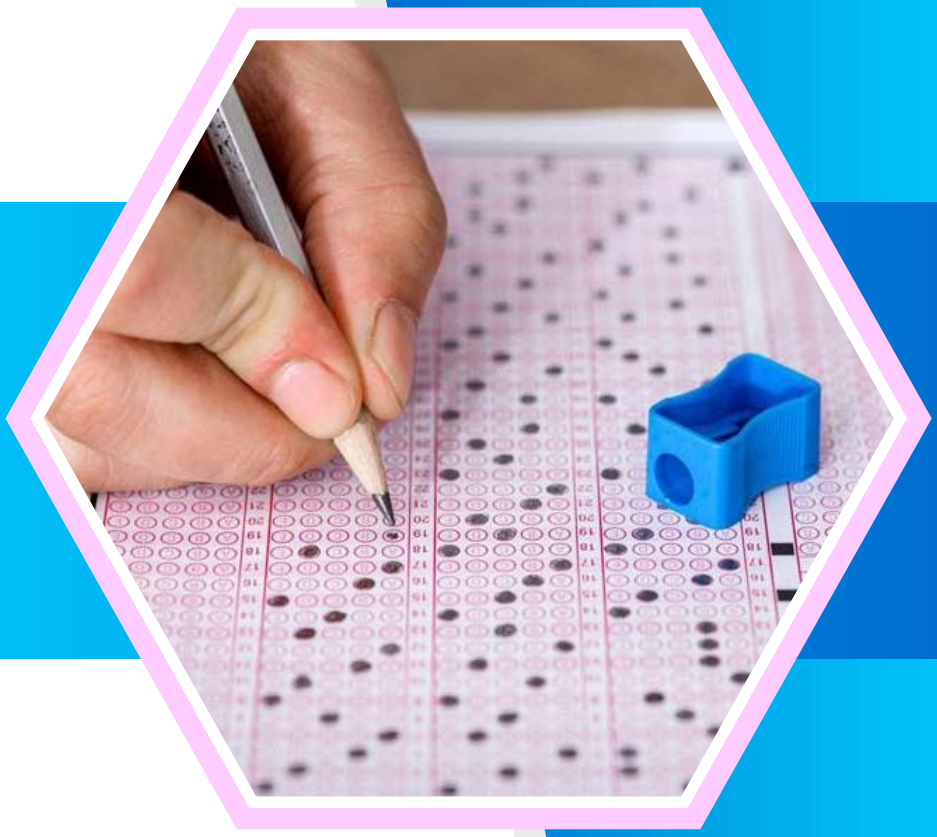
درسنامه ریاضیات انسانی

نمونه آموزش:

ریاضی و آمار (۳)



Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

جزئیات این مجموعه

توجه:

این محتوا، شامل آموزش تشریحی (نهایی) و همچنین ریاضیات کنکور رشته انسانی در یک مجموعه، البته به صورت تفکیک شده است.



پوشش سؤالات امتحانی (نهایی)، آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها

Up to date

فهرست

۱ **شمارش** — اصل‌های شمارش، جایگشت، ترتیب و ترکیب — ۲

۲ **احتمال** — مفاهیم احتمال، محاسبات و قوانین احتمال — ۳۸

۳ **چرخه آمار** — مقدمه ضروری، چرخه آمار و گام‌های چرخه آمار — ۷۳

۴ **مدل‌سازی و دنباله** — مدل‌سازی با توابع، دنباله با ضابطه و بازگشتی — ۱۰۵

۵ **دنباله حسابی** — معرفی، جمله عمومی و خواص، مجموع جملات — ۱۳۲

۶ **دنباله هندسی** — معرفی، جمله عمومی و خواص، مجموع جملات — ۱۵۹

۷ **ریشه و توان گویا** — ریشه دوم و مرتبه بالاتر، توان گویا و ساده‌سازی — ۱۸۵

۸ **تابع نمایی و کاربرد** — تابع نمایی، کاربرد در مسائل رشد و زوال — ۲۱۵

تشریحی& کنکور

ریاضی و آمار ۳



۱

شمارش

فهرست	صفحه
■ اصل‌های شمارش	۳
■ جایگشت اشیاء	۱۲
■ ترکیب اشیاء	۱۶
■ ویژه کنکور	۲۱
■ تمرینِ تست	۳۴

۱ اصل‌های شمارش

شمارش تعداد حالت‌های ممکن برای انجام یک کار، دارای کاربردهای گوناگون است. این نوع محاسبات، بر مبنای دو اصل زیر صورت می‌گیرد:

اصل جمع:
فرض کنید یک کار A به m روش و کار دیگری چون B به n روش مختلف قابل انجام باشد. اگر بخواهیم یکی از کارهای A **یا** B را انجام دهیم:
این کار به $m+n$ طریق مختلف قابل انجام است.

برای نمونه؛
اگر در یک فروشگاه، ۲ مدل کفش (مثلاً: A و B) و ۳ مدل کیف (مثلاً: X، Y و Z) مورد پسند شما واقع شود و بخواهید یک کفش یا یک کیف بخرید، تعداد $۲+۳=۵$ انتخاب خواهید داشت:

$$A \text{ یا } B \text{ یا } X \text{ یا } Y \text{ یا } Z$$

اصل دوم معمولاً کاربرد بیشتری در شمارش تعداد روش‌ها دارد:

اصل ضرب:
فرض کنید کار A به m روش گوناگون قابل انجام بوده و برای هر یک از این m روش، کار دیگری چون B به n روش مختلف قابل انجام باشد. اگر بخواهیم کارهای A **و** B را همزمان انجام دهیم:
این کار به $m\times n$ طریق مختلف قابل انجام است.

(بنابراین: رابط «**یا**» به **جمع** تعداد حالت‌ها و رابط «**و**» به **ضرب** تعداد حالت‌ها مرتبط است!)

برای نمونه؛
اگر مانند قبل، ۲ مدل کفش A و B و ۳ مدل کیف X، Y و Z مورد پسند واقع شود و بخواهید یک کفش و یک کیف بخرید، تعداد $۲\times۳=۶$ انتخاب خواهید داشت:

$$(X \text{ و } A)\quad (Y \text{ و } A)\quad (Z \text{ و } A)\quad (X \text{ و } B)\quad (Y \text{ و } B)\quad (Z \text{ و } B)$$

مثال: به هر مورد زیر پاسخ دهید.
الف) چند حالت برای انتخاب «یک عدد اول یک رقمی» یا «یک عدد دو رقمی مضرب ۱۰» وجود دارد؟
ب) چند حالت در پرتاب دو سکه با هم رخ می‌دهد؟

پاسخ

الف) عددهای اول یک رقمی: ۲، ۳، ۵ و ۷ (۴ مورد) و عددهای دو رقمی مضرب ده: ۱۰، ۲۰، ...، و ۹۰ (۹ مورد).

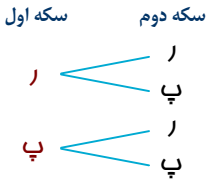
طبق اصل جمع:

$$۴+۹=۱۳$$

ب) هر سکه دو حالت: «ر» و «پ» دارد، طبق اصل ضرب: $۲\times۲=۴$.

