم کم شود.

مثال: در یک جمع ۱۱ نفره، ۹ نفر به چای و ۵ نفر به قهوه علاقه دارند. چند نفر به هر دوی این نوشیدنی‌ها علاقه دارند؟ (هر فرد لااقل به یک نوشیدنی علاقمند است.)

پاسخ

اگر A و B را به ترتیب مجموعه‌ی افراد علاقمند به چای و قهوه در نظر بگیریم، اطلاعات بالا به صورت زیر خواهند بود:

$$n(A)=۹ \quad و \quad n(B)=۵ \quad و \quad n(A\cup B)=۱۱$$

اکنون طبق رابطه‌ی ۳ از بالا، تعداد افراد علاقمند به هر دو نوشیدنی، یعنی $n(A\cap B)$ به‌دست می‌آید:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)\to ۱۱=۹+۵-n(A\cap B)$$
$$\Rightarrow n(A\cap B)=۱۴-۱۱=۳$$

توجه کنید: (مهم)

بسیاری وقت‌ها، نمایش تعداد عضوها در نمودار ون، حل مسأله را آسان‌تر می‌کند.

مثال: (از کتاب) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد به طوری که، ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند.

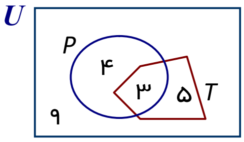
مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که:

الف) پویانمایی یا طنزند.

ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

پاسخ

مجموعه‌ها را به ترتیب با P و T نشان داده و طبق اطلاعات، ۳ فیلم مشترک است. طبق این اطلاع، ابتدا P و T کامل می‌شوند. سپس تعداد فیلم‌های خارج دو مجموعه مشخص می‌شود:



$$۲۱-(۴+۳+۵)=۲۱-۱۲=۹$$

اکنون پاسخ سؤالات در شکل دیده می‌شود:

الف) $۴+۳+۵=۱۲$ فیلم **ب)** خارج هر دو مجموعه: ۹ فیلم

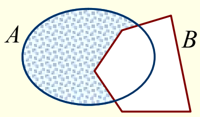
---✧---

تعداد عضوهایی که فقط در یکی از دو مجموعه قرار دارند:

رابطه ۴:

رابطه‌ی زیر تعداد عضوهایی را نشان می‌دهد که فقط در A قرار دارند:

$$n(A-B)=n(A)-n(A\bigcap B)$$



زیرا:

در محاسبه‌ی $A-B$، فقط عضوهای مشترک از A برداشته می‌شوند.

مثال: کلاسی ۳۲ دانش‌آموز دارد. اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر هم عضو هیچ تیمی نباشند:

الف) چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال عضو هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

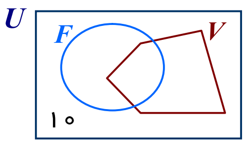
پ) چند نفر فقط عضو تیم والیبال هستند؟

پاسخ

قرار دهید:

F و V به ترتیب مجموعه‌ی افراد عضو در فوتبال و والیبال.

چون کلاس ۳۲ نفره است و ۱۰ نفر هیچ ورزشی انجام نمی‌دهند، تعداد کل افراد عضو در فوتبال و یا والیبال $۳۲-۱۰=۲۲$ نفر خواهد بود.



$n(U)=۳۲$

پس داریم:

$$n(F)=۱۳ \quad و \quad n(V)=۱۴ \quad و \quad n(F\bigcup V)=۲۲$$

الف) تعداد افراد فعال در هر دو ورزش، یعنی $n(F\bigcap V)$:

$$n(F\bigcup V)=n(F)+n(V)-n(F\bigcap V)\to ۲۲=۱۳+۱۴-n(A\bigcap B)$$
$$\Rightarrow n(F\bigcap V)=۲۷-۲۲=۵$$

ب) تعداد افرادی که فقط فوتبال بازی می‌کنند، همان $n(F-V)$ است:

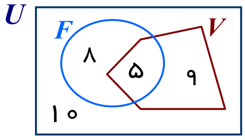
$$n(F-V)=n(F)-n(F\cap V)=۱۳-۵=۸$$

پ) تعداد افرادی که فقط والیبال بازی می‌کنند:

$$n(V-F)=n(V)-n(F\cap V)=۱۴-۵=۹$$

توجه کنید:

اطلاعات حاصل شده را در نمودار هم می‌توان دید.



---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر $n(A)=۶۰$، $n(B)=۷۰$ و $n(A-B)=۱۵$، مقدار $n(A\cup B)$ را به‌دست آورید.

پاسخ

مقدار $n(A\cap B)$ را لازم داریم، پس می‌نویسیم:

$$\underbrace{n(A-B)}_{۱۵}=\underbrace{n(A)}_{۶۰}-n(A\cap B)\ \Rightarrow\ n(A\cap B)=۶۰-۱۵=۴۵$$

بنابراین:

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶۰+۷۰-۴۵=۸۵$$

---✧---

حالتی بسیار مهم:

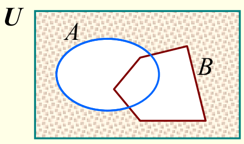
رابطه ۵:

وقتی A و B دو مجموعه هستند.

عضوهایی که در هیچ‌یک از آن دو قرار ندارند: $A'\cap B'$ ، همان $(A\cup B)'$ است.

بنابراین تعداد چنین عضوهایی برابر است با:

$$n(U)-n(A\cup B)=n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]$$



توجه کنید:

بیان دیگری از این مجموعه چنین است: «اعضایی که نه در A باشند و نه در B»

مثال: در یک کلاس با ۳۳ دانش‌آموز، ۲۱ نفر در درس ریاضی و ۲۶ نفر در شیمی قبول شده و ۱۸ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. چند نفر در هر دو درس مردود شده‌اند؟

پاسخ

افراد قبول شده در ریاضی و شیمی را به ترتیب با A و B نشان می‌دهیم. افراد مردود شده در هر دو درس، یعنی:

افرادی که نه در A هستند و نه در B.

$$n(U)-[n(A)+n(B)-n(A\cap B)]=۳۳-(۲۱+۲۶-۱۸)=۳۳-۲۹=۴$$

مثال: (از کتاب) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری‌که $n(U)=۱۰۰$، $n(A)=۶۰$، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$. مطلوب است:

الف) $n(A'\cap B)$ ب) $n(A'\cap B')$

پاسخ

الف) چون $A'\cap B$ همان $B\cap A'$ است، با استفاده از روابطی که تا کنون دیده‌ایم:

$$n(B\cap A')=n(B-A)=n(B)-n(B\cap A)=۴۰-۲۰=۲۰$$

ب) داریم: $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)=۶۰+۴۰-۲۰=۸۰$. طبق روابط:

$$n(A'\cap B')=n((A\cup B)')=n(U)-n(A\cup B)=۱۰۰-۸۰=۲۰$$

مانند نمونه‌ها پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۵. از ۶۵ نفر دانش‌آموز پایه‌ی دهم یک مدرسه، ۵۱ نفر به درس ریاضی، ۴۲ نفر به درس هندسه و ۳۳ نفر به هر دو درس علاقمند هستند. مشخص کنید:

الف) چند نفر لااقل به یکی از دو درس علاقمند هستند؟

ب) چند نفر فقط به درس هندسه علاقمند هستند؟

پ) چند نفر دقیقاً به یک درس از دو درس علاقمند هستند؟

ت) چند نفر به هیچ کدام از دو درس علاقه‌ای ندارند؟

جواب: به ترتیب ۶۰، ۹، ۲۷ و ۵

پاسخ دهید (۲)

۱- $\mathbb{R}$ را مرجع گرفته و متمم مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

الف) $A=(-\infty,-۱)$ ب) $B=(-۳,۱]$ پ) $C=\mathbb{N}$

۲- اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری‌که $n(A\cap B)=۳$، $n(A\cup B)=۱۱$ و $n(B)=۱۱$، مقدار $n(A)$ را بیابید.

