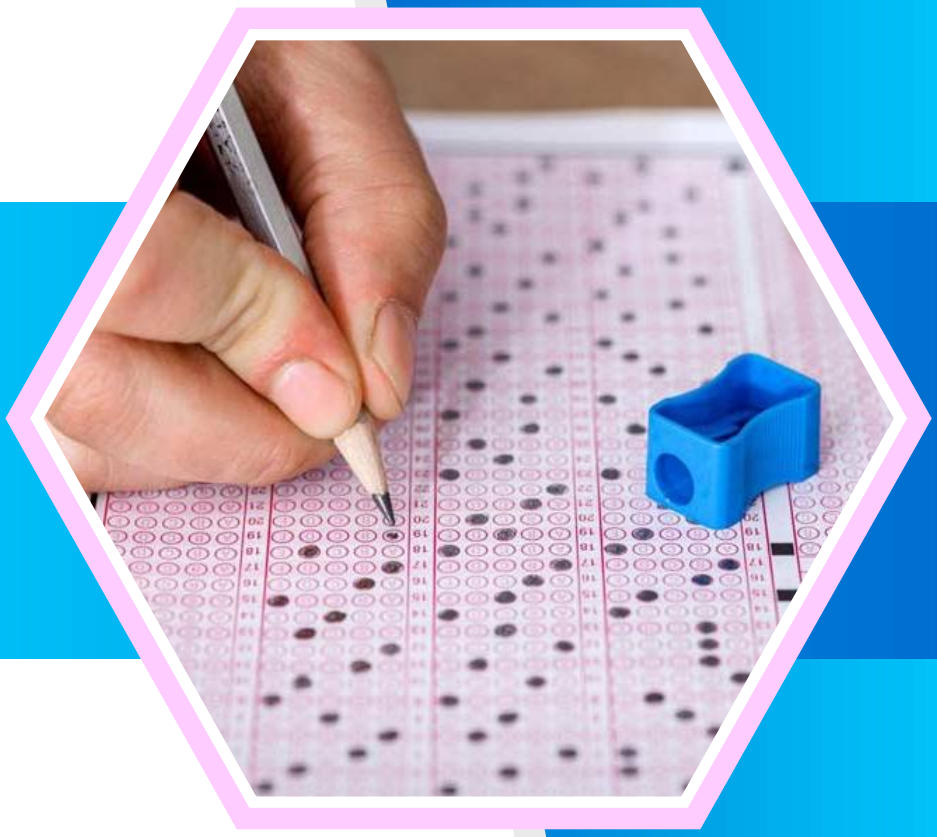
درسنامه ریاضیات انسانی

نمونه آموزش:

ریاضی و آمار (۲)



Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

جزئیات این مجموعه

توجه:

این محتوا، شامل آموزش تشریحی (نهایی) و همچنین ریاضیات کنکور رشته انسانی در یک مجموعه، البته به صورت تفکیک شده است.



پوشش سؤالات امتحانی (نهایی)، آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها

Up to date

فهرست

۱ **گزاره‌ها** — گزاره ساده و مرکب، جدول درستی گزاره‌ها — ۲

۲ **هم‌ارزی و استدلال** — بررسی هم‌ارزی گزاره‌ها، استدلال و استنتاج — ۲۸

۳ **تابـع (۱)** — بررسی چند نوع تابع ساده و نمودار، تابع قدرمطلق — ۶۱

۴ **تابـع (۲)** — تابع پلکانی- جزءصحیح و نمودار، اعمال جبر توابع — ۱۰۳

۵ **آمـار** — شاخص‌های آماری (خط فقر، تورم، بیکاری و . . .) — ۱۴۴

تشریحی& کنکور

ریاضی و آمار ۲

۲

هم‌ارزی گزاره‌ها و استدلال

فهرست	صفحه
گزاره‌های هم‌ارز	۲۹
استدلال ریاضی	۳۵
ویژه کنکور	۴۳
تمرینِ تست	۵۷

۱ گزاره‌های هم‌ارز

گزاره‌هایی که در ظاهر متفاوت، ولی ارزش منطقی یکسان دارند، در این بخش بیان و بررسی می‌شوند. تشخیص یکسان بودن گزاره‌ها، باعث سادگی کار با آن‌ها می‌شود.

گزاره‌های هم‌ارز:

دو گزاره‌ی P و Q را هم‌ارز (منطقی) گویند، هرگاه جدول ارزش آن‌ها کاملا یکسان باشد. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

برای نمونه؛

می‌بینید که ستون مربوط به p و $\sim(\sim p)$ یکسان هستند. پس:

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

p	~ p	~ (~ p)
د	ن	د
ن	د	ن

نمونه‌ی دیگر؛

چنان‌که در بخش قبل دیدیم، جدول ارزش گزاره‌های $p \Leftrightarrow q$ و $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ یکسان است. در نتیجه:

$$(p \Leftrightarrow q) \equiv [(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)]$$

مثال: (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳) هم‌ارزی $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$ را با جدول نشان دهید. **(این هم‌ارزی و دو مورد بالا را در ذهن داشته باشید.)**

پاسخ

کافی است ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان داده و مقایسه کنیم؛

p	q	p ⇒ q	~ p	~ p ∨ q
د	د	د	ن	د
د	ن	ن	ن	ن
ن	د	د	د	د
ن	ن	د	د	د

می‌بینید؛

ستون‌های مربوط به دو گزاره‌ی مرکب یکسان هستند.

مثال: هم‌ارزی زیر را نشان دهید.

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p$$

پاسخ

ارزش هر دو گزاره را در یک جدول نشان می‌دهیم؛

p	q	p ∨ q	p ∧ (p ∨ q)
د	د	د	د
د	ن	د	د
ن	د	د	ن
ن	ن	ن	ن

می‌بینید؛

ارزش گزاره‌ی مرکب $p \wedge (p \vee q)$ با ارزش p یکسان است.

در ادامه، چند هم‌ارزی مهم بیان و بررسی می‌شوند؛ با معرفی دو نوع گزاره مرتبط با مفهوم هم‌ارزی شروع می‌کنیم.

گزاره‌های ویژه:

❖ **همیشه درست:**

برخی گزاره‌ها در تمام حالت‌ها (همیشه) درست هستند، مانند:

$$p \vee \sim p$$

چنین گزاره‌ای را هم‌ارز با **T** نشان داده و می‌نویسیم: $p \vee \sim p \equiv T$

❖ **همیشه نادرست:**

برخی گزاره‌ها در تمام حالت‌ها نادرست هستند، مانند:

$$p \wedge \sim p$$

در مورد چنین گزاره‌ای می‌نویسیم: $p \wedge \sim p \equiv F$

(حرف **T** برگرفته از True به معنای راست و حرف **F** برگرفته از False به معنای نادرست است.)

دلیل هر دو هم‌ارزی $p \vee \sim p \equiv T$ و $p \wedge \sim p \equiv F$ را می‌بینید:

p	~ p	p ∨ ~ p	p ∧ ~ p
د	ن	د	ن
ن	د	د	ن

سؤال نهایی:

ارزش گزاره‌ی $(p \vee \sim p)$ همواره ..... است. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲)

درست

زیرا به صورت (ن ∨ د) یا (د ∨ ن) خواهد بود.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

درستی هم‌ارزی مقابل را با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید. $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

پاسخ

ارزش گزاره‌ی مرکب سمت چپ را در یک جدول نشان می‌دهیم:

p	q	~ q	(p ∧ ~ q)	p ⇒ q	(p ∧ ~ q) ∨ (p ⇒ q)
د	د	ن	ن	د	د
د	ن	د	د	ن	د
ن	د	ن	ن	د	د
ن	ن	د	ن	د	د

می‌بینید:

گزاره‌ی مرکب داده شده همواره درست بوده و بنابراین با T هم‌ارز است.

مثال: درستی یا نادرستی هم‌ارزی زیر را توسط جدول بررسی کنید.

$$\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p) \equiv F$$

پاسخ

مشابه مثال قبل، ارزش گزاره را در جدول نشان می‌دهیم:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim (p \Rightarrow q)$	$\sim q$	$\sim q \vee p$	$\sim (p \Rightarrow q) \wedge (\sim q \vee p)$
د	د	د	ن	ن	د	**ن**
د	ن	ن	د	د	د	**د**
ن	د	د	ن	ن	ن	**ن**
ن	ن	د	ن	د	د	**ن**

می‌بینید:

ارزش گزاره‌ی مرکب همواره نادرست نبوده و هم‌ارزی برقرار نیست.

یک هم‌ارزی مهم برای گزاره‌ی شرطی:

قانون عکس نقیض:

هم‌ارزی زیر به نام قانون عکس نقیض برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

یعنی:

به جای آن‌که مستقیماً نشان دهیم p گزاره‌ی q را نتیجه می‌دهد، می‌توانیم روشی غیر مستقیم به‌کار ببریم:

نشان دهیم غلط بودن q به غلط بودن p منجر می‌شود!

دلیل این هم‌ارزی را در جدول زیر می‌بینید:

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \Rightarrow q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	ن	ن	**د**	**د**
د	ن	ن	د	**ن**	**ن**
ن	د	د	ن	**د**	**د**
ن	ن	د	د	**د**	**د**

سؤال نهایی:

کدام گزاره هم‌ارز گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ است؟ (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲)

☐ $\sim p \Rightarrow \sim q$ ☐ $\sim p \Leftrightarrow \sim q$ ☐ $\sim q \Rightarrow \sim p$ ☐ $p \Leftrightarrow q$

گزینه (۳): طبق قانون عکس نقیض.