توجه کنید:

در پرتاب سکه (و همچنین تاس)، برای درک بهتر، می‌توانید با نمودار درختی حالت‌ها را نمایش دهید. پرتاب دو سکه:



$$\Rightarrow \quad (ر\ ,\ ر),\ (ر\ ,\ پ),\ (پ\ ,\ ر),\ (پ\ ,\ پ)$$

گاهی هر دو اصل در کنار هم به‌کار می‌روند؛ نمونه‌های بعدی را ببینید.

مثال: الف) پرتاب یک سکه و یک تاس با هم چند حالت دارد؟

ب) یک تاس پرتاب می‌شود؛ اگر ۶ بیاید، یک تاس دیگر و در غیر این صورت، دو سکه پرتاب می‌شود. در کل چند حالت رخ می‌دهد؟

پاسخ

الف) سکه دو حالتی و تاس شش حالتی است، طبق اصل ضرب: $۲\times۶=۱۲$.

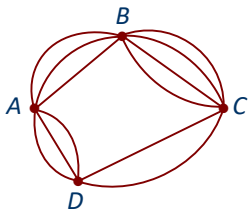
ب) در **حالت (۱)**، تاس اول یک حالتی و تاس دوم شش حالتی است: $۱\times۶=۶$. در **حالت (۲)**، تاس اول پنج حالت و دو سکه بعدی چهار حالت دارند: $۵\times۴=۲۰$. تعداد کل حالت‌ها طبق اصل جمع:

$$۲۰+۶=۲۶$$

(در این مثال هم نمایش حالت‌ها با نمودار درختی دید بهتری به شما خواهد داد.)

مثال: (از متن کتاب)

مطابق شکل، بین چهار شهر مسیرهایی وجود دارد.



الف) به چند روش می‌توان از طریق شهر B، از شهر A به شهر C سفر کرد؟

ب) به چند روش می‌توان از شهر A به شهر C سفر کرد؟

پ) به چند روش می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟

پاسخ

الف) باید از A به B (۳ روش) و سپس از B به C (۴ روش) برویم. طبق اصل ضرب:

تعداد روش‌ها: $۳\times۴=۱۲$

ب) در این مورد باید دو نوع مسیر را در نظر بگیرید:

رفتن از A به C از طریق B: **تعداد** $۳\times۴=۱۲$ **روش**

رفتن از A به C از طریق D: **تعداد** $۳\times۲=۶$ **روش**

طبق اصل جمع:

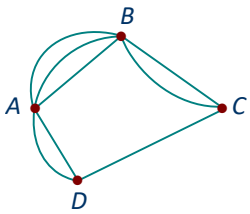
تعداد روش‌ها: $۱۲+۶=۱۸$

پ) مشابه قسمت قبل، کاربرد اصل‌های جمع و ضرب به صورت ترکیبی:

تعداد روش‌ها: $۳\times۳+۴\times۲=۹+۸=۱۷$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

بین چهار شهر A و B و C و D مطابق شکل راه‌هایی وجود دارد. مشخص کنید به چند طریق می‌توان از شهر B به شهر D سفر کرد؟



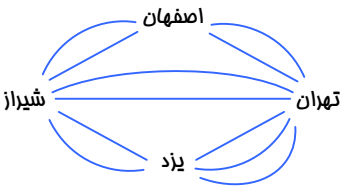
پاسخ

طبق اصل ضرب: مسیر $B\leftarrow A\leftarrow D$ دارای $۳\times۲=۶$ و مسیر $B\leftarrow C\leftarrow D$ دارای $۲\times۱=۲$ راه.

تعداد کل طبق اصل جمع:

$$۶+۲=۸$$

مثال: می‌خواهیم از تهران به شیراز سفر کرده و دوباره به تهران بازگردیم. اگر بخواهیم طبق مسیرهای شکل، حرکت کنیم و مطلع باشیم که یکی از مسیرهای میان یزد و شیراز مسدود شده باشد، به چند روش می‌توان مسافرت را انجام داد؟



پاسخ

سه روش کلی برای رفتن از تهران به شیراز وجود دارد:

از طریق اصفهان: $۲\times۲=۴$ یا **از طریق یزد:** $۳\times۱=۳$ یا **مستقیم:** ۲

پس در کل $۲+۳+۴=۹$ روش برای رفتن وجود دارد. چون به همین تعداد روش برای برگشت وجود دارد، طبق اصل ضرب:

$$۹\times۹=۸۱$$

تعمیم اصل‌ها:

اصل‌های شمارش برای بیش از دو کار نیز به‌طریق مشابه به‌کار می‌روند:

اگر کار اول به $n_۱$ روش، کار دوم به $n_۲$ روش و ... و کار kاُم به n_k روش قابل انجام باشند، آنگاه انجام تمام این کارها با هم به $n_۱\times n_۲\times\cdots\times n_k$ روش مختلف قابل انجام است. (انجام یکی از این کارها به $n_۱+n_۲+\cdots+n_k$ روش انجام می‌شود.) برای نمونه؛

با ارقام غیر صفر و غیر تکراری؛

الف) تعداد $۹\times۸=۷۲$ عدد دو رقمی نوشته می‌شود. (زیرا: ۹ انتخاب برای دهگان و برای غیر تکراری بودن، ۸ انتخاب یکان داریم.)

ب) تعداد $۹\times۸\times۷=۵۰۴$ عدد سه رقمی داریم. (چرا؟!)

مثال: از بین ۴ پیراهن قرمز، ۴ پیراهن آبی و ۲ پیراهن سبز، به چند روش می‌توانیم:

الف) یک پیراهن انتخاب کنیم؟

ب) سه پیراهن (از هر رنگ یکی) انتخاب کنیم؟

پاسخ

الف) چون باید قرمز یا آبی یا سبز انتخاب شود، طبق اصل جمع: $۴+۴+۲=۱۰$

ب) باید سه کار با هم انجام شوند:

یک پیراهن قرمز انتخاب شود. و **یک پیراهن آبی انتخاب شود.** و **یک پیراهن سبز انتخاب شود.**

طبق اصل شمارش ضرب:

$$۴\times۴\times۲=۳۲$$

مثال: به هر مورد زیر پاسخ دهید.

الف) به چند روش می‌توان به طور تصادفی به ده سؤال چهار گزینه‌ای پاسخ داد؟

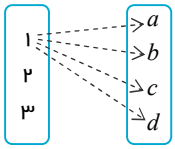
ب) چند تابع از مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳\}$ به مجموعه‌ی $B=\{a,b,c,d\}$ وجود دارد؟

پاسخ

الف) برای هر سؤال ۴ انتخاب داریم و طبق اصل ضرب برای ده سؤال:

$$\underbrace{۴\times۴\times\cdots\times۴}_{\text{۱۰ تا}}=۴^{۱۰}$$

ب) به نمودار ون روبه‌رو نگاه کنید:



چنان‌که می‌بینید، برای عضو ۱ در دامنه، چهار انتخاب a، b، c یا d وجود دارد. برای هر کدام از عضوهای ۲ و ۳ نیز، چهار انتخاب داریم. پس، طبق اصل شمارش ضرب:

$$۴\times۴\times۴=۴^{۳}$$

تذکر: (مهم)

وقتی برای انتخاب‌ها شرط داریم، ابتدا تعداد حالات آن‌ها طبق شرایط را نوشته و سپس بقیه موارد را تعیین می‌کنیم. (مانند جایگاه برخی ارقام یا حروف در نمونه‌های بعدی)

مثال: (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

با ارقام ۳، ۲، ۷، ۹، ۴ و ۸، چند عدد سه رقمی زوج، بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

اصل ضرب به کار می‌رود، زیرا:

باید رقم یکان و رقم دهگان و رقم صدگان انتخاب شوند تا عدد سه رقمی تشکیل گردد.