۳- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری‌که $n(U)=۱۵$، $n(A)=۶$، $n(B)=۱۱$ و $n(A\cup B)=۱۴$. مطلوب است:

الف) $n(A\cap B)$ ب) $n(A\cap B')$ پ) $n(A'\cap B)$

۴- در یک جمع ۳۷ نفر ورزشکار حاضرند که ۲۵ نفر فوتبال و ۲۱ نفر والیبال بازی می‌کنند.
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟ ب) چند نفر هر دو ورزش را انجام می‌دهند؟
پ) چند نفر فقط یک ورزش انجام می‌دهند؟

۵- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۲۵ عضو است. به مجموعه‌ی A تعداد ۷ عضو جدید اضافه می‌کنیم و در نتیجه‌ی آن ۵ عضو به اشتراکشان اضافه می‌شود. اجتماع فعلی این دو مجموعه چند عضو دارد؟

منتخب کتاب:

۱- $\mathbb{N}$ را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.
الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.
ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.
پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۲- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری‌که $n(U)=۱۰۰$، $n(A)=۶۰$، $n(B)=۴۰$ و $n(A\cap B)=۲۰$. مطلوب است:
الف) $n(A\cup B)$ ب) $n(A\cap B')$ پ) $n(A'\cap B)$ ت) $n(A'\cap B')$

۳- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:
الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

سؤال ترکیبی:

۱- اگر A و B با شرایط $n(A)=۸$، $n(B)=۱۱$ و $n(A\cup B)=۱۶$ داده شوند، مقدار $n(A'\cap B)$ را حساب کنید.

۳ الگو و دنباله

به رشته عددهای زیر نگاه کنید:

۲ , ۴ , ۶ , ۸ , ۱۰ , . . .

در این رشته، اولین عدد برابر ۲، دومین عدد برابر ۴، سومین عدد ۶ و . . . است. سؤال:

بین اعداد این رشته و شماره‌ی مکان آن‌ها چه رابطه‌ای وجود دارد؟

جواب:

اولین عدد ۱×۲، دومین عدد ۲×۲، سومین عدد ۳×۲ و . . . است؛ بنابراین می‌توان گفت:

«عدد بیستم برابر ۴۰ = ۲۰×۲ و عدد سی و هفتم در این رشته ۷۴ = ۳۷×۲ است.»

در کل:

اگر یک شماره‌ی دلخواه از رشته را با n نشان دهیم، مقدار آن برابر $۲\times n$ است.

نتیجه:

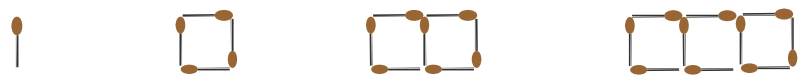
رشته اعداد بالا از الگوی $t_n = ۲\times n$ به‌دست می‌آیند.

توجه:

در بررسی الگوها، عدد n شماره‌ی رشته اعداد و نمادی چون t_n یا a_n و . . . ، نمایش دهنده‌ی خود رشته اعداد است که به آن **«جمله‌ی عمومی»** الگو گفته می‌شود. **(به عددهای $t_۱$، $t_۲$، $t_۳$ و . . . جملات آن رشته گفته می‌شود.)**

نمونه‌ی دیگری ببینید:

مثال: تعداد چوب کبریت‌ها در شکل‌های دهم و nاُم را مشخص کنید.



(۱) (۲) (۳) (۴)

پاسخ

می‌بینید از هر شکل به شکل بعد، تعداد ۳ چوب کبریت اضافه می‌شود:

$$\underbrace{۱}_{(۱)}\ ,\ \underbrace{۱+۱\times ۳}_{(۲)}\ ,\ \underbrace{۱+۲\times ۳}_{(۳)}\ ,\ \underbrace{۱+۳\times ۳}_{(۴)}\ ,\ \underbrace{۱+۴\times ۳}_{(۵)}\ ,\ \ldots$$

توجه کنید:

در همه‌ی جملات فقط ضریب عدد ۳ در حال تغییر است و این ضریب از شماره‌ی جمله، یک واحد کوچک‌تر است. بنابراین تعداد چوب کبریت‌های شکل دهم به صورت ۲۸ = ۳ × ۹ + ۱ و تعداد آن‌ها در شکل nاُم برابر است با:

$$a_n = ۱+(n-۱)\times ۳ = ۱+۳n-۳ \quad \Rightarrow \quad a_n = ۳n-۲$$

مثال: شمع روشنی به طول ۱۶۰ میلی‌متر، در هر دقیقه ۴ میلی‌متر از آن آب می‌شود. با نوشتن الگوی طول شمع در دقایق پس از روشن شدن، حساب کنید این شمع حداکثر چند دقیقه روشن می‌ماند؟

پاسخ

طول شمع با گذشت دقایق به صورت زیر است:

$$\underbrace{۱۵۶}_{a_۱} , \underbrace{۱۵۲}_{a_۲} , ۱۴۸ , \dots$$

چون $a_۱ = ۱۶۰ - ۱\times۴$ و $a_۲ = ۱۶۰ - ۲\times۴$ و $a_۳ = ۱۶۰ - ۳\times۴$ و ... است، الگوی طول شمع به صورت $a_n = ۱۶۰ - ۴n$ خواهد بود. تعیین جواب:

$$a_n = ۰ \rightarrow ۱۶ - ۴n = ۰ \Rightarrow n = \frac{۱۶۰}{۴} = ۴۰ \quad \text{(دقیقه)}$$

برخی الگوها با یک عبارت درجه اول قابل بیان هستند، مانند:

$$۱ , ۴ , ۷ , ۱۰ , \dots , ۳n - ۲ , \dots \Rightarrow t_n = ۳n - ۲$$

در کل:

الگوی خطی:

هر الگوی خطی به صورت خطی $t_n = an + b$ قابل بیان است که در آن a و b دو عدد ثابت هستند.

سایر الگوها، نظیر:

$$۲ , ۵ , ۱۰ , ۱۷ , \dots , n^۲ + ۱ , \dots \Rightarrow t_n = n^۲ + ۱$$

را «**الگوی غیرخطی**» گویند.

توجه کنید: (شرط خطی بودن)

چنان‌که در نمونه‌ی خطی قبل هم دیده می‌شود، در دنباله‌ی خطی $t_n = an + b$، مقدار تغییر جملات متوالی همیشه مقداری ثابت است، (برابر a، یعنی: ضریب n). نمونه‌ی دیگر:

در دنباله‌ی خطی $a_n = ۴n - ۳$ چند جمله را نوشته‌ایم؛ می‌بینید اختلاف جملات متوالی برابر ۴ است:

$$۱ , ۵ , ۹ , ۱۳ , \dots$$

اگر تشخیص دهید یک الگو خطی است، تعیین فرمول آن الگو آسان می‌شود.

مثال: در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم ۱۷ و جمله‌ی نهم ۳۷ است. الگو را مشخص کرده و سپس:

الف) جمله‌ی بیستم الگو را حساب کنید.

ب) کدام شماره از الگو برابر ۶۱ خواهد بود؟

پاسخ

الگوی خطی را به صورت مجهول $t_n = an + b$ می‌نویسیم. باید:

$$a(۴) + b = ۱۷ \Rightarrow ۴a + b = ۱۷ \quad و \quad a(۹) + b = ۳۷ \Rightarrow ۹a + b = ۳۷$$

از حل دستگاه: $a = ۴$ و $b = ۱$ خواهد بود و در نتیجه الگو معلوم می‌شود:

$$t_n = ۴n + ۱$$

الف) باید قرار دهیم: $n=20$

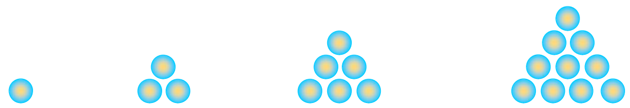
$$t_{20}=4(20)+1=81$$

ب) باید $t_n=61$ باشد و n را به‌دست آوریم:

$$t_n=61 \rightarrow 4n+1=61 \rightarrow 4n=60 \Rightarrow n=\frac{60}{4}=15$$

در الگوهای غیرخطی، معمولاً با نوشتن جملات و مقایسه با شماره‌ی هر کدام، فرمول جمله‌ی عمومی تعیین می‌شود.

مثال: (الگوی مثلثی) تعداد گوی‌ها در شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



(۱)　(۲)　(۳)　(۴)

الف) الگوی تعداد گوی‌ها را مشخص کنید.