مثال: در زیر، یک گزاره‌ی شرطی و عکس نقیض آن را می‌بینید؛ ارزش درستی آن‌ها یکسان است. (هر دو درست)

گزاره: اگر باران ببارد، آنگاه زمین تَر می‌شود.

عکس نقیض: اگر زمین خشک باشد، آنگاه باران نباریده است.

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

عکس نقیض گزاره‌ی شرطی: «**اگر n^2 عددی زوج باشد، آنگاه n عددی زوج است.**» را بنویسید. ($n \in \mathbb{Z}$)

پاسخ

چون نقیض «زوج بودن»، «فرد بودن» است:

اگر n عددی فرد باشد، آنگاه n^2 عددی فرد است.

قوانین دمورگان:

طبق دو هم‌ارزی زیر، نقیض را می‌توان در ترکیب‌های فصلی و عطفی توزیع کرد:

$$\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q \quad \text{و} \quad \sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

(تغییر) (تغییر)

دلیل هم‌ارزی $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ را می‌بینید، مورد دیگر هم به روش مشابه نشان داده می‌شود:

p	q	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
د	د	د	**ن**	ن	ن	**ن**
د	ن	ن	**د**	ن	د	**د**
ن	د	ن	**د**	د	ن	**د**
ن	ن	ن	**د**	د	د	**د**

برای نمونه؛

طبق قوانین بالا، نقیض گزاره‌ی $\sim p \wedge q$ را می‌نویسیم:

$$\sim(\sim p \wedge q) \equiv \sim(\sim p) \vee \sim q \equiv p \vee \sim q$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) عدد ۰ مثبت است یا ارومیه مرکز آذربایجان شرقی است.

ب) $(x < ۲) \wedge (۲^۳ \neq ۷)$

پاسخ

الف) طبق دمورگان، هم‌ارزی $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$ را به‌کار می‌بریم:

عدد ۰ مثبت نیست و ارومیه مرکز آذربایجان شرقی نیست.

ب) طبق دمورگان:

$$\sim[(x<۲)\wedge(۲^{۳}\neq ۷)]\equiv\sim(x<۲)\vee\sim(۲^{۳}\neq ۷)\equiv(x\geq ۲)\vee(۲^{۳}=۷)$$

مثال: نقیض گزاره‌ی شرطی $p\Rightarrow q$ را مشخص کنید.

پاسخ

ابتدا ترکیب شرطی را به فصلی تبدیل کرده و سپس طبق دمورگان:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv\sim(\sim p\vee q)\equiv\sim(\sim p)\wedge\sim q\equiv p\wedge\sim q$$

از مثال قبل به یاد داشته باشید:

$$\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$$

مثال: نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.

اگر $\sqrt{۴۹}$ مربع کامل باشد، آنگاه رضا در کنکور قبول می‌شود.

پاسخ

طبق هم‌ارزی $\sim(p\Rightarrow q)\equiv p\wedge\sim q$ جواب چنین است:

$\sqrt{۴۹}$ مربع کامل است و رضا در کنکور قبول نمی‌شود.

پاسخ دهید (۱)

۱- توسط جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی زیر را نشان دهید:

$$[(p\vee q)\wedge\sim p]\Rightarrow q\equiv T$$

۲- توسط جدول ارزش گزاره‌ها هم‌ارزی زیر را نشان دهید:

$$\sim(p\Rightarrow q)\vee(p\wedge q)\equiv p$$

۳- عکس و عکس نقیض گزاره‌ی زیر را بنویسید.

اگر $x^{۲}>۰$ باشد، آنگاه x عددی مثبت است.

۴- اگر r گزاره‌ای درست و $(q\Rightarrow p)\Leftrightarrow(q\vee r)$ گزاره‌ای نادرست باشد، برای هم‌ارزی زیر دلیل بیاورید:

$$r\Rightarrow(q\wedge p)\equiv F$$

منتخب کتاب:

۱- درستی هر یک از هم ارزی‌ها را توسط جدول ارزش‌ها نشان دهید.

الف) $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

ب) $p \Rightarrow p \equiv T$

پ) $(p \vee \sim q) \wedge (p \vee q) \equiv p$

ت) $(p \wedge \sim q) \vee (p \Rightarrow q) \equiv T$

۲ استدلال ریاضی

در این بخش، کاربردهای ساده‌ای از منطق و استدلال ریاضی در نحوه‌ی استدلال کردنِ صحیح و برخی خطاهای منجر به نتایج ناصحیح را خواهیم دید. اولین گام برای این کار (یعنی: استدلال ریاضی)، این است که گزاره‌های توصیفی را توسط نمادهای ریاضی بنویسیم. با آوردن نمونه‌هایی، با این کار آشنا می‌شویم.

مثال: عبارت «مربع هر عدد بعلاوه‌ی ۱، بزرگ‌تر یا مساوی دو برابر آن عدد است.» را با نماد ریاضی می‌نویسیم:

اگر عدد دلخواه را با x نشان دهیم، مربع آن $x^۲$ و دو برابر آن $۲x$ است. عبارت بالا:

$$x^۲ + ۱ \geq ۲x$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

الف) اگر از مکعب عددی یک واحد کم کنیم، حاصل برابر ۲۶ می‌شود.

ب) حاصل ضرب عددی در خودش، به‌علاوه ۵، بزرگ‌تر از خود آن عدد است.

پاسخ

با دقت در پیان گزاره‌ها:

الف) $x^۳ - ۱ = ۲۶$

ب) $x \times x + ۵ > x \rightarrow x^۲ + ۵ > x$

توجه کنید:

هنگام تبدیل عبارات به نماد ریاضی یا بالعکس:

به مفهوم واژه‌ها دقت کرده و ترتیب محاسبات روی مقادیر را دقیقاً رعایت کنید.

چند نمونه:

- نصف قرینه‌ی یک عدد به صورت $\frac{-x}{۲}$، قرینه‌ی نصف یک عدد $-\frac{x}{۲}$، ثلث مربع یک عدد $\frac{x^۲}{۳}$ و مربع ثلث یک عدد $(\frac{x}{۳})^۲$ است.
- مربع مجموع دو عدد به صورت $(a+b)^۲$ و جذر مجموع مربعات دو عدد $\sqrt{a^۲+b^۲}$ است.
- سه واحد بیشتر از قرینه‌ی میانگین دو عدد به صورت $-\frac{a+b}{۲}+۳$ است.

مثال: (از کتاب)

عبارت زیر را با نماد ریاضی بیان کنید:

ده درصد قیمت فروش کالایی، برابر سود آن است.

پاسخ

اگر قیمت فروش کالا x و قیمت خرید را y بگیریم، سود کالا $x-y$ و ده درصد قیمت فروش $\frac{۱۰}{۱۰۰}x$ خواهد شد. پس:

$$\frac{۱۰}{۱۰۰}x = x - y$$

ساده‌ترین روش در استدلال ریاضی به صورت زیر است.

قیاس استثنایی:

در این نوع استدلال، می‌دانیم گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ و گزاره‌ی p درست هستند. نتیجه این است که گزاره‌ی q باید درست باشد.

(اگر q نادرست باشد، گزاره‌ی $p \Rightarrow q$ به صورت «**ن** $\Rightarrow$ **د**» تبدیل شده و باید نادرست باشد.)

مطلب بالا به شکل نمادین، به صورت مقابل نوشته می‌شود:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ \underline{\quad p \quad} \\ \therefore\ q \end{array}$$

(نماد $\therefore$ به معنای «نتیجه» یا «در نتیجه» است.)

نمونه‌ای ببینید:

اگر بدانیم دو گزاره‌ی زیر صحیح هستند:

«اگر عددی منفی باشد، آنگاه قرینه‌ی آن مثبت است.» ($p \Rightarrow q$: p: عددی منفی باشد، q: قرینه‌ی آن مثبت است.)

و

«x عددی منفی است.» (p)

طبق قیاس استثنایی نتیجه می‌گیریم:

«$-x$ عددی مثبت است.»

مثال: (از کتاب)

دو مقدمه‌ی زیر صحیح هستند:

مقدمه ۱: اگر امشب، شب چهاردهم ماه باشد، آنگاه ماه کامل است.

مقدمه ۲: امشب شب چهاردهم ماه است.

چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

پاسخ

طبق قیاس استثنایی: «ماه کامل است.»

مثال: جای خالی را با عبارت مناسب پر کنید تا قیاس به درستی کامل شود:

مثلث دو زاویه‌ی برابر دارد. $\Rightarrow$ مثلث دو ضلع برابر داشته باشد.

.....

مثلث ABC دو زاویه‌ی برابر دارد.

پاسخ

طبق قاعده‌ی قیاس استثنایی:

مثلث ABC دو ضلع برابر دارد.

مثال: قیاس استثنایی را می‌توان در کل با گزاره‌ی مرکب زیر صورت بندی کرد:

$$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$$

درستی این قاعده را توسط جدول ارزشی نشان دهید.

پاسخ

چنان‌که می‌بینید، گزاره‌ی مرکب همواره درست است:

p	q	$p \Rightarrow q$	$(p \Rightarrow q) \wedge p$	$[(p \Rightarrow q) \wedge p] \Rightarrow q$
د	د	د	د	**د**
د	ن	ن	ن	**د**
ن	د	د	ن	**د**
ن	ن	د	ن	**د**

یعنی:

در صورتی که p و استنتاج $(p \Rightarrow q)$ درست باشند، q الزاماً درست خواهد بود.

در ادامه، نمونه‌های دیگری از استدلال‌های درست و در پایان برخی خطاها در استدلال را خواهیم دید.