رقم یکان سه انتخاب ۲، ۴ و ۸ دارد. چون نباید تکرار ارقام رخ دهد، پنج انتخاب برای صدگان و چهار انتخاب هم برای دهگان خواهیم داشت. در نتیجه:

$$۵ \times ۴ \times ۳ = ۶۰$$

مثال: الف) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر صفر وجود دارد؟

ب) چند عدد سه رقمی با ارقام غیر تکراری وجود دارد؟

پاسخ

الف) چون انتخاب یکان و دهگان و صدگان هر کدام ۹ روش دارد:

$$۹ \times ۹ \times ۹ = ۷۲۹$$

ب) در کل ده رقم برای انتخاب وجود دارد؛ ولی:

رقم صدگان نباید صفر قرار گیرد، چون عدد سه رقمی نمی‌شود.

پس صدگان ۹ انتخاب دارد. (انتخاب رقم از ۱ تا ۹) سایر رقم‌ها:

- چون تکرار ارقام مجاز نیست، رقم به‌کار رفته در صدگان نباید در دهگان قرار گیرد. (۹ انتخاب از بین ده رقم ممکن)
- بالاخره، دو رقم به‌کار رفته در صدگان و دهگان نباید در یکان به‌کار روند:

$$۹ \times ۹ \times ۸ = ۶۴۸$$

صدگان ← ۹ ↓ دهگان ← ۸ یکان

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی فرد (بدون تکرار ارقام) می‌توان نوشت؟ **(مشابه نهایی- خرداد ۱۴۰۴)**

پاسخ

مشابه قبل:

۱) رقم یکان: سه انتخاب ۱، ۳ و ۵ دارد. (۳ روش)

۲) رقم سمت راست: رقم ۰ و رقم به‌کار رفته در یکان نمی‌توانند قرار گیرند، چون تکرار ارقام مجاز نیست. (۴ روش)

۳) رقم وسط: غیر از دو رقم به‌کار رفته تا این‌جا، بقیه‌ی ارقام مجاز هستند. (۴ روش)

بنابراین:

$$\underline{۴} \times \underline{۴} \times \underline{۳} = ۴۸$$

رقم فرد ← ۳ ↓ سایر ارقام ← ۴ غیر از ۰ و رقم قرار داده شده در یکان ← ۴

مثال: **(نهایی- خرداد ۱۴۰۳)** با ارقام ۰، ۱، ۷، ۳، ۹ و ۵ چند عدد چهار رقمی و مضرب ۵ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

دو حالت در نظر گرفته و اصل جمع را به‌کار می‌بریم:

۱) رقم یکان ۵ باشد: با توجه به این‌که رقم سمت چپ نمی‌تواند ۰ انتخاب شود:

$$\underline{۴} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۱} = ۴۸$$

۲) رقم یکان ۰ باشد؛ تمام رقم‌های دیگر در سمت چپ مجاز هستند:

$$\underline{۵} \times \underline{۴} \times \underline{۳} \times \underline{۱} = ۶۰$$

تعداد کل:

$$۶۰ + ۴۸ = ۱۰۸$$

روش زیر گاهی باعث ساده‌تر شدن محاسبات می‌شود:

تکنیک متمم:

هرگاه محاسبه‌ی تعداد روش‌ها به روش مستقیم مشکل یا غیر ممکن باشد، از روش غیر مستقیم **(متمم)** استفاده می‌کنیم. یعنی:

- تعداد حالات مخالف شرایط سؤال را تعیین می‌کنیم.
- عدد به‌دست آمده در مرحله‌ی قبل را از تعداد کل حالت‌ها کم می‌کنیم.

نمونه‌هایی ببینید.

مثال: با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

پاسخ

تعداد کل اعداد سه رقمی بدون تکرار ارقام که با این پنج رقم تشکیل می‌شود، برابر است با:

$$\underline{۵} \times \underline{۵} \times \underline{۴} = ۱۰۰$$

چون طبق مثالی از قبل، ۴۸ تا از آن‌ها فرد هستند، پس تعداد عددهای زوج عبارت است از:

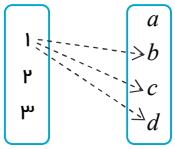
$$۱۰۰ - ۴۸ = ۵۲$$

مثال: سؤال زیر را به دو روش پاسخ دهید: الف) **روش مستقیم** ب) **روش متمم**

چند تابع از $A=\{۱,۲,۳\}$ به $B=\{a,b,c,d\}$ وجود دارد که شامل زوج مرتب $(۱,a)$ نباشد؟

پاسخ

الف) برای این‌که زوج $(۱,a)$ در تابع نباشد، عدد ۱ را نمی‌توانید به a نسبت دهید، در نتیجه برای ۱ فقط سه انتخاب وجود دارد. عضوهای ۲ و ۳ طبق معمول، هر کدام ۴ انتخاب داشته و در نتیجه طبق اصل ضرب:



$$۳ \times ۴ \times ۴ = ۴۸$$

ب) قبلاً دیدیم تعداد کل توابع $۴ \times ۴ \times ۴ = ۶۴$ است. خلاف خواسته‌ی سؤال این است که $(۱,a)$ عضو تابع باشد. یعنی:

برای عضو ۱ در دامنه فقط یک انتخاب a وجود دارد.

ولی عضوهای ۲ و ۳ هر کدام ۴ انتخاب داشته و تعداد $۱ \times ۴ \times ۴ = ۱۶$ تابع داریم. جواب طبق روش متمم:

$$۶۴-۱۶=۴۸$$

در محاسباتِ مربوط به شمارش، بسیاری مواقع با ضرب‌های منظم روبه‌رو می‌شویم، مانند:

$$۵\times۴\times۳\times۲\times۱ \quad \text{یا} \quad ۸\times۷\times۶\times\cdots\times۲\times۱$$

برای محاسبات سریع‌تر در این گونه موارد، یک نماد جدید معرفی می‌کنیم.

فاکتوریل:

برای عدد طبیعی n، «**فاکتوریلِ**» آن به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$n!=n\times(n-۱)\times(n-۲)\times\cdots\times۲\times۱$$

در حالت خاص، تعریف می‌کنیم: $۰!=۱$. (توجه کنید: $۱!=۱$ است.)

موارد مهم:

- مقادیر معروف زیر را در ذهن داشته باشید:

$$۲!=۲\times۱=۲\ ,\ ۳!=۳\times۲\times۱=۶\ ,\ ۴!=۴\times۳\times۲\times۱=۲۴\ ,\ ۵!=۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰\ ,\ ۶!=۷۲۰$$

- در محاسبات با فاکتوریل نمی‌توانید مانند عددهای معمولی رفتار کنید! برای نمونه، موارد زیر همگی نادرستند:

$$۲!+۳!=۵! \quad \text{و} \quad ۲!\times۳!=۶! \quad \text{و} \quad \frac{۸!}{۴!}=۲! \quad \text{(محاسبات نادرست)}$$

برای تقسیم، از خاصیت بعد کمک می‌گیریم. سایر موارد را با تعیین مقدار هر عدد محاسبه کنید؛ مانند:

$$۲!+۳!=۲+۶=۸ \quad \text{و} \quad ۲!\times۴!=۲\times۲۴=۴۸ \quad \text{(محاسبات درست)}$$

- مقدار فاکتوریل یک عدد را می‌توان بر حسب فاکتوریل‌های کوچک‌تر نوشت.