ب) در شکل بیست و سوم چند گوی وجود دارد؟

پ) در شکل چندم تعداد گوی‌ها برابر ۶۶ است؟

پاسخ

الف) بین تعداد گوی‌ها و شماره‌ی شکل ارتباط کلی را معلوم می‌کنیم:

شکل اول: $1=\frac{1\times 2}{2}=\frac{1\times(1+1)}{2}$　　**شکل دوم:** $3=\frac{2\times 3}{2}=\frac{2\times(2+1)}{2}$

شکل سوم: $6=\frac{3\times 4}{2}=\frac{3\times(3+1)}{2}$　　**شکل چهارم:** $10=\frac{4\times 5}{2}=\frac{4\times(4+1)}{2}$

پس الگوی تعداد گوی‌ها به صورت زیر است:

$$t_n=\frac{n\times(n+1)}{2}$$

ب) کافی است $n=23$ قرار گیرد:

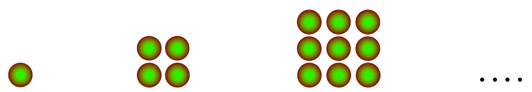
$$t_{23}=\frac{23\times(23+1)}{2}=23\times 12=276$$

پ) باید $t_n=66$ باشد و بنابراین:

$$\frac{n\times(n+1)}{2}=66 \rightarrow n\times(n+1)=2\times 66=132 \xrightarrow{132=11\times 12} n=11$$

توجه: (الگوی مربعی)

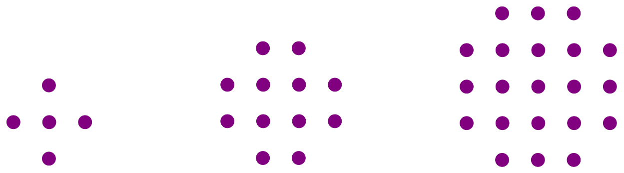
بد نیست بدانیم بـه الگـوی غیرخطـی مقابـل «الگوی مربعی» گفته می‌شود.



(۱)　(۲)　(۳)

واضح است که جمله‌ی عمومی آن به صورت $t_n=n^2$ می‌باشد.

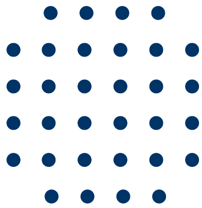
مثال: (از کتاب) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کرده و الگوی شکل nاُم را مشخص کنید.



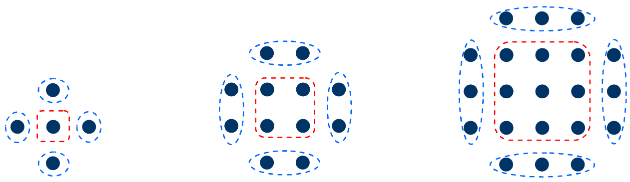
(۱) (۲) (۳)

پاسخ

شکل چهارم به صورت روبه‌رو است:



تعداد گوی‌های هر شکل را با دسته‌بندی مناسب، به شماره‌ی آن مربوط می‌کنیم:



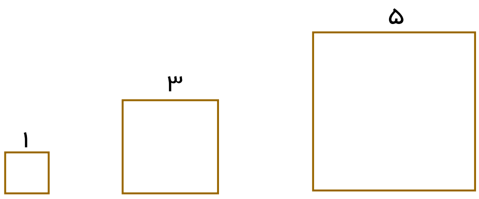
ارتباط تعداد گوی‌ها و شماره‌ی شکل:

شکل اول: $۱\times۱ + ۴\times۱ = ۱^۲ + ۴\times۱$ **شکل دوم:** $۲\times۲ + ۴\times۲ = ۲^۲ + ۴\times۲$ **شکل سوم:** $۹ + ۴\times۳ = ۳^۲ + ۴\times۳$

پس الگوی تعداد گوی‌ها به صورت زیر است:

$$t_n = n^۲ + ۴n$$

مثال: در مربع‌های زیر، الگوی محیط‌ها و مساحت‌ها را مشخص کنید. کدام الگو خطی و کدام غیر خطی است؟



(۱) (۲) (۳)

پاسخ

با توجه به این که اندازه‌ی اضلاع عددهای فرد است و الگوی آن‌ها $۲n-۱$ است:

محیط: $۴\times۱,\ ۴\times۳,\ ۴\times۵,\ ۴\times۷,\ \dots,\ ۴\times(۲n-۱),\ \dots$

پس الگوی محیط به صورت $۴\times(۲n-۱) = ۸n-۴$ بوده که خطی است.

مساحت: $۱\times۱,\ ۳\times۳,\ ۵\times۵,\ ۷\times۷,\ \dots,\ (۲n-۱)\times(۲n-۱),\ \dots$

در نتیجه الگوی مساحت به صورت زیر بوده و البته غیر خطی خواهد بود:

$$(۲n-۱)\times(۲n-۱) = (۲n-۱)^۲ = ۴n^۲ - ۴n + ۱$$

اکنون به بیان مفهومی کلی‌تر از الگوها توجه کنید.

دنبـــاله:

«**دنباله**» هر رشته‌ای از اعداد (معمولاً منظم) است که به دنبال هم نوشته شده باشند.

به هر عدد در رشته، یک «**جمله**» از دنباله گفته؛ مانند الگوها، اولین جمله را با a_1، دومین جمله را با a_2 و ... نشان می‌دهیم. بنابراین نمایش یک دنباله چنین است:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$$

بنابراین:

در یک دنباله، a_n نشان دهنده‌ی جمله‌ای دلخواه است که به آن «**جمله‌ی عمومی**» یا «**جمله‌ی n اُم**» گفته می‌شود.

مثال:

① در دنباله‌ی $a_n = \frac{2^{n-1} - 24}{n+9}$، جمله‌ی یازدهم را بیابید.

☑ کافی است در ضابطه‌ی داده شده، مقدار n را برابر ۱۱ قرار دهیم:

$$n=11:\ a_{11} = \frac{2^{11-1}-24}{11+9} = \frac{2^{10}-24}{20} = \frac{1024-24}{20} = \frac{1000}{20} = 50 \Rightarrow a_{11} = 50$$

② در دنباله‌ی $a_n = \frac{8-n}{1-2n}$:

الف) کدامین جمله برابر $\frac{1}{7}$ است؟ ب) چند جمله منفی هستند؟

☑ **الف)** قرار می‌دهیم: $\frac{8-n}{1-2n} = \frac{1}{7}$ و معادله را حل می‌کنیم:

$$\frac{8-n}{1-2n} = \frac{1}{7} \rightarrow 1-2n = 7(8-n) \rightarrow 1-2n = 56-7n$$

$$\rightarrow -2n+7n = 56-1 \rightarrow 5n = 55 \Rightarrow n = \frac{55}{5} = 11$$

ب) چون مخرج کسر همیشه منفی است، باید صورت مثبت باشد:

$$8-n>0 \rightarrow -n>-8 \Rightarrow n<\frac{-8}{-1}=8$$

پس مقادیر $n = 1, 2, \ldots, 7$ قابل قبول بوده و هفت جمله از دنباله منفی خواهند بود.

③ جمله‌ی چندم رشته اعداد زیر برابر $\frac{7}{12}$ است؟

$$\frac{2}{12}, \frac{5}{17}, \frac{8}{22}, \ldots$$

☑ الگوی دنباله را با بررسی جملات می‌نویسیم:

$$\frac{3\times1-1}{5\times1+7}, \frac{3\times2-1}{5\times2+7}, \frac{3\times3-1}{5\times3+7}, \ldots \Rightarrow t_n = \frac{3n-1}{5n+7}$$

پس باید معادله‌ی $t_n = \frac{7}{12}$ حل شود:

$$\frac{3n-1}{5n+7}=\frac{7}{12} \to 36n-12=35n+49 \Rightarrow n=61$$

ویژه دانش‌آموز

۶. دنباله‌ی $a_n=\frac{22-3n}{3+n}$ چند جمله‌ی مثبت دارد؟

جواب: ۷

در پایان این بخش، به دو نوع دنباله اشاره‌ای مختصر خواهیم داشت. اولی، نوع مهمی از دنباله‌های غیرخطی است.

دنباله‌ی درجه دوم:

در برخی از دنباله‌های غیرخطی، جمله‌ی عمومی با یک عبارت درجه دوم قابل بیان است:

$$\boxed{t_n=an^2+bn+c}$$

توجه کنید:

اگر سه جمله از یک دنباله‌ی درجه دو را داشته باشید، با جایگذاری، ضرایب a، b و c معلوم شده و دنباله مشخص خواهد شد.