مثال: (از کتاب)

سه لیوان داریم که مانند شکل زیر یکی از آن‌ها وارونه است. می‌خواهیم همه‌ی آن‌ها در حالت درست (رو به بالا) قرار گیرند؛ ولی مجاز هستیم تا هر بار دقیقاً دو لیوان را تغییر وضعیت دهیم (اگر وارونه است، آن را درست کنیم و برعکس). آیا این کار امکان‌پذیر است؟ اگر بلی با چند حرکت مجاز؟



پاسخ

اگر تعداد لیوان‌های وارونه را s بگیرید، در این صورت:

اکنون $s=1$ است و وضعیت مطلوب این است که $s=0$ شود.

در هر تغییر وضعیت لیوان‌ها، طبق شرط سؤال، سه حالت می‌تواند رخ دهد:

- **دو لیوان وارونه، درست شوند:**

در این حالت، از لیوان‌های وارونه ۲ تا کم می‌شود. (یعنی: تبدیل s به $s-2$)

- **دو لیوان درست، وارونه شوند:**

در این حالت، به لیوان‌های وارونه ۲ تا اضافه می‌شود. (یعنی: تبدیل s به $s+2$)

- **یک لیوان وارونه، درست و یک لیوان درست، وارونه شود:**

در این حالت، تعداد لیوان‌های وارونه تغییر نمی‌کند. (یعنی: ثابت ماندن s)

توجه کنید:

در شروع کار $s=1$ عددی فرد است و در هر مرحله، به اندازه‌ی عددی زوج (0 یا ± 2) تغییر می‌کند و بنابراین هیچ‌گاه نمی‌تواند به عدد زوج $s=0$ تبدیل شود.

تکنیک بعدی گاهی در استدلال کردن مفید است.

کاربرد عکس نقیض:

قبلاً دیدیم که هم‌ارزی $(p\Rightarrow q)\equiv(\sim q\Rightarrow\sim p)$ برقرار است. هنگام کاربرد؛

در صورتی که اثبات درستی $(p\Rightarrow q)$ دشوار باشد، به جای آن ثابت می‌کنیم $(\sim q\Rightarrow\sim p)$ درست است.

توجه کنید:

اثبات درستی $(p\Rightarrow q)$، یعنی: با فرض درست بودن گزاره‌ی p، نشان دهیم که q حتماً درست است.

مثال: (از کتاب) ثابت کنید:

اگر n^2 زوج باشد، آنگاه n زوج است. $(n\in\mathbb{Z})$

پاسخ

قرار دهید:

q : **n زوج است.** و p : **n^2 زوج است.**

باید نشان دهیم $p\Rightarrow q$ درست است. چون این کار آسان نیست، درستی عکس نقیض آن را نشان می‌دهیم: $(\sim q\Rightarrow\sim p)$. یعنی کافی است ثابت کنیم:

اگر n فرد باشد، آنگاه n^2 فرد است.

اثبات: چون n فرد است، آن را به صورت $n=2k+1$ نوشته و:

$$n^2=(2k+1)^2=4k^2+4k+1\rightarrow n^2=2\underbrace{(2k^2+2k)}_{m}+1\Rightarrow n^2=2m+1$$

(پس n^2 فرد است.)

در پایان، دو نوع خطای استدلال را ببینید.

مغالطه:

گاهی هنگام کاربرد قیاس استثنایی، از درستی $p \Rightarrow q$ و درستی q، ممکن است نتیجه بگیریم p درست است؛ که البته اشتباه است.

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ q \\ \hline \therefore\ p \end{array}$$

مغالطه (استدلال نادرست)

مثال: استدلال زیر نمونه‌ای از یک مغالطه است:

مثلث سه زاویه‌ی برابر دارد. $\Rightarrow$ مثلث متساوی الاضلاع باشد.

در مثلث ABC داریم: $\hat{A} = \hat{B} = \hat{C}$

مثلث ABC متساوی الاضلاع است.

زیرا از درستی $p \Rightarrow q$ و q، درستی p را نتیجه گرفته است.

توجه کنید:

نتیجه‌ی حاصل از یک مغالطه ممکن است درست یا نادرست باشد؛ ولی نتیجه‌ی قیاس استثنایی همواره درست است. (البته، هدف از مغالطه معمولاً کسب نتایج نادرست است!)

مثال: عبارات زیر را در نظر بگیرید:

مقدمه ۱: $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ **مقدمه ۲:** $9 > 0$

.....

جای خالی را: **الف)** طبق قیاس استثنایی **ب)** طبق مغالطه کامل کنید.

کدام نتیجه‌گیری معتبر است؟

پاسخ

الف) در حالت قیاس استثنایی، عبارت $9 > 0$ نقش $x > 0$ را دارد و بنابراین جواب: $0.81 > 0$ **(استدلال معتبر)**

ب) برای مغالطه باید عبارت $9 > 0$ را همان $x^2 > 0$ بگیرید. یعنی $3^2 > 0$ و جواب: $0.3 > 0$ **(استدلال نامعتبر)**

نوع دوم خطاها:

خطا در محاسبات:

گاهی قیاس استثنایی به درستی به‌کار می‌رود، ولی ممکن است در جزئیاتِ محاسبات، اشتباه کرده باشیم.

نمونه‌هایی ببینید:

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

الف) گزاره‌ی «مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به‌علاوه‌ی پنج است.» را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

ب) درستی یا نادرستی استدلال زیر را بررسی کنید؛ اگر روش به‌کار رفته نادرست است، آن را اصلاح کنید.

گزاره: اگر طول و عرض مستطیلی را ۳ برابر کنیم، آنگاه مساحت آن ۳ برابر می‌شود:

استدلال

$S = xy$: **مساحت اولیه** $\Rightarrow$ عرض اولیه $= y$ و طول اولیه $= x$

$S' = (۳x)(y) = ۳xy = ۳S$: **مساحت جدید** $\Rightarrow$ عرض جدید $= y$ و طول جدید $= ۳x$

پاسخ

الف) به آسانی می‌نویسیم:

$$x^۳ > ۷x + ۵$$

ب) نادرست است؛ زیرا:

عرض جدید را باید $۳y$ بگیریم و چنان‌که می‌بینید، مساحت جدید ۹ برابر می‌شود:

$$S' = (۳x)(۳y) = ۹xy = ۹S$$

مثال: روش زیر ادعا می‌کند که معادله‌ی $x^۲ = ۲x$ تنها یک ریشه دارد و آن $x = ۲$ است. مراحل این استدلال در زیر آمده است:

مرحله ۱: $x^۲ - ۲x = ۰$

مرحله ۲: $x(x-۲) = ۰$

مرحله ۳: $\frac{x(x-۲)}{x} = \frac{۰}{x}$

مرحله ۴: $x - ۲ = ۰$

مرحله ۵: $x = ۲$

خطای استدلال در کجاست؟

پاسخ

خطا در مرحله‌ی سوم اتفاق افتاده است. زیرا:

تقسیم صورت و مخرج بر x مجاز نیست، زیرا اگر $x = ۰$ باشد، کسر بی معنی است.

توجه کنید: (مهم)

مانند آن‌چه در مثال قبل دیدیم؛

تقسیم دو طرف یک تساوی فقط بر عددی که می‌دانیم غیرصفر است، مجاز می‌باشد.

مثال: استدلال زیر نشان می‌دهد که $۵ = ۷$ است. خطای استدلال در کدام مرحله رخ داده است؟

مرحله ۱: $۷ = ۷$

مرحله ۲: $۷ = ۳ + ۴$

مرحله ۳: $۷ = \sqrt{۹} + \sqrt{۱۶}$

مرحله ۴: $۷ = \sqrt{۹+۱۶}$

مرحله ۵: $۷ = \sqrt{۲۵}$

مرحله ۶: $۷ = ۵$

پاسخ

خطا در مرحله‌ی چهارم اتفاق افتاده است. زیرا:

در جمع رادیکال‌ها، نمی‌توان عددهای زیر آن‌ها را با هم جمع کرد. ($\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}\neq\sqrt{۹+۱۶}$)

پاسخ دهید (۲)

۱- بیان ریاضی هر عبارت را بنویسید:

الف) پنج برابر هر عدد برابر ثلث مربع آن عدد است.

ب) حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، کوچک‌تر یا مساوی مجموع مربعات آن دو عدد است.

پ) مجموع مجذور دو عدد، کوچک‌تر از مجذور مجموع آن دو عدد است.

ت) مجموع معکوس‌های دو عدد مثبت، بزرگ‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است.

۲- «عددی را در نصف خودش ضرب کردیم، آنگاه عدد ۱۲ را به حاصل‌ضرب قبلی افزودیم. حاصل ۵ برابر عدد منظور شد.» آن عدد (منظور) را بیابید.

۳- نشان دهید: اگر عدد طبیعی n فرد باشد، $n^۲$ نیز عددی فرد است.

۴- اشکال محاسباتی هر مورد را مشخص کنید:

الف) $x>y \Rightarrow x(x-y)>y(x-y)$

ب) $\frac{۲x}{x-۱}-\frac{۳x+۱}{x-۱}=\frac{۲x-۳x+۱}{x-۱}=\frac{-x+۱}{x-۱}=\frac{-(x-۱)}{x-۱}=-۱$

پ) $۵=\sqrt{۲۵}=\sqrt{۹+۱۶}=\sqrt{۹}+\sqrt{۱۶}=۳+۴=۷$

ت) $-۵<-۲ \Rightarrow (-۵)^۲<(-۲)^۲ \Rightarrow ۲۵<۴$

ث) $۲=\frac{۴\sqrt{۲}}{۲\sqrt{۲}}=\frac{۴\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۲}}=\frac{۴}{۱+\sqrt{۲}}$

۵- درستی یا نادرستی موارد زیر را با دلیل مشخص کنید:

الف) اگر طول و عرض مستطیل دو برابر شود، محیط نیز دو برابر می‌شود.