برای نمونه؛

$$۹!=۹\times۸\times\underbrace{۷\times\cdots\times۲\times۱}_{۷!}=۹\times۸\times۷! \quad \text{و} \quad ۸!=۸\times۷\times۶\times\underbrace{۵\times\cdots\times۲\times۱}_{۵!}=۸\times۷\times۶\times۵!$$

در حالت کلی، در مورد $n!$ می‌توان نوشت:

$$n!=n\times(n-۱)!=n\times(n-۱)\times(n-۲)!=\cdots$$

نتیجه:

تقسیم‌ها را می‌توان با تبدیل فاکتوریل‌های بزرگ‌تر، به فاکتوریل‌های کوچک‌تر و مشترک، ساده کرد. نمونه:

$$\frac{۷!}{۴!}=\frac{۷\times۶\times۵\times۴!}{۴!}=۷\times۶\times۵=۲۱۰$$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید:

الف) تساوی $۶!=۳!+۳!$ برقرار است.

ب) (نهایی- خرداد ۱۳۹۹) تساوی $۲!=\frac{۶!}{۳!}$ همواره برقرار است.

پاسخ

الف) نادرست است، زیرا:

$$۶!=۷۲۰ \quad و \quad ۳!+۳!=۶+۶=۱۲$$

ب) نادرست است:

مقدار سمت راست برابر ۲ و مقدار سمت چپ برابر $۶\times۵\times۴=۱۲۰$ است. $\frac{۶\times۵\times۴\times۳!}{۳!}$

مثال: کسر $\frac{۳!\times۹!\times۰!}{۷!\times۴!}$ را ساده کنید.

پاسخ

نوشتن فاکتوریل‌های بزرگ‌تر بر حسب فاکتوریل‌های کوچک‌تر:

$$\frac{۳!\times۹!\times۰!}{۷!\times۴!}=\frac{۳!\times۹\times۸\times۷!\times۱}{۷!\times۴\times۳!}=\frac{۹\times۸\times۱}{۴}=۹\times۲=۱۸$$

مثال: حاصل عبارت $\frac{۱۲!}{۸!\times۴!}-\frac{۶!}{۲!}$ را مشخص کنید.

پاسخ

مشابه موارد قبل:

$$\frac{۱۲!}{۸!\times۴!}-\frac{۶!}{۲!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹\times۸!}{۸!\times۴\times۳\times۲}-\frac{۶\times۵\times۴\times۳\times۲!}{۲!}=\frac{۱۲\times۱۱\times۱۰\times۹}{۴\times۳\times۲}-۶\times۵\times۴\times۳$$

$$=۱۱\times۵\times۹-۳۶۰=۴۹۵-۳۶۰=۱۳۵$$

پاسخ دهید (۱)

۱- با ارقام غیر صفر، چند عدد چهار رقمی بدون تکرار ارقام نوشته می‌شود؟

۲- چند عدد چهار رقمی وجود دارد که فاقد رقم ۵ باشد؟

۳- با حروف کلمه‌ی «بستگان»:

الف) چند کلمه‌ی چهار حرفی نوشته می‌شود؟

ب) چند کلمه‌ی شش حرفی نوشته می‌شود که با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

۴- الف) با ارقام ۰ تا ۶ و بدون تکرار ارقام:

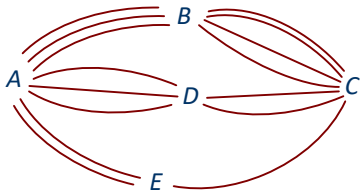
الف) چند عدد ۴ رقمی زوج وجود دارد؟

ب) چند عدد ۴ رقمی کوچک‌تر از ۵۰۰۰ می‌توان نوشت؟

۵- مسأله‌ای طرح کنید که پاسخ آن $۳\times۲+۳^۲+۲^۲$ باشد.

منتخب کتاب:

۱- مطابق شکل بین پنج شهر راه‌هایی وجود دارد که همه دو طرفه‌اند.



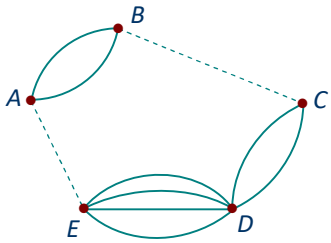
مشخص کنید به چند طریق می‌توان:

الف) از شهر A به شهر C مسافرت کرد.

ب) از شهر A به شهر C (از طریق B) مسافرت رفت و برگشت.

پ) از شهر D بدون عبور از شهر E به شهر A مسافرت کرد.

۲- تعداد راه‌ها یا جاده‌ها از شهر B به C و از شهر A به E را طوری تعریف کنید که با توجه به شکل روبه‌رو بتوان به ۲۰ حالت از شهر A به شهر D سفر کرد.



۳- یک دوره بازی فوتبال بین ده تیم فوتبال، به صورت رفت و برگشت انجام می‌شود. اگر همه‌ی تیم‌ها با هم بازی داشته باشند، در پایان چند بازی انجام شده است؟

۲ جایگشت اشیاء

حالت مهمی در چینش اشیاء کنار هم را دقیق معرفی می‌کنیم.

جایگشت:

به هر یک از حالت‌هایی که چند شیء مختلف کنار هم قرار می‌گیرند یک «**جایگشت**» از آن اشیاء گفته می‌شود.

بنابراین:

در جایگشت، همواره:

ترتیب قرار گرفتن اشیاء در کنار هم دارای اهمیت است.

نمونه‌هایی ببینید:

- ABC و ACB دو جایگشت مختلف از حروف A، B و C هستند.
- با حروف کلمه‌ی «امین» جایگشت‌های گوناگونی نوشته می‌شود؛ دو مورد از آن‌ها «مینا» و «نیما» هستند. (البته: در شمارش تعداد جایگشت حروف، با معنی بودن کلمات اهمیتی ندارد!)

توجه کنید:

طبق اصل شمارش ضرب، تعداد جایگشت‌های چهار شیء مختلف برابر: $۴\times۳\times۲\times۱=۴!=۲۴$ و در حالت کلی:

تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز طبق اصل ضرب برابر است با $n!$

زیرا:

$$n\times(n-۱)\times\cdots\times۳\times۲\times۱=n!$$

مثال: به چند طریق می‌توان از میان سه نفر متقاضی استخدام در یک شرکت، یک مدیر، یک معاون و یک منشی انتخاب کرد؟

پاسخ

چون ترتیب انتخاب در نوع شغل افراد تأثیر دارد، پس ترتیب مهم بوده و تعداد حالت‌ها برابر است با: $۳!=۶$.

چنان‌که قبلاً هم دیده‌ایم، گاهی در جایگشت‌ها شرایطی هم وجود دارد که باید رعایت شود.

مثال: الف) چند عدد پنج رقمی با ارقام فرد وجود دارد؟

ب) پنج رقم فرد ۱، ۳، ... و ۹ را روی پنج کارت نوشته‌ایم. با جابجایی کارت‌ها، چند عدد پنج رقمی نوشته می‌شود.