مثال: با تعیین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی درجه دوم زیر، جمله‌ی دهم آن را حساب کنید.

$$-1,3,9,\dots$$

پاسخ

دنباله را به صورت مجهول $t_n=an^2+bn+c$ گرفته و جملات اول تا سوم را به‌کار می‌بریم:

$$t_1=-1 \to a+b+c=-1 \quad و \quad t_2=3 \to 4a+2b+c=3 \quad و \quad t_3=9 \to 9a+3b+c=9$$

با هدف حذف c، معادله‌ی سمت چپ را از دو معادله‌ی دیگر کم کرده و بعد از ساده سازی، دستگاه زیر تشکیل و حل می‌شود:

$$\begin{cases}3a+b=4\\8a+2b=10\end{cases} \to \begin{cases}-6a-2b=-8\\8a+2b=10\end{cases} \to 2a=2 \xrightarrow{a=1} b=1$$

توسط یکی از سه معادله‌ی اولیه، $c=-3$ حاصل شده و در نتیجه $t_n=n^2+n-3$ بوده است. بنابراین:

$$n=10: \quad t_{10}=10^2+10-3=100+7=107$$

در نوع دیگری از دنباله، به نام **«دنباله‌ی بازگشتی»**، جملات دنباله چنان به هم وابسته‌اند که هر جمله با توجه بـه جمـلات قبلی به‌دست می‌آید. به نمونه‌ی بعد توجه کنید.

مثال: پنج جمله‌ی اول از دنباله‌ی زیر را بنویسید:

$$t_۱=-۱,\ t_n=-۲t_{n-۱}+۱ \quad (n\geq ۲)$$

پاسخ

در رابطه‌ی $t_n=-۲t_{n-۱}+۱$ قرار می‌دهیم $n=۲$ و از فرض $t_۱=-۱$ استفاده می‌کنیم:

$$t_۲=-۲t_۱+۱=-۲(-۱)+۱=۳$$

به طور مشابه، جای n اعداد بزرگ‌تر را قرار می‌دهیم تا جملات بعدی حاصل شوند:

$$n=۳:\ t_۳=-۲t_۲+۱=-۲(۳)+۱=-۵$$
$$n=۴:\ t_۴=-۲t_۳+۱=-۲(-۵)+۱=۱۱$$
$$n=۵:\ t_۵=-۲t_۴+۱=-۲(۱۱)+۱=-۲۱$$

ویژه دانش‌آموز

۷. شش جمله‌ی اول از دنباله‌ی بازگشتی با اطلاعات زیر را بنویسید:

$$F_۱=۱,\ F_۲=۱,\quad F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲} \quad (n>۲)$$

مفاهیم زیر، خواص زیاد یا کم شدن جملات دنباله‌ها را بیان می‌کنند:

صعودی یا نزولی:

دنباله‌ی $a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$ را در نظر بگیرید. در این صورت:

- دنباله را «**صعودی**» (افزایشی) گویند، هرگاه: $a_۱\leq a_۲\leq a_۳\leq \cdots$
  یعنی جملات یا ثابت بوده و یا در حال زیاد شدن هستند.
- دنباله را «**نزولی**» (کاهشی) گویند، هرگاه: $a_۱\geq a_۲\geq a_۳\geq \cdots$
  که در آن جملات یا ثابت بوده و یا در حال کاهش هستند.

دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، «**یکنوا**» نامیده می‌شود.

برای نمونه؛

دنباله‌ی $۱, ۴, ۹, \ldots$ صعودی و دنباله‌ی $۵, ۳, ۱, \ldots$ نزولی بوده و فقط دنباله‌ی ثابت مانند $۱, ۱, ۱, \ldots$ هم صعودی و هم نزولی است. البته، ممکن است دنباله یکنوا نباشد؛ مانند:

$$۳, ۷, ۵, ۱, \ldots$$

(مفاهیم بالا اهمیت زیادی داشته و از این پس مورد نیاز خواهند بود.)

پاسخ دهید (۳)

۱- با توجه به تعداد نقاط در شکل‌ها، تعداد آن‌ها را در شکل هفدهم حساب کنید.

(۱) (۲) (۳)

۲- چهار جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید:

الف) $a_n = \frac{۲n^۲}{۳n-۱}$ ب) $t_n = \frac{۲^n - ۱}{n+۲}$ پ) $b_n = (-۲)^n n$ ت) $c_n = \frac{(-۱)^{۲n+۱} n + ۳}{n+۲}$

۳- جمله‌ی دهم دنباله‌ی مثلثی چقدر از جمله‌ی ششم دنباله‌ی مربعی بیشتر است؟

۴- کدام جمله از دنباله‌ی $\frac{۲n+۴۰}{n}$ برابر ۱۰ است؟

۵- آیا عدد ۲۵ در بین جملات دنباله‌ی $t_n = n^۲ - n + ۱۳$ وجود دارد؟

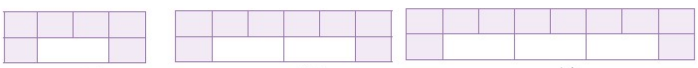
۶- سومین جمله‌ی دنباله‌ی $t_n = (-۳)^n + ۲n$ با چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = -۵n + ۱۴$ برابر خواهد بود؟

منتخب کتاب:

۱- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله‌ی اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $a_n = ۴n$ ب) $b_n = ۳n + ۱$ پ) $c_n = n^۲ + ۲$ ت) $d_n = n^۲ + n$

۲- به الگوی روبه‌رو توجه کنید:



۶ کاشی تیره، ۱ کاشی سفید — ۸ کاشی تیره، ۲ کاشی سفید — ۱۰ کاشی تیره، ۳ کاشی سفید

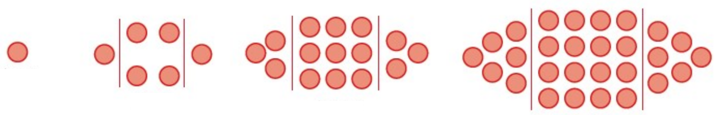
الف) شکل بعدی را رسم کرده و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.

ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.

پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را برحسب n بنویسید.

ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چندتاست؟

۳- الگوی روبه‌رو را در نظر بگیرید:



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.

ب) جمله عمومی الگو را بیابید.

پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

۴- برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر، جمله‌ی عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

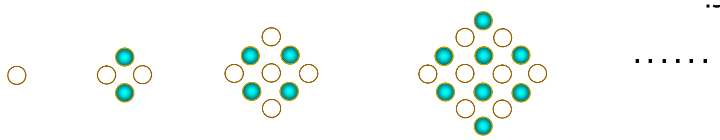
الف) $۵,۸,۱۳,۲۰,۲۹,\ldots$　　　　ب) $۵,۱۲,۲۲,۳۵,۵۱,\ldots$

سؤال ترکیبی:

۱- در الگوی زیر:

الف) تعداد گوی‌های سفید در شکل یازدهم را بیابید.

ب) تعداد گوی‌های رنگی در شکل دهم را حساب کنید.

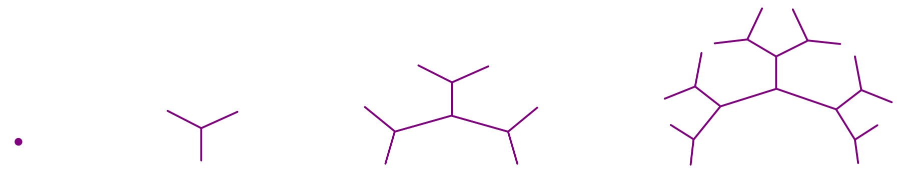


۲- دنباله‌ی $t_n=(k+۳)n^۲-kn+k-۲$ خطی است و $a_{۳n-۲}=t_{n+۲}-۳$. جمله‌ی هفتم دنباله‌ی a_n را بیابید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

۱- در الگوی زیر b_n تعداد پاره خط‌های شکل شماره‌ی n را نشان می‌دهد. $b_{۱۴۰۳}$ را محاسبه کنید.