ب) اگر طول و عرض مستطیل دو برابر شود، مساحت نیز دو برابر می‌شود.

۶- جای خالی را طوری کامل کنید تا قیاس استثنایی کامل شود.

الف: اگر a عددی گویا باشد، آنگاه $a^۲$ گویاست. **ب:** $\frac{۲}{۳}$ عددی گویاست.

. . . . . .

۷- جای خالی را طوری کامل کنید تا قیاس استثنایی کامل شود.

الف: اگر باران ببارد، آنگاه زمین خیس می‌شود. **ب:** ....

زمین خیس شده است.

منتخب کتاب:

۱- گزاره‌های زیر را به صورت نماد ریاضی بنویسید.

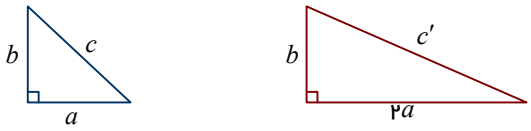
الف) دو برابر جذر عددی برابر خودش است.

ب) مکعب یک عدد، بزرگ‌تر از هفت برابر آن عدد، به علاوه‌ی پنج است.

پ) هر عدد ناصفری از معکوس خود بزرگ‌تر یا مساوی با آن است.

۲- در هر مورد زیر، خطای استدلال را مشخص کنید.

الف) در یک مثلث قائم الزاویه به اضلاع قائمه‌ی a و b و وتر c همانند شکل زیر، اگر ضلع a را دو برابر کنیم، آنگاه وتر نیز دو برابر می‌شود.



استدلال:

می‌دانیم رابطه‌ی فیثاغورس: $c^۲=a^۲+b^۲$ برقرار است. این رابطه را برای مثلث قائم الزاویه‌ی جدید می‌نویسیم.

$$c'^۲=(۲a)^۲+b^۲=۴a^۲+b^۲=۴(\underbrace{a^۲+b^۲}_{c^۲})=۴c^۲ \Rightarrow c'^۲=۴c^۲ \Rightarrow c'=۲c$$

ب) تساوی $\sqrt{\frac{۱۲\times۳+۴\times۱۶}{۶}}=۲\sqrt{۱۱}$ برقرار است.

استدلال:

$$\sqrt{\frac{۱۲\times۳+۴\times۱۶}{۶}}=\sqrt{\frac{۱۲\times۳+۴\times۱۶}{۲\times۳}}=\sqrt{\frac{۱۲+\overset{۲}{۴}\times۱۶}{۲}}=\sqrt{۱۲+۳۲}=\sqrt{۴۴}=\sqrt{۴\times۱۱}=۲\sqrt{۱۱}$$

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌های آزمایشی و کنکور آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت در امتحان پایان سال هستید،
می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

اگر p گزاره‌ای درست و q گزاره‌ای نادرست باشد، گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (r \wedge q)$ با کدام هم‌ارزش است؟

❶ $\sim (q \wedge r)$ ❷ $p \vee r$ ❸ $p \wedge \sim q$ ❹ $\sim p \vee q$

گزینه ۴

جایگذاری اطلاعات داده شده و سپس استفاده از قوانین:

$$[\underbrace{(T \vee F)}_{T} \Rightarrow \underbrace{(r \wedge F)}_{F}] \equiv (T \Rightarrow F) \equiv F$$

فقط در مورد چهارم، ارزش گزاره نادرست است:

$$\sim p \vee q \equiv \sim T \vee F \equiv F \vee F \equiv F$$

ارزش گزاره‌های p و q به ترتیب چگونه باشد تا گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \vee (\sim p \wedge q)$ نادرست باشد؟

❶ نادرست - نادرست
❷ درست - درست
❸ درست - نادرست
❹ نادرست - درست

گزینه ۲

برای نادرست بودن گزاره‌ی مرکب، باید حتماً $(p \Rightarrow \sim q)$ نادرست باشد که:

فقط با درست بودن هر دوی p و q رخ می‌دهد.

برخی هم ارزی‌های گزاره‌ها به سادگی تشخیص داده می‌شوند:

نکته ۱

هم ارزی‌های بدیهی:

موارد ساده‌ی زیر، با توجه به تعریف ترکیب‌ها همواره برقرار هستند:

- ترکیبات بدیهی یک گزاره با خودش:

$$p \Leftrightarrow p \equiv T \qquad p \Rightarrow p \equiv T \qquad p \wedge p \equiv p \qquad p \vee p \equiv p$$

- ترکیبات بدیهی یک گزاره با **T** یا **F**:

$$F \Rightarrow p \equiv T \qquad p \wedge F \equiv F \qquad p \vee F \equiv P \qquad p \wedge T \equiv p \qquad p \vee T \equiv T$$

- ترکیبات بدیهی گزاره با نقیض خودش:

$$\sim p \Leftrightarrow p \equiv F \qquad \sim(\sim p) \equiv p \qquad p \wedge \sim p \equiv F \qquad p \vee \sim p \equiv T$$

- ترکیبات بدیهی گزاره با فصلی و عطفی:

$$p \wedge (p \vee q) \equiv p \qquad p \vee (p \wedge q) \equiv p$$

توجه داشته باشید که:

❖ جابجایی‌های $(p \vee q) \equiv (q \vee p)$ و $(p \wedge q) \equiv (q \wedge p)$ و $(p \Leftrightarrow q) \equiv (q \Leftrightarrow p)$ طبق جدول‌های مربوطه برقرار هستند، **اما:**

گزاره‌ی شرطی $p \Rightarrow q$ و عکس آن $q \Rightarrow p$ یکسان نیستند.

❖ ترکیب‌های فصلی و عطفی مانند ضرب اعداد نسبت به جمع، «**پخش‌پذیر**» هستند و استفاده از آن‌ها در تست‌ها گاهی مفید واقع می‌شود:

$$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \qquad \text{و} \qquad p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

بعلاوه:

برعکس پخش‌پذیری (فاکتورگیری) هم گاهی مفید است. نمونه:

$$(p \vee q) \wedge (p \vee \sim q) \equiv p \vee \underbrace{(q \wedge \sim q)}_{\equiv F} \equiv p$$

گزاره‌ی $p \vee (\sim p \wedge q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ q ❷ $p \wedge q$ ❸ p ❹ $p \vee q$

گزینه ۴

با استفاده از پخش‌پذیری و سایر خواص گفته شده:

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv \underbrace{(p \vee \sim p)}_{\equiv T} \wedge (p \vee q) \equiv p \vee q$$

اگر p گزاره‌ای درست، q گزاره‌ای نادرست و r گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش کدام یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز منطقی r است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ $(\sim q \Rightarrow \sim p) \wedge r$ ❷ $(p \Rightarrow (p \wedge q)) \wedge r$ ❸ $(q \Rightarrow (p \wedge q)) \wedge r$ ❹ $(p \Rightarrow q) \wedge r$

گزینه ۳

با توجه به گزینه‌ها، باید در پرانتز سمت چپ $\wedge r$، یک گزاره‌ی درست داشته باشیم. واضح است که فقط مورد سوم چنین است:

$$\underbrace{(\underbrace{q}_{F} \Rightarrow (p \wedge q))}_{T} \wedge r \equiv T \wedge r \equiv r$$

معمولاً نقیض گزاره‌های مرکب با قوانین زیر نوشته می‌شود.

نکته ۲

قوانین دمورگان:

دو هم‌ارزی زیر را قبلاً توسط جدول دیده‌ایم:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{و} \quad \sim (p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$$

یعنی:

هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی؛

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و همچنین $\wedge$ و $\vee$ به هم تبدیل می‌شوند.

توجه کنید:

هنگام کاربرد قوانین دمورگان، هم‌ارزی $\sim (\sim p) \equiv p$ کاربرد فراوانی دارد. بعلاوه، ممکن است نقیض بیش از دو بار هم پشت سر هم قرار گیرد، در این صورت، می‌توانید جفت جفت (تعداد زوج) آن‌ها را حذف کنید. نمونه:

$$\underbrace{\sim (\sim (\sim \cdots (\sim}_{\text{هفت بار}} p))) \equiv \sim p$$

مثال: نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

الف) ۵ عددی زوج است و π عددی گنگ است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.

پاسخ

طبق قوانین دمورگان:

الف) ۵ عددی فرد است یا π عددی گویا است.

ب) ماه به دور خورشید نمی‌گردد و زمستان هوا گرم نیست.

نقیض گزاره‌ی $p \Leftrightarrow q$ هم‌ارز کدام است؟

❶ $p \Leftrightarrow \sim q$ ❷ $\sim p \wedge \sim q$ ❸ $\sim p \Rightarrow q$ ❹ $\sim p \Leftrightarrow \sim q$

گزینه ۱

هر چند برای $(p \Leftrightarrow q) \sim$ قاعده‌ای بیان نکردیم، به آسانی می‌بینید که ارزش گزاره‌ی $p \Leftrightarrow \sim q$ (و به صورت مشابه $\sim p \Leftrightarrow q$) دقیقاً برعکس $p \Leftrightarrow q$ است.

تبدیل گزاره‌ی شرطی به یک گزاره‌ی شرطی هم‌ارز دیگر:

نکته ۳

قانون عکس نقیض:

این هم‌ارزی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

یعنی:

می‌توان هر دو گزاره را نقیض کرده و آن‌ها را جابجا کرد.