پاسخ

الف) پنج رقم فرد $۱,۳,۵,۷,۹$ داریم و هر کدام را می‌توان برای یکان، دهگان و ... و دهگانِ هزار به‌کار برد:

تعداد عددها $۵\times۵\times۵\times۵\times۵=۳۱۲۵$

ب) در این حالت تکرار ممکن نیست، (مثلاً؛ کارتی که در یکان قرار می‌گیرد، نمی‌تواند در رقم دیگری هم قرار گیرد)؛ یعنی خود به خود تکرار غیر مجاز است:

تعداد عددها $۵\times۴\times۳\times۲\times۱=۱۲۰$

مثال: با جایگشت حروف کلمه‌ی «شیرزاد» چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت که با «ا» شروع و به «ز» ختم شده و حرف سوم (از راست) حرف «ش» نباشد؟

پاسخ

حروف شروع و پایان از قبل مشخص بوده و هر کدام دارای ۱ حالت هستند: $\underline{۱}\times\underline{\ }\times\underline{\ }\times\underline{\ }\times\underline{۱}$

حرف سوم از راست نمی‌تواند «ا» یا «ز» یا «ش» باشد و ۳ انتخاب دارد: $\underline{۱}\times\underline{\ }\times\underline{۳}\times\underline{\ }\times\underline{۱}$

حروف دوم و چهارم از سه حرف باقی‌مانده به ۳ و ۲ روش انتخاب می‌شوند:

$$\underline{۱}\times\underline{۳}\times\underline{۳}\times\underline{۲}\times\underline{۱}=۱۸$$

گاهی از بین کل اشیاء موجود، می‌خواهیم تعداد مشخصی از آن‌ها را با رعایت ترتیب انتخاب کرده یا با آن‌ها جایگشت بسازیم. در چنین مواردی، از مفهوم بعدی استفاده می‌شود:

تبدیل (انتخابِ با ترتیب):

اگر n شیءِ متمایز داشته باشیم، آنگاه تعداد جایگشت‌های r شیءِ از میان این n شیءِ برابر است با:

$$P(n\ ,\ r)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

به این نوع جایگشت، «**تبدیل**» r شیءِ از n شیءِ نیز گفته می‌شود.

توجه کنید:

تعداد تبدیل‌های اشیاء را می‌توان مستقیماً با استفاده از اصل ضرب محاسبه کرد و استفاده از فرمول $P(n\ ,\ r)$ به ندرت رخ می‌دهد.

مثال: توسط ۹ نفر دانش‌آموز به چند طریق می‌توان صف‌های ۴ نفره تشکیل داد؟

پاسخ

چون در صف ترتیب مهم است، باید تعداد جایگشت‌های ۴ شیء را از بین ۹ شیء محاسبه کنیم:

$$P(۹\ ,\ ۴)=\frac{۹!}{(۹-۴)!}=\frac{۹!}{۵!}=\frac{۹\times۸\times۷\times۶\times۵!}{۵!}=۹\times۸\times۷\times۶=۳۰۲۴$$

روش بدون فرمول:

نفر اول صف به ۹ روش، نفر دوم به ۸ روش، نفر سوم به ۷ روش و نفر چهارم را به ۶ روش انتخاب می‌شود و در نتیجه:

$$\underline{۹}\times\underline{۸}\times\underline{۷}\times\underline{۶}=۳۰۲۴$$

مثال: هشت دونده در یک مسابقه شرکت می‌کنند. اگر هیچ دو فردی همزمان به خط پایان نرسند، به چند طریق جوایز نفرات اول تا سوم می‌تواند توزیع شود؟

پاسخ

انتخاب سه نفر به عنوان اول تا سوم: $۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۳۶$.

روش دوم: باید سه نفر از بین هشت نفر به ترتیب انتخاب شده و به عنوان نفرات اول تا سوم جوایز را دریافت کنند:

$$P(۸ , ۳) = \frac{۸!}{(۸-۳)!} = \frac{۸!}{۵!} = \frac{۸ \times ۷ \times ۶ \times ۵!}{۵!} = ۸ \times ۷ \times ۶ = ۳۳۶$$

مثال: چند جایگشت پنج حرفی با حروف کلمه‌ی computer وجود دارد که با c شروع و به r ختم شود؟

پاسخ

حروف شروع و پایان ۱ حالتی هستند. حرف سوم از بین ۶ حرف باقی‌مانده، حرف چهارم از بین ۵ حرف باقی‌مانده و بالاخره حرف آخر از بین ۴ حرفی که قبلاً انتخاب نشده‌اند، انتخاب می‌شوند:

$$۱ \times ۶ \times ۵ \times ۴ \times ۱ = ۱۲۰$$

تکلیف:

مثال قبل را با استفاده از فرمول $P(n , r)$ پاسخ دهید.

مثال: اگر $P(n , ۲) = ۲۰$ باشد، توسط n نفر، چند صف می‌توان تشکیل داد؟

پاسخ

مقدار n را حساب می‌کنیم:

$$\frac{n!}{(n-۲)!} = ۲۰ \rightarrow \frac{n \times (n-۱) \times (n-۲)!}{(n-۲)!} = ۲۰ \rightarrow n(n-۱) = ۲۰ \xrightarrow{۲۰=۵\times۴} n = ۵$$

تعداد صف‌ها برابر $۱۲۰ = ۵!$ است.

پاسخ دهید (۲)

۱- حاصل $۲۹ - \frac{۶!}{۴!}$ را حساب کنید.

۲- با تعدادی دانش‌آموز می‌توان ۱۲۰ صف مختلف تشکیل داد. تعداد دانش‌آموزان را بیابید.

۳- توسط ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۶ و ۸ چند عدد شش رقمی زوج تحت هر یک از شرایط زیر می‌توان نوشت؟

- تکرار ارقام مجاز باشد.
- تکرار ارقام مجاز نباشد.

۴- توسط ارقام ۰، ۱، ۳، ۴، ۶ و ۸ چند عدد چهار رقمی بزرگ‌تر از ۴۸۰۰ تحت هر یک از شرایط زیر می‌توان نوشت؟

- تکرار ارقام مجاز باشد.
- تکرار ارقام مجاز نباشد.

۵- چند عدد پنج رقمی یافت می‌شود که رقم یکان آن‌ها ۳ و رقم سمت چپ آن‌ها ۷ بوده و رقم تکراری نداشته باشد؟

۶- از بین ۵ مهره سفید و ۴ مهره سیاه به چند روش می‌توان دو مهره‌ی غیر همرنگ را در کنار هم مرتب کرد؟

۷- مسأله‌ای طرح کنید که جواب آن $P(۵\ ,\ ۴)$ شود.

منتخب کتاب:

۱- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ مفروض است.

الف) با ارقام موجود در این مجموعه چند عدد پنج رقمی و زوج بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

ب) چند عدد پنج رقمی و بزرگ‌تر از ۸۰۰۰۰ می‌توان نوشت.

۳ ترکیب اشیاء

اگر در انتخابِ تعدادی شیء، ترتیبِ انتخاب مهم نباشد، به هر انتخاب یک «**ترکیب**» گوییم.

به بیان دیگر:

ترکیب، دقیقاً قرار دادن اشیاء به صورت گروهی در کنار هم است.

تعیین تعداد ترکیب‌ها:

ترکیب (انتخابِ گروهی):

تعداد ترکیب‌های r تایی از میان n شیءِ را با $C(n,r)$ یا $\binom{n}{r}$ نشان می‌دهیم که از رابطه‌ی زیر به‌دست می‌آید:

$$\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$$

تذکر مجدد:

در تبدیلِ (جایگشت) تعدادی شیء از میان n شیء، معمولاً ساختن **صف با ترتیب** مورد توجه است، ولی در ترکیب، ساخت **گروه** یا **زیرمجموعه** از میان کل اشیاء، **یعنی بدون ترتیب** مورد نظر است.