$b_۱$　　$b_۲$　　$b_۳$　　$b_۴$

۴ دنباله‌ی حسابی

دو نوع خاص از دنباله‌ها که گاهی «**تَصاعُد**» هم نامیده می‌شوند، به دلیل خواص و کاربردهای مهمی که دارند، در این بخش و بخش بعدی بررسی خواهند شد. برای معرفی اولین آن‌ها، به دنباله‌های زیر توجه کنید:

$$-۵,۰,۵,۱۰,۱۵,\dots \qquad \text{و} \qquad ۸,۵,۲,-۱,\dots$$

در هر دو مورد، هر جمله با عدد ثابتی جمع شده و جمله‌های بعد به‌دست آمده‌اند؛ به عبارت دیگر:

تفاوت هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل همواره عدد ثابتی است.

دنباله حسابی:

هر گاه در دنباله‌ای، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت باشد، به آن دنباله، «**دنباله‌ی حسابی**» یا **دنباله‌ی عددی** و به آن عدد ثابت «**قدرنسبت**» گفته و آن را با d نشان می‌دهیم.

(بنابراین، دنباله‌ی حسابی همان دنباله‌ی خطی است!)

نمونه‌ی دیگر؛

سال‌های برگزاری جام جهانی فوتبال در چندین سال اخیر نیز یک دنباله‌ی حسابی است:

$$۲۰۱۰\,,\,۲۰۱۴\,,\,۲۰۱۸\,,\,۲۰۲۲\,,\,\dots$$

زیرا اختلاف جملات همواره ثابت است، ($d=۴$). چنان‌که می‌بینید:

«هر جمله با d جمع می‌شود تا جمله‌ی بعد حاصل گردد.»

برای نمایش ساده‌تر، معمولاً جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با a نشان می‌دهیم. همیشه d قدرنسبت است و الگوی دنباله‌ی حسابی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\underbrace{a}_{a_۱}\,,\,\underbrace{a+d}_{a_۲}\,,\,\underbrace{a+۲d}_{a_۳}\,,\,\underbrace{a+۳d}_{a_۴}\,,\,\dots$$

با ادامه‌ی این الگو، برای نمونه، جمله‌ی دهم به صورت $a_{۱۰}=a+۹d$ خواهد بود و در کل:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n=a+(n-۱)d$ است.

توجه داشته باشید:

- **به‌وضوح:**
دنباله‌ی حسابی با شرط $d>۰$، یک دنباله‌ی صعودی و با شرط $d<۰$، دنباله‌ای نزولی است. ($d=۰$، دنباله‌ی ثابت)
- در دنباله‌ی حسابی، قدر نسبت برابر است با «**تفاضل**» هر دو جمله‌ی متوالی، یعنی پشت سر هم:

$$d=a_۲-a_۱=a_۳-a_۲=\dots=a_n-a_{n-۱}=\dots$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی زیر، قدر نسبت و جمله‌ی هفدهم را مشخص کنید.

$$1, -\frac{1}{2}, -2, \ldots$$

پاسخ

ابتدا قدر نسبت را تعیین می‌کنیم:

$$d = a_2 - a_1 = -\frac{1}{2} - 1 = -\frac{3}{2}$$

حال با استفاده از جمله‌ی اول و قدر نسبت، جمله‌ی هفدهم به‌دست می‌آید:

$$a_{17} = a + (17-1)d \rightarrow a_{17} = 1 + 16(-\frac{3}{2}) = 1 - 24 \Rightarrow a_{17} = -23$$

مثال:

① جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی حسابی ۱۹ و جمله‌ی نهم آن ۶۴ است.

الف) جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

ب) جمله‌ی بیستم دنباله چه عددی است؟

طبق اطلاعات داده شده داریم:

$$a + 3d = 19 \quad \text{و} \quad a + 8d = 64$$

از حل دستگاه $a = -8$ و $d = 9$ به‌دست می‌آیند. بنابراین:

$$a_n = a + (n-1)d \rightarrow a_n = -8 + (n-1) \times 9 = 9n - 17$$
$$a_{20} = a + 19d = -8 + 19(9) = 163$$

② در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۳۹ است. جمله‌ی اول و قدر نسبت را معلوم کنید.

طبق اطلاعات داده شده داریم:

- $a_1 + a_2 + a_3: \quad a + a + d + a + 2d = 3 \rightarrow 3a + 3d = 3 \xrightarrow{\div 3} a + d = 1$
- $a_4 + a_5 + a_6: \quad a + 3d + a + 4d + a + 5d = 39 \rightarrow 3a + 12d = 39 \xrightarrow{\div 3} a + 4d = 13$

از حل دستگاه $a = -3$ و $d = 4$ به‌دست می‌آیند.

نوبت شماست.

ویژه دانش‌آموز

۸. در یک دنباله حسابی جملات یازدهم و شانزدهم به‌ترتیب ۳۱ و ۴۶ هستند. جمله‌ی هشتم را مشخص کنید.

جواب: ۲۲

توجه کنید:

اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشند، آنگاه:

$$\boxed{d=\frac{a_n-a_m}{n-m}}$$

دلیل:

کافی است فرمول جمله‌ی عمومی به‌کار رود:

$$a_n-a_m=a+(n-۱)d-[a+(m-۱)d]=a+nd-d-a-md+d=nd-md$$

$$\rightarrow\quad a_n-a_m=(n-m)d\quad\Rightarrow\quad d=\frac{a_n-a_m}{n-m}$$

برای نمونه؛

در فعالیت قبل می‌توانستیم قدر نسبت را یک‌باره (بدون حل دستگاه) تعیین کنیم:

$$d=\frac{a_{۱۶}-a_{۱۱}}{۱۶-۱۱}=\frac{۴۶-۳۱}{۵}=\frac{۱۵}{۵}=۳$$

مفهوم مهمی در دنباله‌های حسابی:

واسطه حسابی:

هرگاه سه عدد a,b,c سه جمله‌ی متوالی (پشت سر هم) از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b=\frac{a+c}{۲}\quad \text{یا}\quad ۲b=a+c$$

به‌علاوه: در چنین حالتی، b را «**واسطه‌ی حسابی**» یا «**میانگین حسابی**» بین عددهای a و c گوئیم.

دلیل:

قدر نسبتِ دنباله‌ی a,b,c را به دو صورت نوشته و برابر می‌گیریم:

$$d=b-a=c-b\rightarrow b+b=a+c\Rightarrow ۲b=a+c$$

مثال: اعداد $۲p+۳,۳p+۴,۵p-۱$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله چیست؟

پاسخ

طبق مطلب قبل باید:

$$۲(۳p+۴)=۲p+۳+۵p-۱\rightarrow ۶p+۸=۷p+۲\Rightarrow p=۶$$

با جایگذاری، جملات این دنباله عددهای زیر بوده‌اند:

$$۱۵,۲۲,۲۹$$

پس $d=۲۲-۱۵=۷$ خواهد بود.

---✧---

مثال: بین دو عدد -۱۷ و ۳۰۸ چهار عدد (واسطه‌ی حسابی) درج کرده‌ایم به‌طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. آن اعداد را تعیین کنید.

پاسخ

عدد -۱۷ را جمله‌ی اول و عدد ۳۰۸ را به جمله‌ی آخر دنباله بگیرید:

$$-۱۷, \quad , \quad , \quad , \quad ,۳۰۸$$

بنابراین ۳۰۸ جمله‌ی ششم دنباله است که با استفاده از آن، قدرنسبت معلوم می‌شود:

$$a_۶ = a + ۵d \rightarrow -۱۷ + ۵d = ۳۰۸ \rightarrow ۵d = ۳۲۵ \rightarrow d = ۶۵$$

کافی است هر جمله با ۶۵ جمع شود تا جمله‌ی بعدی نوشته شود:

$$-۱۷\,,\,۴۸\,,\,۱۱۳\,,\,۱۷۸\,,\,۲۴۳\,,\,۳۰۸$$

توجه کنید:

وقتی بخواهید بین عددهای a و b، تعداد n واسطه‌ی حسابی درج کنید، می‌توانید قدرنسبت را یک‌باره حساب کنید:

$$\boxed{d = \frac{b-a}{n+۱}}$$

مثال: (از کتاب) بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کنید.

پاسخ

طبق روش کوتاه قبل:

$$d = \frac{۶۲-۱۸}{۳+۱} = \frac{۴۴}{۴} = ۱۱$$

اگر ۱۸ (یا: ۶۲) را جمله‌ی اول بگیریم، واسطه‌ها معلوم می‌شوند:

$$۱۸\,,\,۲۹\,,\,۴۰\,,\,۵۱\,,\,۶۲$$

مورد بعدی، خاصیت جالبی از دنباله‌ی درجه دوم را بیان می‌کند.