برای نمونه؛

هم‌ارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:

اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

به کمک عکس نقیض گزاره‌ی شرطی، به جای اثبات گزاره‌ی شرطی «اگر $x \leq 0$، آنگاه $|x| > 0$» می‌توانیم کدام گزاره‌ی زیر را اثبات کنیم؟

❶ اگر $x \geq 0$، آنگاه $|x| \leq 0$

❷ اگر $x < 0$، آنگاه $|x| \leq 0$

❸ اگر $|x| \leq 0$، آنگاه $x > 0$

❹ اگر $|x| \geq 0$، آنگاه $x > 0$

گزینه ۳

گزاره را نمادین نوشته و قانون عکس نقیض را به‌کار می‌بریم؛

$$(x \leq 0) \Rightarrow (|x| > 0) \equiv \sim (|x| > 0) \Rightarrow \sim (x \leq 0) \equiv (|x| \leq 0) \Rightarrow (x > 0)$$

هم‌ارزی بسیار مهم و پرکاربرد برای گزاره‌های شرطی:

نکته ۴

تبدیل شرطی به فصلی:

هم‌ارزی شرطی زیر دارای کاربرد فراوان است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

یعنی:

در گزاره‌ی $p \Rightarrow q$، می‌توان «گزاره‌ی اول را نقیض کرده»، «نماد $\Rightarrow$ به $\vee$ تبدیل شده» و گزاره‌ی دوم را نوشت.

نتیجه:

با استفاده از هم‌ارزی فوق و کاربرد دمورگان، نقیض گزاره‌ی شرطی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\sim (p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$$

مثال: نقیض گزاره زیر را بنویسید.

اگر ۵ عددی زوج باشد، آنگاه $10 \geq 10-$ است.

پاسخ

طبق مطلب قبل، فقط گزاره‌ی دوم نقیض شده و شرطی به عطفی تبدیل می‌شود:

۵ عددی زوج و $10 < 10-$ است.

توجه کنید:

نقیض $>$ به صورت $\leq$، نقیض $=$ به صورت $\neq$ و نقیض $\leq$ به صورت $>$ است. (و برعکس)

گزاره‌ی $\sim (p \Rightarrow \sim q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ $p \vee \sim q$ ❷ $p \wedge q$ ❸ $q \vee \sim p$ ❹ $\sim p \wedge q$

گزینه ۲

ابتدا تبدیل شرطی به فصلی و سپس دمورگان:

$$\sim (p \Rightarrow \sim q) \equiv \sim (\sim p \vee \sim q) \equiv p \wedge q$$

کدام‌یک از هم ارزی‌های زیر نادرست است؟ **(کنکور خارج ۹۸)**

❶ $p \wedge (p \vee q) \equiv p$ ❷ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$

❸ $(\sim p \vee q) \equiv (q \Rightarrow p)$ ❹ $(\sim p \vee q) \equiv (p \Rightarrow q)$

گزینه ۳

هم‌ارزی سایر گزینه‌ها را قبلاً دیده‌ایم. در مورد سوم:

$$q \Rightarrow p \equiv \sim q \vee p$$

جدول ارزش کدام‌یک از گزاره‌های زیر با جدول ارزش گزاره‌ی $(p \vee q) \Rightarrow (q \vee r)$ یکسان نیست؟ **(کنکور ۱۴۰۰)**

❶ $p \Rightarrow (q \vee r)$ ❷ $(p \wedge q) \vee r$ ❸ $\sim p \vee q \vee r$ ❹ $(p \Rightarrow q) \vee r$

گزینه ۲

با استفاده از نکته‌ی قبل، می‌توان دید که گزینه‌های اول و چهارم با گزینه‌ی سوم هم‌ارز هستند:

$$(p \Rightarrow q) \vee r \equiv (\sim p \vee q) \vee r \equiv \sim p \vee q \vee r \quad \text{و} \quad p \Rightarrow (q \vee r) \equiv \sim p \vee (q \vee r) \equiv \sim p \vee q \vee r$$

در نتیجه:

فقط گزینه‌ی دوم می‌تواند جواب تست باشد!

توجه کنید:

در مواقعی (مانند تست قبل) که تشخیص هم‌ارزی دشوار یا زمان‌بر است، استفاده از تکنیک مقدار گذاری که پایین‌تر گفته شده، روش بسیار مناسبی است.

گزاره‌ی $[(p\wedge(p\vee q)]\Rightarrow p$ با کدام‌یک از گزاره‌های زیر هم‌ارز است؟

❶ $\sim p\vee p$ ❷ $p\vee q$ ❸ $p\wedge q$ ❹ $\sim p\wedge q$

گزینه ۱

طبق هم ارزی‌های گفته شده:

$$\underbrace{[(p\wedge(p\vee q)]}_{\equiv p}\Rightarrow p\equiv(p\Rightarrow p)\equiv(\sim p\vee p)$$

توجه کنید:

وقتی به $p\Rightarrow p$ رسیدید، بدون استفاده از قوانین هم‌ارزی هم معلوم است که آن فقط با $(\sim p\vee p)$ هم‌ارز است. (هر دو هم‌ارز T هستند.)

نکته ۵

هم‌ارزی دو شرطی:

گزاره‌ی دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ دقیقاً هنگامی درست است که p و q هر دو درست یا هر دو نادرست باشند.

بنابراین هر دوی $p\Rightarrow q$ و $q\Rightarrow p$ هم درست خواهند بود و در نتیجه:

$$p\Leftrightarrow q\equiv(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow p)$$

بعلاوه:

به آسانی می‌توان دید که ترکیب دو شرطی $p\Leftrightarrow q$ با گزاره‌های $\sim p\Leftrightarrow\sim q$ و $q\Leftrightarrow p$ نیز هم‌ارز است.

کدام یک از گزاره‌های زیر با $\sim p\Leftrightarrow q$ هم‌ارز منطقی نیست؟ **(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)**

❶ $\sim q\Leftrightarrow\sim p$ ❷ $p\Leftrightarrow\sim q$ ❸ $\sim q\Leftrightarrow p$ ❹ $q\Leftrightarrow\sim p$

گزینه ۱

پاسخ با توجه به دو مورد زیر:

۱) $q\Leftrightarrow p$ و $p\Leftrightarrow q$ به لحاظ ارزشی تفاوتی ندارند. (رد گزینه ۳)

۲) هم‌ارزی $p\Leftrightarrow q\equiv\sim p\Leftrightarrow\sim q$ برقرار است. (رد گزینه‌های ۲ و ۴)

در نتیجه:

گزینه‌ی اول با $\sim p\Leftrightarrow q$ هم‌ارز نیست!

توجه کنید:

برای تشخیص هم‌ارز بودن گزاره‌ها با هم، چنان‌که تاکنون دیده‌اید، لازم است:

- به هم‌ارزی‌های بدیهی توجه کرده و آن‌ها را در صورت وجود، به‌کار ببرید.
- در صورت امکان، قوانین بالا را به صورت مناسب به‌کار ببرید.

اگر روش‌های بالا غیرممکن یا زمان کافی نبود؛

تکنیک بسیار مفید زیر وجود دارد:

نکته ۶

مقدارگذاری:

- در گزاره مرکب داده شده، جای گزاره‌های ساده «د» یا «ن» قرار داده و ارزش کل گزاره را تعیین کنید.
- همان مقادیر را در گزینه‌ها نیز قرار داده و هر گزاره‌ای که ارزش متفاوت با جواب مرحله‌ی قبل داشت، رد می‌شود.
- در صورت لزوم، مقادیر «د» و «ن» گزاره‌ها را تغییر داده تا فقط یک گزینه باقی بماند.

توجه کنید:

هنگام جایگذاری گزاره‌ها، باید پرانتزها (و در کل ترتیب محاسبات) دقیقاً رعایت شوند.

گزاره‌ی $(p \Rightarrow q) \wedge (p \vee q)$ هم‌ارز کدام است؟

❶ p ❷ $\sim p$ ❸ $\sim q$ ❹ q

گزینه ۴

روش اول:

استفاده از قوانین به ترتیب: «تبدیل به فصلی» – «فاکتورگیری» – «ساده سازی بدیهی»:

$$(\sim p \vee q) \wedge (p \vee q) \equiv (\underbrace{\sim p \wedge p}_{F}) \vee q \equiv F \vee q \equiv q$$

روش دوم: «مقدار گذاری»

اگر هر دوی p و q را «د» قرار دهیم، گزاره‌ی سؤال:

$(د \Rightarrow د) \wedge (د \vee د)$: درست $\rightarrow$ **رد گزینه‌های ۲ و ۳**

برای انتخاب بین گزینه‌های اول و چهارم، p را «د» و q را «ن» قرار می‌دهیم:

$(د \Rightarrow ن) \wedge (ن \vee د)$: نادرست $\rightarrow$ **رد گزینه‌ی ۱**

کدام مورد در خصوص ارزش گزاره‌ی $(p \wedge \sim q) \Rightarrow q$ درست است؟ **(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)**

❶ هم‌ارز $p \Rightarrow q$ است.
❷ همواره نادرست است.
❸ همواره درست است.
❹ هم‌ارز $p \Rightarrow \sim q$ است.

گزینه ۱

به آسانی می‌توان حالت‌های گوناگون را بررسی کرد، می‌بینید ارزش آن دقیقاً مانند $p \Rightarrow q$ است:

۱) اگر p نادرست باشد، گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم درست است.

۲) اگر p درست باشد؛

- در صورت درستی q، گزاره‌ی $p \wedge \sim q$ نادرست شده و باز هم گزاره‌ی شرطی به انتفای مقدم درست است.
- اگر q نادرست باشد، این بار $p \wedge \sim q$ درست و در نتیجه گزاره‌ی شرطی نادرست است.