نتیجه:

تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی، از یک مجموعه‌ی n عضوی، برابر $\binom{n}{r}=\frac{n!}{r!\times(n-r)!}$ است.

مثال: الف) مجموعه‌ی هشت عضوی $\{1,2,3,\dots,8\}$ چند زیر مجموعه‌ی چهار عضوی دارد؟ (نهایی- خرداد ۱۴۰۴)

ب) تعداد زیر مجموعه‌های ۳ عضوی از یک مجموعه‌ی ۵ عضوی برابر ۱۵ است. (نهایی- خرداد ۱۴۰۲)

(درست ☐ - نادرست ☐)

پاسخ

الف) طبق مطلب بالا:

$$\binom{8}{4}=\frac{8!}{4!\times(8-4)!}=\frac{8\times7\times6\times5\times4!}{4\times3\times2\times1\times4!}=2\times7\times1\times5=70$$

ب) صحیح نیست، زیرا: $\binom{5}{3}=\frac{5!}{3!\times(5-3)!}=\frac{5\times4\times3!}{3!\times2!}=\frac{20}{2}=10$.

مثال: به چند طریق می‌توان از بین ۱۰ نفر، یک تیم فوتبال ۷ نفره تشکیل داد؟

پاسخ

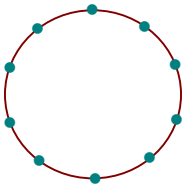
در تیم، ترتیب اهمیت نداشته و بنابراین ترکیب به‌کار می‌رود:

$$\binom{10}{7}=\frac{10!}{7!\times\underbrace{(10-7)!}_{=3!}}=\frac{10\times9\times8\times7!}{7!\times1\times2\times3}=10\times3\times4=120$$

مثال: روی محیط یک دایره طبق شکل زیر ۱۰ نقطه قرار دارد.

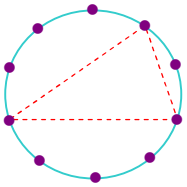
الف) چند مثلث با رأس‌های از این نقاط می‌توان ساخت؟

ب) با این نقاط، چند وتر در دایره تشکیل می‌شود؟



پاسخ

الف) هر سه نقطه‌ای که انتخاب کنید، دقیقاً یک مثلث ساخته می‌شود، مانند:



پس تعداد مثلث‌ها برابر تعداد انتخاب‌های سه نقطه از بین ده نقطه است:

$$\binom{10}{3}=\frac{10!}{3!\times(10-3)!}=\frac{10\times9\times8\times7!}{3\times2\times1\times7!}=10\times3\times4=120$$

ب) به صورت مشابه، با انتخاب هر دو نقطه، دقیقاً یک وتر خواهیم داشت:

$$\binom{10}{2}=\frac{10!}{2!\times(10-2)!}=\frac{10!}{2!\times8!}=\frac{10\times9\times8!}{2\times8!}=5\times9=45$$

نمونه‌ی بعدی قابل توجه است:

مثال: (نهایی- دی ۱۴۰۱)

مجموعه‌ی $A=\{a,b,c,d,e,f\}$ را در نظر بگیرید. چند زیر مجموعه ۴ عضوی شامل دو عضو b و c دارد؟

پاسخ

دو عضو b و c اجباراً انتخاب شده‌اند؛ پس باید دو عضو دیگر را از بین چهار عضو باقی‌مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{4}{2}=\frac{4!}{2!\times(4-2)!}=\frac{24}{2\times2}=6$$

به روش‌های محاسبه‌ی سریع ترکیب‌های پرکاربرد توجه کنید.

محاسبات سریع:

موارد زیر طبق فرمول ترکیب، برای هر عدد طبیعی n برقرار بوده و در محاسبات، بسیار مورد استفاده واقع می‌شوند:

- همواره داریم: $\binom{n}{0}=1$. برای نمونه؛

$$\binom{5}{0}=1 \quad \text{و} \quad \binom{3}{0}=1$$

- همواره داریم $\binom{n}{1}=n$. برای نمونه؛

$$\binom{5}{1}=5$$

- رابطه‌ی $\binom{n}{2}=\frac{n\times(n-1)}{1\times 2}$ یا به طور ساده: $\binom{n}{2}=\frac{n(n-1)}{2}$ کاربرد زیادی دارد. نمونه‌ها:

$$\binom{8}{2}=\frac{8\times(8-1)}{2}=28 \quad \text{و} \quad \binom{5}{2}=\frac{5\times(5-1)}{2}=10$$

- نظم بالا را می‌توان برای تعداد ترکیب‌های دیگر هم به‌کار برد. نمونه‌ها:

$$\binom{8}{4}=\frac{8\times7\times6\times5}{1\times2\times3\times4}=70 \quad \text{و} \quad \binom{6}{3}=\frac{6\times5\times4}{1\times2\times3}=20$$

(توجه: در محاسبه $\binom{n}{r}$ به تعداد r و طبق نظم بالا، در صورت و مخرج ضرب بنویسید.)

بعلاوه:

در عبارت $\binom{n}{r}$ می‌توانید جای r، اختلاف دو عدد، یعنی: $n-r$ را جایگزین کنید:

$$\binom{n}{r}=\binom{n}{n-r}$$

بین r و $n-r$ هر کدام کوچک‌تر باشد، محاسبات کوتاه‌تر خواهد شد.

برای نمونه؛

به جای محاسبه‌ی $\binom{6}{4}$، حاصل $\binom{6}{2}=\binom{6}{6-4}$ را حساب می‌کنیم که راه کوتاه دارد. نمونه‌های دیگر:

$$\binom{7}{5}=\binom{7}{2}=\frac{7\times6}{2}=21 \quad \text{و} \quad \binom{6}{5}=\binom{6}{1}=6$$

مثال: (نهایی- خرداد ۱۳۹۹)

به چند طریق می‌توان سه توپ همرنگ را از بین ۵ توپ قرمز و ۴ توپ آبی انتخاب کرد؟

پاسخ

باید هر سه قرمز یا هر سه آبی باشند:

$$\binom{۵}{۳}+\binom{۴}{۳}=\binom{۵}{۲}+\binom{۴}{۱}=\frac{۵\times۴}{۲}+۴=۱۰+۴=۱۴$$

مثال: به چند طریق می‌توان از بین پنج مرد و چهار زن، ۶ نفر انتخاب کرد به‌طوری که:

الف) ۴ مرد و ۲ زن انتخاب شوند؟

ب) لااقل ۳ زن انتخاب شوند؟

پاسخ

الف) طبق اصل ضرب:

$$\binom{۵}{۴}\times\binom{۴}{۲}=\binom{۵}{۱}\times\binom{۴}{۲}=۵+\frac{۴\times۳}{۲}=۵+۶=۱۱$$

ب) توجه کنید که «لااقل سه نفر زن» یعنی: «سه نفر زن» یا «چهار نفر زن» انتخاب شوند.