ویژه دانش‌آموز

۹. در دنباله‌ی درجه دوم $t_n = an^۲ + bn + c$، نشان دهید دنباله‌ی $a_n = t_{n+۱} - t_n$، یعنی دنباله‌ی:

$$t_۲ - t_۱, t_۳ - t_۲, t_۴ - t_۳, \ldots$$

یک دنباله‌ی حسابی (خطی) است و سپس با کاربرد این خاصیت، جمله‌ی ششم دنباله درجه دوم $-۱,۳,۹,\ldots$ را بدون تعیین جمله‌ی عمومی، مشخص کنید.

پاسخ دهید (۴)

۱- الف) واسطه‌ی حسابی دو عدد ۳ و ۱۳ برابر ۸ است. (درست ☐ - نادرست ☐)

ب) جمله‌ی عمومی دنباله‌ی ... ,۲,۷,۱۲,۱۷ به صورت .... است.

۲- جمله‌ی دهم یک دنباله‌ی حسابی از جمله‌ی سوم آن ۴۲ واحد کوچک‌تر است. قدر نسبت دنباله را تعیین نمایید.

۳- در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند و جمله‌ی هفتم برابر ۴ است. جمله‌ی اول، قدرنسبت و جمله‌ی هجدهم را تعیین کنید.

۴- در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار a، قدرنسبت و جمله‌ی صدم را بیابید.

$$a,۳a+۵,۴a+۹,...$$

۵- عددهای $۶x+۵$، $۵x$ و $۳x-۲$ به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله‌ی حسابی هستند. چندمین جمله‌ی دنباله برابر -۲۴۹ است؟

۶- الف) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۲ باشد.

ب) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۲ باشد.

پ) یک دنباله‌ی حسابی مثال بزنید که فقط سه جمله‌ی مثبت داشته، بقیه‌ی جملات دنباله منفی باشند.

۷- زوایای یک مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی داده‌اند. اگر بزرگ‌ترین آن‌ها ۱۰۰° باشد، دو زاویه‌ی دیگر را تعیین کنید.

۸- مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ سانتی‌متر مربع است و اضلاع آن تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. محیط این مثلث را تعیین کنید.

۹- بین دو عدد ۸ و ۶۳ تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند. اگر تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها ۳۳ باشد، آن اعداد را مشخص کنید.

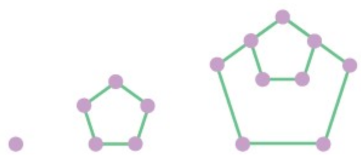
منتخب کتاب:

۱- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۲- الف) دو جمله‌ی بعدی الگوی زیر را با رسم شکل بیابید و دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله ۳۹۷ است؟



سؤال ترکیبی:

۱- واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $\frac{۱}{۱-\sqrt{۲}}$ و $\frac{۱+۲\sqrt{۲}}{۲}$ را حساب کنید.

۲- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید. (**راهنمایی:** دنباله درجه دوم است.)

$$۳,۵,۹,۱۵,\ldots$$

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

۱- در صد جمله‌ی اول دو دنباله‌ی حسابی $t_n=(a-۲)n^۳+bn^۲+(a+b)n+۳-a$ و $r_n=(c-۴)(n-۱)^۳+cn-۳$، تعداد جملات مشترک را مشخص کنید.

۵ دنباله‌ی هندسی

به دنباله‌های زیر توجه کنید:

$$-۱,۳,-۹,۲۷,\dots \quad \text{و} \quad ۲۵,۵,۱,\frac{۱}{۵},\dots$$

در هر دوی این دنباله‌ها، هر جمله در عدد ثابتی ضرب شده و جمله‌ی بعد به‌دست آمده است:

«سمت چپ، جملات در $\frac{۱}{۵}$ و سمت راست، جملات در -۳ ضرب شده‌اند.»

به بیان دیگر:

- در سمت چپ، نسبت جملات متوالی همواره مقدار ثابت $\frac{۱}{۵}$ است: $\frac{۵}{۲۵}=\frac{۱}{۵}=\dots$
- در سمت راست نیز نسبت جملات متوالی همواره عدد -۳ است: $\frac{۳}{-۱}=\frac{-۹}{۳}=\dots$

این‌گونه دنباله‌ها در کل به صورت زیر معرفی می‌شوند:

دنباله هندسی:

هرگاه در دنباله‌ای، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت باشد، به آن «**دنباله‌ی هندسی**» و به آن عدد ثابت «**قدرنسبت**» گفته و آن را با r نشان می‌دهیم:

$$\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\dots=\frac{a_n}{a_{n-۱}}=\dots=r$$

(جملات دنباله‌ی هندسی باید غیرصفر باشند.)

نمونه‌ای دیگر؛ دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است:

$$-۲,۶,-۱۸,۵۴,\dots$$

زیرا نسبت جملات متوالی همواره ثابت است: $\frac{۶}{-۲}=\frac{-۱۸}{۶}=\frac{۵۴}{-۱۸}=-۳ \Rightarrow r=-۳$

توجه کنید:

قدر نسبت همواره از «**تقسیم**» هر دو جمله‌ی متوالی به‌دست می‌آید:

$$r=\frac{a_۲}{a_۱}=\frac{a_۳}{a_۲}=\dots=\frac{a_n}{a_{n-۱}}=\dots$$

و:

هر جمله را در r ضرب کنید، جمله‌ی بعدی حاصل می‌شود: $a_۱\times r=a_۲\,,\,a_۲\times r=a_۳\,,\dots$

مثال: کدام دنباله هندسی است؟ قدرنسبت آن را معلوم کرده و دو جمله‌ی بعدی آن را بنویسید.

① $\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲},۱,۴,\dots$

☑ این دنباله هندسی نیست، زیرا نسبت جملات در ابتدا $\frac{۴}{۲}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۱}{۴}}=۲$ است، ولی: $\frac{a_۴}{a_۳}=\frac{۴}{۱}=۴$

② $-۲\,,\,\sqrt{۲}\,,\,-۱\,,\,\dots$

☑ در جملات داده شده، نسبت‌ها یکسان و دنباله هندسی است:

$$\frac{\sqrt{۲}}{-۲}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}\quad,\quad \frac{-۱}{\sqrt{۲}}\xrightarrow{\times\frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}}=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

پس $r=-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ بوده و توسط آن جملات بعدی قابل نوشتن است:

$$a_۴=-۱\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\qquad و \qquad a_۵=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\times(-\frac{\sqrt{۲}}{۲})=\frac{۱}{۲}$$

الگوی هندسی:

اگر a جمله‌ی اول و r قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را نشان دهد، الگوی چنین دنباله‌ای به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$\underbrace{a}_{a_۱}\,,\,\underbrace{a\times r}_{a_۲}\,,\,\underbrace{a\times r^۲}_{a_۳}\,,\,\underbrace{a\times r^۳}_{a_۴}\,,\,\dots$$

پس برای مثال، جمله‌ی دهم به صورت $a_{۱۰}=ar^۹$ خواهد بود و در نتیجه:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی به صورت $a_n=a\times r^{n-1}$ است.

مثال: در یک دنباله‌ی هندسی، جمله‌ی دوم -۱ و جمله‌ی پنجم ۸ است. جمله‌ی اول و قدرنسبت را معلوم کنید.

☑ **پاسخ**

طبق فرض: $a_۲=a\times r^۱=-۱$ و $a_۵=a\times r^۴=۸$. از تقسیم طرفین تساوی‌ها بر هم، یکی از مجهولات حذف می‌شود:

$$\frac{a\times r^۴}{a\times r^۱}=\frac{۸}{-۱}=-۸\ \rightarrow\ r^۳=-۸\ \Rightarrow\ r=-۲$$

استفاده‌ی مجدد از مقدار جمله‌ی دوم:

$$a\times r=-۱\ \xrightarrow{r=-۲}\ -۲a=-۱\ \Rightarrow\ a=\frac{۱}{۲}$$

مثال: جمله‌های سوم و ششم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۹ و ۲۴۳ هستند. جمله‌ی عمومی و پنجم آن را محاسبه کنید.