توجه کنید:

استفاده از قوانین هم البته دشوار نیست:

$$(p \wedge \sim q) \Rightarrow q \equiv \sim (p \wedge \sim q) \vee q \equiv (\sim p \vee q) \vee q \equiv \sim p \vee \underbrace{q \vee q}_{q} \equiv \sim p \vee q \equiv p \Rightarrow q$$

کدام گزاره، هم‌ارز منطقی گزاره‌ی $\sim [((q \vee r) \Rightarrow (q \wedge r)) \Rightarrow p]$ است؟ **(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)**

❶ $p \wedge ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
❷ $\sim p \vee ((q \wedge r) \vee (\sim q \wedge \sim r))$
❸ $(\sim p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$
❹ $(p \wedge q \wedge r) \vee (\sim p \wedge \sim q \wedge \sim r)$

گزینه ۳

به روش مقدار گذاری، اگر هر سه‌ی p، q و r را درست بگیریم، گزاره‌ی داده شده $\sim (T)$، یعنی نادرست خواهد شد.

بررسی گزینه‌ها:

گزینه ۱) چون $q \wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $T \wedge (T \vee F)$ بوده که درست است. (رد گزینه)

گزینه ۲) مجدداً چون $q \wedge r$ درست است، ارزش کل گزاره $F \vee (T \vee F)$ بوده و درست است. (رد گزینه)

گزینه ۳) هر دو پرانتز نادرست هستند و در نتیجه ارزش کل گزاره نیز نادرست است.

گزینه ۴) واضح است که ارزش کل گزاره به صورت $T \vee F$ بوده و درست است. (رد گزینه)

بنابراین فقط گزینه‌ی سوم می‌تواند صحیح باشد.

کدام گزاره‌ی زیر با **T** هم‌ارز است؟ **(یعنی همیشه درست است.)**

❶ $q \wedge (p \Rightarrow \sim p)$
❷ $p \Rightarrow (p \vee q)$
❸ $q \Rightarrow (p \wedge q)$
❹ $p \Rightarrow \sim q$

گزینه ۲

با قدری دقت می‌بینید که غیر از گزینه‌ی دوم، سایر گزینه‌ها گاهی نادرست هم هستند.

- **گزینه ۱:** اگر p و q هر دو «د» باشند، گزاره‌ی $p \Rightarrow \sim q$ نادرست است.
- **گزینه ۳:** اگر p «ن» و q «د» باشد، گزاره‌ی $q \Rightarrow (p \wedge q)$ نادرست است.
- **گزینه ۴:** اگر q «ن» باشد، گزاره‌ی $q \wedge (p \Rightarrow \sim p)$ نادرست است.

کدام گزاره همواره درست است؟

❶ $(\sim p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim q)$
❷ $p \Leftrightarrow (p \wedge (\sim q \Rightarrow p))$
❸ $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (q \Rightarrow p)$
❹ $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$

گزینه ۲ ☑

اگر p را «ن» و q را «د» قرار دهیم:

گزینه‌های اول و سوم هر دو به صورت (ن $\Leftrightarrow$ د) تبدیل شده، هر دو نادرست و رد می‌شوند.

اکنون اگر هر دوی p و q را «ن» قرار دهیم، گزینه‌ی چهارم:

رد گزینه‌ی ۴ $\rightarrow$ **نادرست** : ن $\Rightarrow$ (ن $\Rightarrow$ ن)

اگر p ، q و r هر سه نادرست باشند، کدام گزاره‌ها هم‌ارزش است؟

❶ $(r \Leftrightarrow q) \Rightarrow (p \vee r)$ و $\sim (p \vee q)$
❷ $\sim (p \vee r) \Rightarrow (\sim q \Leftrightarrow r)$ و $\sim r \vee q$
❸ $(p \vee \sim r) \Leftrightarrow (q \Rightarrow \sim r)$ و $r \wedge p$
❹ $(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q)$ و $r \vee q$

گزینه ۴ ☑

باید هر کدام از گزینه‌ها جایگذاری شوند. فقط در مورد آخر هر دو گزاره نادرست هستند:

$$(\sim q \vee r) \Leftrightarrow (r \wedge q) \equiv \underbrace{(T \vee F)}_{T} \Leftrightarrow \underbrace{(F \wedge F)}_{F} \equiv T \Leftrightarrow F \equiv F \quad \text{و} \quad r \vee q \equiv F \vee F \equiv F$$

اگر گزاره‌های q و $\sim p \Rightarrow q$ هر دو $p \Rightarrow q$ درست باشند، آنگاه کدام گزاره‌ی زیر همواره درست است؟ **(کنکور ۱۴۰۰)**

❶ $q \vee p \Rightarrow q$
❷ $q \vee p \Rightarrow p$
❸ $p \wedge \sim q$
❹ $q \vee p \Rightarrow p \wedge q$

گزینه ۱ ☑

از فرضیات فهمیده می‌شود:

گزاره‌ی q حتماً درست بوده، در غیر این‌صورت یکی از $p \Rightarrow q$ یا $\sim p \Rightarrow q$ حتماً نادرست خواهد شد.

بنابراین واضح است که:

گزاره‌ی $q \vee p \Rightarrow q$ همواره درست خواهد بود.

در ادامه، نمونه‌های بیشتری از بخش استدلال ریاضی خواهیم دید. در تبدیل عبارات به بیان ریاضی:

به واژه‌ها توجه داشته و ترتیب آمدن آن‌ها را دقیقاً رعایت کنید.

نماد ریاضی عبارت‌های کلامی «مجموع جذر هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» و «جذر مجموع هر عدد و مجذورش از خود عدد بزرگ‌تر است.» به ترتیب کدام است؟

❶ $\sqrt{x+\sqrt{x}} > x$ و $\sqrt{x}+x^2 > x$
❷ $\sqrt{x}+\sqrt{\sqrt{x}} > x$ و $\sqrt{x}+x > \sqrt{x}$
❸ $\sqrt{x+x^2} > x$ و $\sqrt{x}+x^2 > x$
❹ $\sqrt{x}+x^2 > x$ و $\sqrt{x+\sqrt{x}} > x$

گزینه ۳

چون جذر عدد: $\sqrt{x}$، مجذور آن: $x^۲$ و خودش: x است. بعلاوه:

مجموع جذر عدد و مجذور: $\sqrt{x}+x^۲$ و جذر مجموع عدد و مجذور: $\sqrt{x+x^۲}$

نماد ریاضی عبارت «مکعب ثلث تفاضل دو عدد کوچک‌تر از جذر تفاضل مربعات همان دو عدد نیست.» کدام است؟

❶ $(\frac{a-b}{۳})^۳ \geq \sqrt{(a-b)^۲}$

❷ $(\frac{a-b}{۳})^۳ \geq \sqrt{a^۲-b^۲}$

❸ $(\frac{a-b}{۳})^۳ > \sqrt{a^۲-b^۲}$

❹ $(\frac{a-b}{۳})^۳ > \sqrt{(a-b)^۲}$

گزینه ۲

توجه کنید:

کوچک‌تر نیست: «$\not<$» **به** «$\geq$» **تبدیل می‌شود.**

مکعب یعنی: **توان سه**، ثلث یعنی: **تقسیم بر سه** و تفاضل یعنی: $a-b$. پخش اول: $(\frac{a-b}{۳})^۳$

و:

تفاضل یعنی: $a-b$ و جذر همان **رادیکال** است. پخش دوم: $\sqrt{a^۲-b^۲}$

کدام مورد یک قیاس استثنایی است؟

❶ **مقدمه ۱:** اگر باران ببارد، آنگاه به سینما نمی‌رویم.
مقدمه ۲: ما به سینما نمی‌رویم.
∴ باران باریده است.

❷ **مقدمه ۱:** اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، $\hat{A}=۶۰^\circ$ است.
مقدمه ۲: در مثلث MBC داریم: $\hat{B}=۶۰^\circ$
∴ مثلث MBC متساوی‌الاضلاع است.

❸ **مقدمه ۱:** اگر فردا عید باشد، آنگاه مدرسه تعطیل است.
مقدمه ۲: فردا مدرسه تعطیل است.
∴ فردا عید فطر است.

❹ **مقدمه ۱:** اگر بارندگی کم شود، آنگاه کشاورزی از رونق می‌افتد.
مقدمه ۲: امسال بارندگی کم است.
∴ کشاورزی از رونق می‌افتد.

گزینه ۴

فقط مورد چهارم مطابق ساختار قیاس استثنایی است:

$$\begin{array}{l} p \Rightarrow q \\ p \\ \hline \therefore\ q \end{array}$$

نمونه‌هایی از بررسی خطاهای استدلال ببینید:

اگر A مغالطه و B قیاس استثنایی باشد، **مقدمه‌ی ۲** برای A و نتیجه‌ی B به ترتیب کدام است؟

A

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه امروز مدرسه تعطیل است.

مقدمه ۲: .....

∴ .....

B

مقدمه ۱: اگر a فرد و b اول باشد، آنگاه $a+b$ زوج است.

مقدمه ۲: .....

∴ .....

❶ امروز جمعه است. - a زوج و b اول نیست.

❷ امروز تعطیل است. - $a+b$ فرد است.

❸ امروز تعطیل است. - $a+b$ زوج است.

❹ امروز جمعه است. - $a+b$ زوج است.

گزینه ۳

طبق مفاهیم قیاس استثنایی و مغالطه، فقط مورد سوم صحیح است.

در مورد استدلال زیر، کدام گزینه درست است؟

مقدمه ۱: اگر a و b اعداد اول دو رقمی باشند، آنگاه $ab+1$ عددی زوج است.