بعلاوه:

چون باید شش نفر انتخاب شوند، وقتی سه یا چهار زن انتخاب می‌شوند، بقیه (تا ۶ نفر) باید از مردها انتخاب شوند:

$$\underbrace{\binom{۴}{۳}}_{=\binom{۴}{۱}}\times\underbrace{\binom{۵}{۳}}_{=\binom{۵}{۲}}+\underbrace{\binom{۴}{۴}}_{=\binom{۴}{۰}}\times\binom{۵}{۲}=۴\times\frac{۵\times۴}{۲}+۱\times\frac{۵\times۴}{۲}=۴\times۱۰+۱\times۱۰=۵۰$$

مثال: ۹ گردشگر به چند روش می‌توانند در سه چادر ۳، ۴ و ۲ نفره استراحت کنند؟

پاسخ

باید ۳ نفر انتخاب شود و در اولین چادر قرار گرفته، ۴ نفر از بین شش نفر باقی‌مانده در چادر دوم و دو نفر آخر هم در چادر سوم استراحت کنند. طبق اصل ضرب:

$$\binom{۹}{۳}\times\underbrace{\binom{۶}{۴}}_{=\binom{۶}{۲}}\times\binom{۲}{۲}=\frac{۹\times۸\times۷}{۲\times۳}\times\frac{۶\times۵}{۲}\times۱=۸۴\times۱۵=۱۲۶۰$$

پاسخ دهید (۳)

۱- جاهای خالی را با پاسخ درست کامل کنید: **(نهایی- شهریور ۹۸)**

الف) حاصل $\binom{۹}{۶}$ برابر ..... است.

ب) تعداد جایگشت‌های n شیء متمایز برابر ..... است.

۲- به چند طریق می‌توان ۴ کتاب را از بین ۹ کتاب انتخاب کرد؟

۳- تعداد زیر مجموعه‌های سه عضوی از مجموعه‌ی $A=\{۵,۶,۷,۸,۹\}$ که شامل عدد ۷ باشد، کدام است؟

(نهایی- خرداد ۱۴۰۳)

☐ ۱۰ ☐ ۸ ☐ ۴ ☐ ۶

۴- روی محیط یک دایره ده نقطه وجود دارد. مشخص کنید:

الف) با این دوازده نقطه، چند مثلث می‌توان ساخت؟

ب) چه تعداد وتر می‌توان تشکیل داد؟

۵- از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، دو مهره به تصادف خارج می‌کنیم. در چند حالت مهره‌ها همرنگ هستند؟

۶- چند زیرمجموعه‌ی چهار عضوی از مجموعه‌ی $\{۶,۴,۰,۱,۲,۳\}$ می‌توان نوشت که شامل عدد ۶ باشند؟

۷- از بین ۱۲ عضو انجمن خانه و مدرسه، به چند طریق می‌توان سه نفر انتخاب کرد که همواره یک فرد مورد نظر بین آن‌ها باشد؟

منتخب کتاب:

۱- می‌خواهیم از بین پنج دانش‌آموز سال یازدهم و شش دانش‌آموز سال دوازدهم یک تیم والیبال ۶ نفره تشکیل دهیم. تعداد حالت‌های ممکن را در موارد زیر مشخص کنید:

الف) به تعداد برابر دانش‌آموز سال یازدهم و دوازدهم در تیم حضور داشته باشند.

ب) کاپیتان فرد مشخصی از سال دوازدهم باشد.

پ) حداقل ۴ نفر از اعضای تیم، دانش‌آموز سال دوازدهم باشند.

ت) فقط ۲ نفر از اعضای تیم از سال یازدهم باشند.

۲- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ مفروض است.

الف) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی دارد؟

ب) مجموعه‌ی A چند زیرمجموعه‌ی سه عضوی و شامل رقم ۸ دارد؟

ویژه آمادگی کنکور

در بخش پایانی، مطالب لازم جهت آمادگی کامل برای شرکت در آزمون‌ها و کنکور سراسری آورده می‌شوند.



اگر در حال مطالعه برای تسلط بر کتاب و شرکت
در امتحان مدرسه یا امتحان نهایی هستید، می‌توانید فعلاً از خواندن این بخش صرف‌نظر کنید!

با چند نمونه از کاربرد اصل‌های شمارش و جایگشت شروع می‌کنیم.

با ارقام ۰، ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام کوچک‌تر از ۴۴۰ می‌توان نوشت؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۲۱ ❷ ۲۰ ❸ ۳۱ ❹ ۳۰

گزینه ۳

برای مضرب ۵ بودن، دو حالت ممکن است.

۱) رقم یکان صفر باشد:

رقم صدگان ۵ مجاز نیست؛ ولی با توجه به انتخاب صدگان، دو حالت مختلف داریم:

الف) وقتی صدگان ۴ باشد، دهگان نمی‌تواند ۵ قرار گیرد. تعداد: $۳\times۱\times۳=۹$

ب) وقتی صدگان کمتر از ۴ باشد، دهگان می‌تواند ۵ هم قرار گیرد. تعداد: $۳\times۴\times۱=۱۲$

۲) رقم یکان ۵ باشد:

رقم صدگان ۰ مجاز نیست؛ بقیه ارقام با رعایت غیرتکراری بودن، مجاز هستند. تعداد: $۴\times۴\times۱=۱۶$

تعداد کل:

$$۹+۱۲+۱۶=۳۱$$

با حروف کلمه «پارسی» چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که در نوشتن آن، فقط یک حرف نقطه‌دار ظاهر شود؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۷۲ ❷ ۳۶ ❸ ۲۴ ❹ ۱۲

گزینه ۳

حرف «پ» همواره نقطه‌دار است؛ پس لازم است حرف «ی» نقطه‌دار نشود، بنابراین باید آن را در انتهای کلمه‌ها قرار دهیم. در نتیجه حرف آخر ۱ حالتی بوده و چهار حرف دیگر جایگشت آزادانه دارند. طبق اصل ضرب:

$$۱\times۴\times۳\times۲\times۱=۲۴$$

با حروف کلمه «آموزشی» چند کلمه شش حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به طوری که هیچ حرف نقطه‌داری قبل از «آ» ظاهر نشود؟ (بدون توجه به معنی) (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۱۵۶ ❷ ۱۸۰ ❸ ۲۱۶ ❹ ۲۴۰

گزینه ۲

با توجه به این‌که حداکثر دو حرف «م» و «و» می‌توانند قبل از «آ» ظاهر شوند، سه حالت ممکن را بررسی و شمارش می‌کنیم:

۱) هیچ حرفی قبل از «آ» نیاید:

- - - - - آ

پنج حرف

تعداد حالت‌ها $۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱۲۰$ است.

۲) یک حرف قبل از «آ» بیاید:

- - - - - آ -

چهار حرف

تعداد حالت‌ها $۲ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۴۸$ است.

۳) دو حرف قبل از «آ» بیاید:

تعداد حالت‌ها $۲ \times ۱ \times ۱ \times ۱ \times ۱ = ۱۲$ است. در نتیجه تعداد کل:

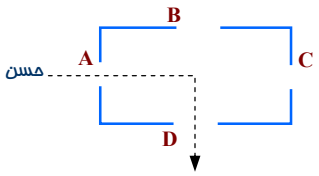
$$۱۲۰ + ۴۸ + ۱۲ = ۱۸۰$$

یک پارکینگ دارای چهار درب است. وقتی از یک درب وارد می‌شوید، باید از درب دیگری خارج شوید. به چند طریق حسن و علی می‌توانند از این پارکینگ استفاده کنند به طوری که آن‌ها درب ورودی و درب خروجی یکسانی نداشته باشند؟

(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ ۱۶۸ ❷ ۱۰۸ ❸ ۸۴ ❹ ۵۴

گزینه ۳



واضح است که برای حسن $۳ \times ۴ = ۱۲$ حالت امکان دارد. (فرض کنید ورود و خروج او طبق شکل مقابل باشد.) دو حالت ممکن است:

حالت ۱: علی از D وارد شده و از یکی از درب‌ها به دلخواه خارج شود. تعداد حالت‌ها $۳ \times ۱ \times ۳ = ۳۶$ بوده و در کل: $۳ \times ۱۲ = ۳۶$ روش وجود دارد.