☑ **پاسخ**

طبق فرض: $a_۳=۹\Rightarrow ar^{۳-۱}=۹$ و $a_۶=۲۴۳\Rightarrow ar^{۶-۱}=۲۴۳$. طرفین دو تساوی را بر هم تقسیم می‌کنیم:

$$\frac{ar^۵}{ar^۲}=\frac{۲۴۳}{۹}\ \rightarrow\ r^۳=۲۷\ \rightarrow\ r=۳\ \xrightarrow{ar^۲=۹}\ ۹a=۹\ \Rightarrow\ a=۱$$

بنابراین: $a_n=a\times r^{n-1}=۱\times ۳^{n-1}=۳^{n-1}$ و سپس:

$$a_{۵}=۳^{۵-۱}=۳^{۴}=۸۱$$

توجه کنید:

اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$\boxed{r^{m-n}=\frac{a_m}{a_n}}$$

دلیل:

کافی است فرمول جمله‌ی عمومی به‌کار رود:

$$\frac{a_m}{a_n}=\frac{ar^m}{ar^n}=r^{m-n}$$

برای نمونه؛

اگر جملات سوم و هفتم دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۱۹۲ باشند؛ وضعیت دنباله به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{a_{۷}}{a_{۳}}=r^{۷-۳}=\frac{۱۹۲}{۱۲}=۱۶\ \rightarrow\ r^{۴}=۱۶\ \Rightarrow\ r=\pm ۲$$

یکی از جملات را به‌کار می‌بریم:

$$a_{۳}=۱۲\ \xrightarrow{ar^{۲}=۱۲}\ a(\pm ۲)^{۲}=۱۲\ \Rightarrow\ a=\frac{۱۲}{۴}=۳$$

توجه:

با اطلاعات بالا دو دنباله ساخته می‌شود:

$$r=۲:\ ۳,۶,۱۲,۲۴,\dots \qquad \text{و} \qquad r=-۲:\ ۳,-۶,۱۲,-۲۴,\dots$$

مانند نمونه‌ی قبل، پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱۰. در یک دنباله‌ی هندسی جملات دوم و هشتم به ترتیب ۸ و ۲ هستند. قدر نسبت را بیابید.

جواب: $r=\pm\frac{۱}{\sqrt[۳]{۲}}$

اکنون فرض کنید سه عدد a,b,c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند. در این صورت:

$$r=\frac{b}{a}=\frac{c}{b}\ \rightarrow\ b^{۲}=ac\ \Rightarrow\ b=\pm\sqrt{ac}$$

پس مطلب زیر همواره درست است:

میانگین هندسی:

اگر عددهای a,b,c سه جملهی متوالی از یک دنبالهی هندسی باشند، آنگاه:

$$b^{2}=ac \quad \text{یا} \quad b=\pm\sqrt{ac}$$

به‌علاوه؛ در چنین حالتی، b را «**میانگین هندسی**» بین a و c گوئیم.

توجه کنید:

در مطلب بالا، باید عددهای a و c هم‌علامت باشند و همیشه دو جواب قرینه‌ی $\pm\sqrt{ac}$ وجود دارد.

مثال: مقدار x را طوری بیابید که دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی باشد:

$$1+x\ ,\ x\ ,\ -x+1$$

پاسخ

با استفاده از مطلب قبل می‌نویسیم:

$$(x)^{2}=(1+x)(-x+1)\rightarrow x^{2}=(1+x)(1-x)\rightarrow x^{2}=1-x^{2}$$

$$\rightarrow 2x^{2}=1\rightarrow x^{2}=\frac{1}{2}\Rightarrow x=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(در محاسبه‌ی بالا، از اتحاد مزدوج استفاده شده و در پایان مخرج کسر را گویا کرده‌ایم.)

توجه کنید:

وقتی بخواهید بین عددهای a و b تعداد n واسطه‌ی هندسی درج کنید، می‌توانید قدر نسبت را یک‌باره حساب کنید:

$$\boxed{r^{n+1}=\frac{b}{a}}$$

نمونه‌ی بعد را انجام دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱۱. بین دو عدد ۵ و ۴۰۵ سه عدد درج کرده‌ایم تا اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند. قدر نسبت و اعداد مربوطه را تعیین کنید.

جواب: $r=3,-3$

گاهی سؤالات دنباله‌ی هندسی به صورت ترکیب با دنباله‌ی حسابی داده می‌شوند. نمونه‌هایی ببینید:

مثال: اگر 3^a، $9\sqrt{3}$ و 3^b به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی بوده و a، c و b جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، c را معلوم کنید.

پاسخ

شرط متوالی بودن در دنباله‌ی هندسی:

$$(9\sqrt{3})^2 = 3^a \times 3^b \ \rightarrow\ 243 = 3^{a+b} \xrightarrow{243=3^5} a+b=5$$

حال چون a، c و b در دنباله‌ی حسابی متوالی هستند:

$$c = \frac{a+b}{2} = \frac{5}{2}$$

مثال: فرض کنید جمله‌های سوم، پنجم و دهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند. در این صورت، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را مشخص کنید.

پاسخ

باید سه عدد زیر تشکیل دنباله‌ی هندسی بدهند:

$$a+2d\,,a+4d\,,a+9d$$

چون سه جمله متوالی هستند، لازم است که:

$$(a+4d)^2 = (a+2d)(a+9d) \ \rightarrow\ a^2+8ad+16d^2 = a^2+9ad+2ad+18d^2$$

جمله‌های یکسان را با هم جمع کرده و یا ساده می‌کنیم:

$$-3ad = 2d^2 \xrightarrow{\div d} -3a = 2d$$

پس بین a و d رابطه‌ی $-3a = 2d$ برقرار است. اکنون r از تقسیم جمله‌ی دوم بر جمله‌ی اول دنباله هندسی به‌دست می‌آید:

$$r = \frac{a+4d}{a+2d} = \frac{a+2(2d)}{a+2d} = \frac{a-6a}{a-3a} = \frac{-5a}{-2a} = \frac{5}{2} \Rightarrow r = \frac{5}{2}$$

مثال: دنباله‌ای مثال بزنید که هم حسابی باشد و هم هندسی و قدر نسبت‌ها را در هر دو حالت تعیین کنید.

پاسخ

تنها در یک حالت دنباله می‌تواند هر دو خاصیت حسابی و هندسی را داشته باشد:

«جملات دنباله اعداد غیر صفر و برابر باشند.»

یک نمونه، دنباله‌ی ثابت $3,3,3,\ldots$ است و قدر نسبت‌ها به ترتیب: $d=0$ و $r=1$ هستند.

بد نیست بدانیم:

وقتی جملات دنباله‌ی هندسی مثبت هستند؛

- اگر $r>1$ باشد، دنباله صعودی (افزایشی) است؛ مانند: $1,3,9,\ldots$
- اگر $0<r<1$ باشد، دنباله نزولی (کاهشی) است؛ مانند: $9,3,1,\ldots$

پاسخ دهید (۵)

۱- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید:

الف) جمله‌ی nاُم یک دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 + r^{n-1}$ است.

ب) دنباله‌ی ثابت هم حسابی و هم هندسی است.

۲- در یک دنباله‌ی هندسی روابط $a_2 a_3 = ۴$ و $(a_4)^2 = ۳۲$ برقرار است. جمله‌ی سیزدهم این دنباله را بیابید.

۳- اعداد زیر تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. قدر نسبت را حساب کنید.

$$۴x - ۱, ۲x + ۱, x + ۳$$

۴- بین دو عدد ۳ و ۹۶ تعداد چهار واسطه‌ی هندسی درج کنید.

۵- جمله‌های چهارم و هفتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ هستند. قدر نسبت دنباله را حساب کنید.

(نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

۶- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است. جمله‌ی پنجم را به‌دست آورید.

۷- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم ۱/۵ برابر مجموع جملات دوم و چهارم است. قدر نسبت جملات را به‌دست آورید.

۸- در یک دنباله‌ی حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

منتخب کتاب:

۱- درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن، توضیح دهید و در صورت نادرست بودن، مثال نقض ارائه کنید.

الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۲- علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

۳- حاصل‌ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر را محاسبه کنید:

$$۲, ۴, ۸, \dots$$

سؤال ترکیبی:

۱- با ضرب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله‌ی حسابی حاصل می‌شود. اگر جمله‌ی سوم دنباله‌ی هندسی باشد، جمله‌ی اول آن را بیابید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

۱- در یک دنباله‌ی هندسی با سه جمله، بعد از درج دو عدد بین جملات دوم و سوم آن، پنج جمله از یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ خواهیم داشت. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را مشخص کنید.

پاسخ‌نامه

فعالیت‌های ویژه دانش‌آموز

۱- چون اشتراک دو بازه از -۲ شروع شده است، پس a در سمت راست -۳ قرار داشته و مقدار آن -۲ بوده است:

$$a=-۲ \to [-۲,b]\bigcap[-۳,۰]=[-۲,-۱]$$

به طور مشابه، b در سمت چپ ۰ قرار داشته و مقدار آن -۱ بوده است. پس:

$$ab=(-۲)(-۱)=۲$$

۲- بدیهی است که $A=(-\infty,۲)$ و $B=(-۳,+\infty)$. در نتیجه:

$$A\bigcap B=(-۳,۲)$$

نقطه‌ی میانی یک بازه میانگین ابتدا و انتهای آن بازه است؛ پس:

$$\frac{-۳+۲}{۲}=-\frac{۱}{۲}$$

۳- توجه کنید که $\frac{۱}{۰}$ تعریف نشده است و لذا $۰\notin A$. چون:

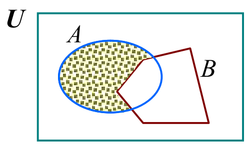
$$\frac{۱}{۱}=۱\in\mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{-۱}=-۱\in\mathbb{Z}$$

پس عددهای ۱ و -۱ در A قرار دارند. سایر عددهای $\frac{۱}{x}$ به صورت $\frac{۱}{۲},\frac{۱}{-۲},\frac{۱}{۳},\frac{۱}{-۳},\ldots$ هستند که هیچ‌کدام عضو $\mathbb{Z}$ نیستند. بنابراین $A=\{۱,-۱\}$ و این مجموعه متناهی است.

۴- با قدری دقت به مفاهیم مربوطه و بخصوص متمم، می‌بینیم که هر دو مجموعه به صورت زیر هستند:

پس همواره داریم:

$$A-B=A\bigcap B'$$



۵- مشابه نمونه‌های حل شده، مجموعه‌های R و H را به ترتیب مجموعه‌ی افراد علاقمند به ریاضی و هندسه در نظر بگیرید.

طبق فرض:

$$n(R)=۵۱ \quad و \quad n(H)=۴۲ \quad و \quad n(R\bigcap H)=۳۳$$

الف) تعداد افرادی که لااقل به یک درس علاقه دارند، $n(R\bigcup H)$ است:

$$n(R\bigcup H)=n(R)+n(H)-n(R\bigcap H)\to n(R\bigcup H)=۵۱+۴۲-۳۳$$
$$\Rightarrow\ n(R\bigcup H)=۶۰$$

ب) تعداد افرادی که فقط به هندسه علاقه دارند، $n(H-R)$ است:

$$n(H-R)=n(H)-n(R\bigcap H)=۴۲-۳۳=۹$$

پ) افرادی که فقط به یکی از دو درس علاقه دارند، از کم کردن تعداد افراد مشترک از افرادی که لااقل به یک درس علاقمند هستند، به‌دست خواهد آمد:

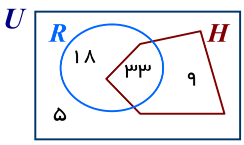
$$n(R\bigcup H)-n(R\bigcap H)=۶۰-۳۳=۲۷$$

ت) توجه کنید: افرادی که به هیچ درسی علاقه ندارند، طبق قانون شمارش تعداد عضوهای متمم به‌دست می‌آید:

$$n\big((R\bigcup H)'\big)=n(U)-n(R\bigcup H)=۶۵-۶۰=۵$$

توجه:

این مقادیر را در شکل مقابل هم می‌بینید:



۶- باید نامساوی زیر برقرار شود:

$$\frac{۲۲-۳n}{۳+n}>۰$$

توجه کنید که n عدد طبیعی و مثبت بوده و در نتیجه عدد $۳+n$ مثبت است. بنابراین برای مثبت بودن کلِ کسر، کافی است صورت کسر هم مثبت باشد:

$$۲۲-۳n>۰\ \to\ -۳n>۲۲\ \to\ n<\frac{۲۲}{۳}\cong ۷/۳$$

پس: جواب فقط عددهای ۱، ۲، . . . و ۷ است.

۷- دو جمله‌ای اول دنباله داده شده است. برای تعیین جملات سوم به بعد، کافی است در رابطه‌ی $F_n=F_{n-۱}+F_{n-۲}$ به جای عددهای ۳، ۴ و . . . قرار گیرد:

$$n=۳:\ F_۳=F_{۳-۱}+F_{۳-۲}\ \to\ F_۳=F_۲+F_۱=۱+۱\Rightarrow\ F_۳=۲$$
$$n=۴:\ F_۴=F_{۴-۱}+F_{۴-۲}\ \to\ F_۴=F_۳+F_۲=۲+۱\Rightarrow\ F_۴=۳$$
$$n=۵:\ F_۵=F_{۵-۱}+F_{۵-۲}\ \to\ F_۵=F_۴+F_۳=۳+۲\Rightarrow\ F_۵=۵$$
$$n=۶:\ F_۶=F_{۶-۱}+F_{۶-۲}\ \to\ F_۶=F_۵+F_۴=۵+۳\Rightarrow\ F_۶=۸$$

۸- طبق داده‌های مسأله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases}a_{۱۱}=۳۱\\ a_{۱۶}=۴۶\end{cases}\to\begin{cases}a+۱۰d=۳۱\\ a+۱۵d=۴۶\end{cases}\to\begin{cases}-a-۱۰d=-۳۱\\ a+۱۵d=۴۶\end{cases}\to\ ۵d=۱۵\Rightarrow\ d=۳$$

با جایگذاری عدد به‌دست آمده در معادله‌ی اول به جای d داریم:

$$a+10(3)=31 \rightarrow a=1$$

پس جمله‌ی هشتم عبارت است از:

$$a_8=a+7d=1+7(3)=22$$

۹- کافی است $t_{n+1}-t_n$ را تشکیل داده و ساده کنیم:

$$a\underbrace{(n+1)^2}_{n^2+2n+1}+b(n+1)+c-(an^2+bn+c)=an^2+2an+a+bn+b+c-an^2-bn-c$$

$$=2an+a+b$$

می‌بینید که دنباله خطی است. در دنبالـه‌ی درجـه دوم $-1,3,9,\ldots$، اخـتلاف جمـلات متـوالی $3-(-1),9-3,\ldots$ و یـا $4,6,\ldots$ است. چون این دنباله حسابی است، جملات بعدی آن $8,10,12,14,\ldots$ خواهنـد بـود. ایـن جمـلات بـه آسـانی جملات دنباله‌ی درجه دوم را مشخص می‌کنند:

$$-1,\ 3,\ 9,\ 17,\ 27,\ 39,\ \ldots$$

$$+4\quad +6\quad +8\quad +10\quad +12\quad +14$$

چنان‌که می‌بینید $t_6=39$ است.

۱۰- با توجه به داده‌های $a_2=8$ و $a_8=2$ و استفاده از نکته‌ی گفته شده:

$$r^{8-2}=\frac{a_8}{a_2} \rightarrow r^6=\frac{2}{8} \rightarrow r^6=\frac{1}{4} \rightarrow r=\pm\sqrt[6]{\frac{1}{4}}=\pm\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

۱۱- عدد ۲ را به عنوان جمله‌ی اول و عدد ۴۰۵ را به عنوان جمله‌ی آخر دنباله در نظر می‌گیریم:

$$5,\quad ,\quad ,\quad ,405$$

بنابراین ۴۰۵ جمله‌ی پنجم دنباله‌ی هندسی است که با استفاده از آن، قدرنسبت معلوم می‌شود:

$$a_5=ar^4 \rightarrow 5\times r^4=405 \rightarrow r^4=\frac{405}{5}=81 \rightarrow r^4=3^4 \Rightarrow r=\pm 3$$

پس دو جواب برای عددهای این دنباله وجود دارد:

$$r=3 \rightarrow 5,15,45,135,405$$

$$r=-3 \rightarrow 5,-15,45,-135,405$$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