مقدمه ۲: $۲۱\times۲۳+1=۴۸۴$

∴ ۲۱ عددی اول است.

❶ قیاس استثنایی است.

❷ یک مغالطه است.

❸ عکس نقیض گزاره‌ی شرطی است.

❹ مقدمات ۱ و ۲ طبق قیاس استثنایی هستند، فقط نتیجه نادرست نوشته شده است.

گزینه ۲

واضح است که یک مغالطه انجام شده است.

در اثبات ادعای «اگر ضرایب b و c در معادله‌ی $ax^۲+bx+c=۰$ دو برابر شوند، جواب‌ها نیز دو برابر می‌شوند.» خطای محاسباتی در کدام مرحله رخ داده است؟ (ریشه‌های معادله‌ی بالا $x_1, x_۲ = \frac{-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$ هستند.)

مرحله ۱: ریشه‌های جدید: $x'_1, x'_۲ = \frac{-b'\pm\sqrt{b'^۲-۴ac'}}{۲a}$

مرحله ۲: $x'_1, x'_۲ = \frac{-۲b\pm\sqrt{(۲b)^۲-۴a(۲c)}}{۲a}$

مرحله ۳: $x'_1, x'_۲ = \frac{-۲b\pm\sqrt{۴b^۲-۲(۴ac)}}{۲a}$

مرحله ۴: $x'_1, x'_۲ = \frac{-۲b\pm۲\sqrt{b^۲-۴ac}}{۲a}$

مرحله ۵: $x'_1, x'_۲ = \frac{۲(-b\pm\sqrt{b^۲-۴ac})}{۲a}$

مرحله ۶: $x'_1, x'_۲ = ۲(x_1, x_۲)$

❶ ۵ ❷ ۴ ❸ ۳ ❹ ۶

گزینه ۲

خطا در مرحله‌ی چهارم رخ داده، زیرا:

$$\frac{-۲b \pm \sqrt{۴b^۲ - ۲(۴ac)}}{۲a} = \frac{-۲b \pm \sqrt{۴(b^۲ - ۲ac)}}{۲a} = \frac{-۲b \pm ۲\sqrt{b^۲ - ۲ac}}{۲a}$$

در کدام گزینه خطای محاسباتی وجود ندارد؟

❶ $x < y \rightarrow -۲ + x > -۲ + y$

❷ $x^۲ + ۱۶ = ۰ \rightarrow x = \pm ۴$

❸ $\sqrt{a^۲ - ۱۰a + ۲۵} = |a - ۵|$

❹ $x < y \rightarrow -۲x < -۲y$

گزینه ۳

خطاهای رخ داده چنین هستند:

- در گزینه (۱) با جمع دو طرف با -۲ جهت تغییر نمی‌کند.
- در گزینه (۲) معادله به صورت $x^۲ = -۱۶$ بوده و جواب ندارد.
- در گزینه (٤) با ضرب دو طرف در -۲ باید جهت تغییر کند.

ولی مورد سوم طبق خاصیت $\sqrt{a^۲} = |a|$ صحیح نوشته شده است:

$$\sqrt{a^۲ - ۱۰a + ۲۵} = \sqrt{(a-۵)^۲} = |a - ۵|$$

توجه کنید:

یکی از رایج‌ترین اشتباهات محاسباتی، تقسیم طرفین تساوی بر یک عبارت متغیر (مثلاً بر حسب x) است؛ زیرا:

«آن عبارت به ازای برخی عددها جای x ممکن است صفر شود و می‌دانیم تقسیم بر صفر بی‌معنی است!»

بنابراین:

تقسیم طرفین تساوی فقط بر یک عدد غیرصفر یا عبارتی که هیچ‌گاه صفر نمی‌شود، مجاز است. (مانند: $x^۲ + ۱$)

نمونه‌هایی ببینید.

دانش آموزی معادله‌ی «$x - ۲ = ۲$» را با استدلال زیر حل کرده است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟

(نوبت ۱- کنکور ۱٤۰٤)

مرحله ۱: $(x-۲)(x-۵) = ۲(x-۵)$

مرحله ۲: $x^۲ - ۷x + ۱۰ = ۲x - ۱۰$

مرحله ۳: $(x^۲ - ۷x + ۱۰) - (x-۶) = (۲x - ۱۰) - (x-۶)$

مرحله ۴: $x^۲ - ۸x + ۱۶ = x - ۴$

مرحله ۵: $\frac{(x-۴)^۴}{x-۴} = \frac{x-۴}{x-۴}$

مرحله ۶: $x - ۴ = ۱$

مرحله ۷: $x = ۵$

❶ ۱ ❷ ۵ ❸ ۳ ❹ ۶

گزینه ۲

با دنبال کردن مراحل، می‌بینید که محاسبات درست انجام شده است؛ فقط:

چنان‌که گفته‌ایم، تقسیم بر عبارت $x-۴$ در مرحله‌ی پنجم مجاز نیست.

دومین خطای محاسباتیِ حل معادله‌ی $۲x^۳=۴x$ در کدام مرحله رخ داده است؟

مرحله ۱: $۲x^۳-۴x=۰$ — مرحله ۲: $۲x(x^۲-۲)=۰$ — مرحله ۳: $\frac{۲x(x^۲-۲)}{۲x}=\frac{۰}{۲x}$

مرحله ۴: $x^۲-۲=۰$ — مرحله ۵: $x^۲=۲$ — مرحله ۶: $x=\sqrt{۲}\ ,\ x=-۲$

❶ ۵ ❷ ۴ ❸ ۶ ❹ ۳

گزینه ۳

اولین خطا در مرحله‌ی سوم است؛ (تقسیم تساوی بر $۲x$، چون اگر $x=۰$ باشد، حق تقسیم کردن نداریم.) خطای دوم در مرحله‌ی ششم است. زیرا:

$$x^۲=۲ \Rightarrow \begin{cases} x=\sqrt{۲} \\ x=-\sqrt{۲} \end{cases}$$

دانش‌آموزی با توجه به تساوی $\frac{a-d}{a}=\frac{d-c}{c}$ برای محاسبه‌ی d، استدلال زیر را ارائه داده است. ایراد این استدلال (در صورت وجود) در کدام گام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

مرحله ۱: $\frac{a-d}{a}=\frac{d-c}{c}$ — مرحله ۲: $c(a-d)=a(d-c)$

مرحله ۳: $ac+ac=ad+cd$ — مرحله ۴: $۲ac=(a+c)d$ — مرحله ۵: $d=\frac{۲ac}{a+c}$

❶ دوم ❷ چهارم

❸ پنجم ❹ استدلال فاقد ایراد است.

گزینه ۴

با دنبال کردن مراحل، می‌بینید محاسبات همگی به درستی انجام شده‌اند؛ فقط در مرحله پنجم:

«تقسیم دو طرف بر عبارت $a+c$ انجام شده است.»

باید ببینیم آیا $a+c$ ممکن است صفر شود؛ اگر چنین باشد:

$$a+c=۰ \rightarrow c=-a \xrightarrow{\frac{a-d}{a}=\frac{d-c}{c}} \frac{a-d}{a}=\underbrace{\frac{d-c}{-a}}_{=\frac{c-d}{a}} \rightarrow a-d=c-d \Rightarrow a=c$$

یعنی باید هر دوی a و c برابر صفر باشند که با توجه به تساوی $\frac{a-d}{a}=\frac{d-c}{c}$، چنین چیزی ممکن نیست.

در نتیجه:

$a+c$ غیر صفر بوده و تقسیم در مرحله ۵ بدون اشکال است.

با چیدن قطعات یک پازل در کنار هم، مربعی به مساحت a ساخته می‌شود. این پازل طوری طراحی شده است که با تغییر چینش بعضی قطعات آن می‌توان یک مثلث قائم‌الزاویه به مساحت b نیز درست کرد. دانش‌آموزی استدلال زیر را در مورد رابطه‌ی بین a و b نوشته است. ایراد این استدلال در کدام گام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

۱) $a=b$

۲) $a^۲=ab$ ..... طرفین تساوی گام ۱ را در a ضرب کرده است

۳) $a^۲-b^۲=ab-b^۲$ ..... $b^۲$ را از طرفین تساوی گام ۲ کم کرده است

۴) $(a-b)(a+b)=(a-b)b$ ..... طرفین تساوی گام ۳ را تجزیه کرده است

۵) $\frac{(a-b)(a+b)}{(a-b)}=\frac{(a-b)b}{(a-b)}$ ..... طرفین تساوی گام ۴ را بر $a-b$ تقسیم کرده است

۶) $b+b=b$ ..... به جای a طبق گام ۱، مقدار b را قرار داده است

۷) $\frac{۲b}{b}=\frac{b}{b}$ ..... طرفین تساوی گام ۷ را بر b تقسیم کرده است

۸) $۲=۱$

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۷ ❹ ۲۸

گزینه ۲

چون $a=b$ است، پس $a-b=۰$ بوده و بنابراین حق ساده کردن آن در صورت و مخرج را نداریم.

TEST تمرین تست

۱ کدام مورد نادرست است؟

❶ هر گزاره‌ی شرطی، با عکس نقیض خود هم‌ارز است.

❷ نقیض ترکیب فصلی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب عطفی نقیض آن‌ها است.

❸ نقیض ترکیب دوشرطی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب دوشرطی نقیض آن‌ها است.

❹ نقیض ترکیب عطفی دو گزاره، هم‌ارز ترکیب فصلی نقیض آن‌ها است.

۲ خطای حل معادله‌ی $۲x^۳ = ۴x$ در کدام مرحله رخ داده است؟ ($x \neq ۰$)

مرحله ۱: $۲x^۳ - ۴x = ۰$ — مرحله ۲: $۲x(x^۲ - ۲) = ۰$ — مرحله ۳: $\frac{۲x(x^۲-۲)}{۲x} = \frac{۰}{۲x}$

مرحله ۴: $x^۲ - ۲ = ۰$ — مرحله ۵: $x^۲ = ۲$ — مرحله ۶: $x = \sqrt{۲}$

❶ ۵ ❷ ۴ ❸ ۶ ❹ ۳

۳ عکس نقیض گزاره‌ی «اگر a عددی گنگ یا گویا باشد، آنگاه مربع عدد فرد b، عددی فرد است.» کدام است؟

❶ اگر مربع عدد فرد b، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنگ یا گویا نیست.

❷ اگر مربع عدد فرد b، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنگ یا گویا است.

❸ اگر مربع عدد فرد b، عددی فرد باشد، آنگاه a عددی گنگ و گویا است.

❹ اگر مربع عدد فرد b، عددی زوج باشد، آنگاه a عددی گنگ و گویا نیست.

۴ گزاره‌ی «اگر تیم A قهرمان نشود، شخص a ناراحت نخواهد شد.» نادرست است. پس:

❶ تیم A قهرمان شده و a ناراحت است.

❷ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت است.

❸ تیم A قهرمان نشده و a ناراحت نیست.

❹ تیم A قهرمان شده و a ناراحت نیست.

۵ هم‌ارز گزاره‌ی $(q \Rightarrow p) \wedge (p \vee q)$ کدام است؟

❶ p ❷ $\sim p$ ❸ $\sim q$ ❹ q

۶ کدام‌یک از گزاره‌های زیر همواره صحیح است؟

❶ $p \Leftrightarrow (p \vee \sim p)$ ❷ $p \Rightarrow (\sim p \Rightarrow p)$ ❸ $p \Rightarrow (p \Leftrightarrow \sim p)$ ❹ $p \Rightarrow (p \wedge \sim p)$

۷ اگر p و q دو گزاره‌ی دلخواه باشند، در این صورت چه تعداد از هم ارزی‌های زیر به درستی نوشته شده است؟

الف) $(\sim p \wedge p) \equiv \mathbf{F}$

ب) $(\sim q \vee q) \equiv \mathbf{F}$

پ) $\sim(\sim p \vee q) \equiv (p \vee \sim q)$

ت) $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim p \vee q)$

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

۸ هم گزاره‌ی $p \wedge (q \vee r)$ کدام است؟

❶ $p \wedge (q \wedge r)$ ❷ $(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ ❸ $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$ ❹ $p \vee (q \vee r)$

۹ هم گزاره‌ی $(p \Rightarrow r) \wedge (q \Rightarrow r)$ کدام است؟

❶ $r \Rightarrow (p \vee q)$ ❷ $(p \vee q) \Rightarrow r$ ❸ $r \Rightarrow (p \wedge q)$ ❹ $(p \wedge q) \Rightarrow r$

۱۰ اگر p و q دو گزاره‌ی درست و r نادرست باشد، کدام مورد صحیح است؟

❶ $(p \vee \sim q) \wedge r \equiv \sim r$
❷ $\sim r \Rightarrow (q \wedge r) \equiv p \Leftrightarrow q$
❸ $(\sim r \vee \sim q) \Rightarrow (r \Rightarrow q) \equiv \mathbf{T}$
❹ $(q \wedge \sim r) \Leftrightarrow (q \wedge p) \equiv \mathbf{F}$

۱۱ نماد ریاضی کدام عبارت به صورت $۲(\frac{x}{۳} - \frac{x}{۴}) = \frac{۵۰}{۱۰۰}\sqrt{x} + ۳$ است؟

❶ دو سوم عددی منهای نصف آن، از نصف مجذور آن عدد ۳ واحد بیشتر است.
❷ اختلاف ثلث و ربع عددی، از پنجاه درصد جذر آن عدد، ۳ واحد بیشتر است.
❸ دو برابر تفاضل ربع عددی از ثلث آن، ۳ واحد بیشتر از پنجاه درصد از جذر آن عدد است.
❹ ثلث عددی منهای ربع آن عدد، از ربع جذر آن عدد ۳ واحد بیشتر است.

۱۲ در کدام گزینه، بیان نمادین نادرست است؟

❶ مجموع ثلث و ربع عددی، سه واحد از آن عدد کمتر است: $\frac{x}{۳} + \frac{x}{۴} = x - ۳$
❷ مربع مجموع دو عدد بزرگ‌تر از مجموع مربعات آن دو عدد است: $x^۲ + y^۲ > (x+y)^۲$
❸ مکعب هر عددی بزرگ‌تر از مربع آن عدد است: $x^۳ > x^۲$
❹ مجموع معکوس‌های دو عدد ناصفر، کوچک‌تر از معکوس مجموع آن دو عدد است: $\frac{۱}{x} + \frac{۱}{y} < \frac{۱}{x+y}$

۱۳ در مورد استدلال زیر، کدام مورد نادرست است؟

مقدمه ۱: اگر دو عدد فرد باشند، آنگاه ab عددی فرد است.
مقدمه ۲: $a \times b = ۳۲۳$
$\therefore$ .....

❶ روش بکار رفته نادرست است.
❷ یک مغالطه است.
❸ نتیجه‌ی استدلال: a و b هر دو فرد هستند.
❹ نتیجه‌ی استدلال بالا همیشه نادرست است.

۱۴ در کدام گزینه، خطای محاسباتی وجود ندارد؟

❶ $a > b \Rightarrow -۲a > -۲b$
❷ $(x-۳)^۲ = ۲۵ \Rightarrow \begin{cases} x = ۲ \\ x = ۸ \end{cases}$
❸ $\frac{۳x+y}{y} = ۳x$
❹ $a > b \overset{k<۰}{\Rightarrow} a + k > b + k$

۱۵ گزاره‌ی $(p \Rightarrow \sim q) \Rightarrow q$ با کدام‌یک هم‌ارز است؟

❶ $\sim p$ ❷ p ❸ q ❹ $\sim q$

۱۶ بیان ریاضی گزاره‌ی زیر کدام است؟

(مجذور مجموع عددهای مثبت a و b از نصف جذر مجموع آن‌ها، کوچک‌تر نیست.) $\sim$

❶ $\sqrt{a+b} > \frac{(a+b)^۲}{۲}$ $(a>۰, b>۰)$

❷ $\frac{\sqrt{a+b}}{۲} \leq (a+b)^۲$ $(a>۰, b>۰)$

❸ $\frac{\sqrt{a+b}}{۲} > (a+b)^۲$ $(a>۰, b>۰)$

❹ $a^۲+b^۲ < \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{۲}$ $(a>۰, b>۰)$

۱۷ در مورد استدلال‌های زیر، کدام بیان درست است؟

A

مقدمه ۱: اگر امروز جمعه است، آنگاه مدرسه تعطیل است.

مقدمه ۲: امروز مدرسه تعطیل است.

$\therefore$ امروز جمعه است.

B

مقدمه ۱: اگر دانش‌آموزی کلاس یازدهم باشد، آنگاه رشته‌ی او انسانی است.

مقدمه ۲: مهناز دانش‌آموز کلاس یازدهم است.

$\therefore$ رشته‌ی تحصیلی مهناز علوم انسانی است.

❶ A قیاس استثنایی و B مغالطه است.

❷ B قیاس استثنایی و A مغالطه است.

❸ هر دو قیاس استثنایی هستند.

❹ هر دو مغالطه هستند.

۱۸ چند مورد زیر نقیض گزاره‌ی «p عددی اول است.» را درست بیان کرده است؟

۱: p عددی زوج است.

۲: p عددی مرکب است.

۳: p عددی اول نیست.

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۱۹ ارزش گزاره‌ی $[p \vee (\sim p \wedge \sim q)] \vee q$ کدام است؟

❶ $\sim F$ ❷ $q \vee F$ ❸ $q \wedge T$ ❹ $p \vee T$

۲۰ چند مورد از هم ارزی‌های زیر برقرار است؟

۱: $\sim p \wedge \sim (\sim p) \equiv T$

۲: $p \wedge \sim (\sim T) \equiv T$

۳: $\sim p \vee (\sim F) \equiv T$

۴: $p \vee (\sim F) \equiv \sim p$

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۱ با توجه به گزاره‌های زیر، نقیض گزاره‌ی $(\sim p \vee \sim q) \wedge r$ هم‌ارزش کدام گزاره است؟

p: میانه و میانگین داده‌های آماری همیشه یکتا هستند.

q: نمودار حبابی را می‌توان برای بیش از دو متغیر به‌کار برد.

r: در داده‌های آماری: ۹۱،۸۷،۱۹،۹۵،۸۴، مرکزیت داده‌ها با میانه تعیین می‌شود.

❶ $\sim F$ ❷ $p \vee F$ ❸ r ❹ $\sim(\sim q)$

۲۲ گزاره‌ی $\sim(p \wedge q) \wedge (q \vee p)$ با چه تعداد گزاره در زیر هم‌ارز است؟

۱: $\sim p$ ۲: $\sim p \vee q$ ۳: $p \vee \sim q$

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

۲۳ اگر p گزاره‌ای . . . . و q گزاره‌ای دلخواه و r گزاره‌ای . . . . . باشد، گزاره‌ی $(q \wedge \sim r) \wedge (q \Rightarrow p)$ دارای ارزش . . . . است.

❶ دلخواه- نادرست- نادرست
❷ نادرست- دلخواه- درست
❸ درست- درست- درست
❹ دلخواه- درست- نادرست

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