حالت ۲: علی از B یا C وارد شده باشد که در این صورت فقط دو انتخاب برای خروج دارد؛ (از درب ورودش و همچنین D نمی‌تواند خارج شود.) تعداد حالت‌ها $۲ \times ۲ \times ۴ = ۴$ بوده و در کل: $۱۲ \times ۴ = ۴۸$ روش وجود دارد.

جواب نهایی: $۳۶ + ۴۸ = ۸۴$

به یک مورد خاص توجه کنید:

نکته ۱

تقسیم حالت‌ها:

گاهی جایگشت‌ها تحت یک شرط به چند بخش با تعداد یکسان تقسیم می‌شوند. باید تعداد کل را تعیین کرده و بر تعداد بخش‌ها تقسیم کنید.

برای نمونه؛

تعداد جایگشت‌های حروف sport که حرف s زودتر از حرف r آمده باشد را حساب می‌کنیم. تعداد کل جایگشت‌ها ۵! است؛ و همه‌ی آن‌ها به دو بخش با تعداد یکسان تقسیم می‌شوند:

حرف s زودتر از حرف r آمده است. یا حرف r زودتر از حرف s آمده است.

پس جواب برابر $\frac{۵!}{۲!}=۶۰$ خواهد شد.

با ارقام ۷، ۶، ۹، ۱ و ۵ چند عدد چهار رقمی می‌توان نوشت به طوری که در همه‌ی آن‌ها، رقم یکان کوچک‌تر از رقم هزارگان باشد؟ **(بدون تکرار ارقام)**

❶ ۶۰ ❷ ۷۲ ❸ ۶۴ ❹ ۱۲۰

گزینه ۱

تعداد کل چهار رقمی‌های ممکن $۵\times۴\times۳\times۲=۱۲۰$ است. توجه کنید:

چون شرایط کاربرد ارقام در یکان و هزارگان یکسان است،

در نیمی از کل حالات، یکان از هزارگان کوچک‌تر است و در نیم دیگر حالات، یکان از هزارگان بزرگ‌تر خواهد بود. جواب:

$$۱۲۰\div۲=۶۰$$

پدر بزرگ، مادر بزرگ، پدر، مادر، خواهر و برادر به ترتیب از خانه خارج می‌شوند. در چند حالت پدر بعد از پدر بزرگ و قبل از دختر خود خارج شده است؟

❶ ۲۴۰ ❷ ۳۶۰ ❸ ۱۲۰ ❹ ۱۸۰

گزینه ۳

تعداد کل حالت‌ها ۶! است. ترتیب خروج سه فرد مورد نظر ۳! حالت است، یعنی کل جایگشت‌ها به ۶ قسمت با تعداد یکسان تقسیم شده است. در نتیجه جواب برابر است با:

$$\frac{۶!}{۳!}=\frac{۶\times۵!}{۶}=۵!=۱۲۰$$

نمونه تست‌های مفیدی از بخش ترکیب ببینید:

به چند روش می‌توان از بین شش دانش‌آموز دهم و هفت دانش‌آموز یازدهم، یک تیم ۶ نفره‌ی والیبال تشکیل دهیم، به طوری که لااقل چهار نفر از پایه‌ی یازدهم باشند؟

❶ ۶۵۸ ❷ ۶۵۱ ❸ ۵۳۲ ❹ ۵۲۵

گزینه ۱

سه حالت مورد قبول است:

«۴ نفر یازدهم و ۲ نفر دهم» یا **«۵ نفر یازدهم و ۱ نفر دهم»** یا **«هر ۶ نفر یازدهم»**

طبق اصل‌های جمع و ضرب:

$$\underbrace{\binom{۷}{۴}}_{=\binom{۷}{۳}}\times\binom{۶}{۲}+\underbrace{\binom{۷}{۵}}_{=\binom{۷}{۲}}\times\binom{۶}{۱}+\underbrace{\binom{۷}{۶}}_{=\binom{۷}{۱}}\times\binom{۶}{۰}=\frac{۷\times۶\times۵}{۱\times۲\times۳}\times\frac{۶\times۵}{۲}+\frac{۷\times۶}{۲}\times۶+۷\times۱=۳۵\times۱۵+۲۱\times۶+۷$$

$$=۵۲۵+۱۲۶+۷=۶۵۸$$

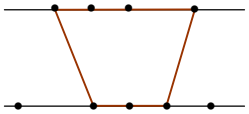
دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. توسط این نقاط چند چهار ضلعی تشکیل می‌شود؟

❶ ۵۰ ❷ ۵۵ ❸ ۶۰ ❹ ۵۶

گزینه ۳

برای تشکیل چهارضلعی، باید چهار نقطه انتخاب کنیم. تنها یک حالت وجود دارد که دو نقطه از یک خط و دو نقطه از خط دیگر انتخاب شوند. بنابراین طبق اصل ضرب:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۲}=۶\times۱۰=۶۰$$



دو خط موازی در نظر گرفته، روی یک خط ۵ نقطه و روی خط دیگر ۴ نقطه قرار دهید. تعداد مثلث‌ها با رئوس از این نقاط کدام است؟

❶ ۵۰ ❷ ۶۵ ❸ ۶۰ ❹ ۷۰

گزینه ۴

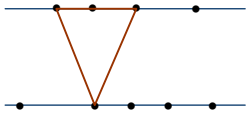
برای تشکیل مثلث به انتخاب سه نقطه نیاز داریم که در دو حالت انجام می‌شود:

- ۲ نقطه از خط بالا و یک نقطه از خط پایین:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۱}=۶\times۵=۳۰$$

- ۲ نقطه از خط پایین و یک نقطه از خط بالا:

$$\binom{۴}{۱}\times\binom{۵}{۲}=۴\times۱۰=۴۰$$



بنابراین تعداد کل مثلث‌ها طبق اصل شمارش جمع برابر $۳۰+۴۰=۷۰$ است.

به چند روش می‌توان دو عدد از مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,\ldots,۱۹\}$ انتخاب کرد به طوری که مجموع آن‌ها زوج باشد؟

❶ ۱۰۱ ❷ ۸۰ ❸ ۹۰ ❹ ۸۱

گزینه ۴

برای آن‌که جمع دو عدد زوج باشد، لازم است:

هر دو عدد زوج باشند. یا **هر دو عدد فرد باشند.**

چون در کل ۹ رقم زوج و ۱۰ رقم فرد داریم، طبق اصل جمع:

$$\binom{۹}{۲}+\binom{۱۰}{۲}=\frac{۹\times ۸}{۲}+\frac{۱۰\times ۹}{۲}=۳۶+۴۵=۸۱$$

توجه کنید:

گاهی ساختن جایگشت‌ها در دو مرحله انجام می‌شود، یعنی:

ابتدا اشیاء یا ارقام مورد نیاز را انتخاب کرده و سپس جایگشت‌ها مشخص می‌شوند.

نمونه‌هایی ببینید:

مثال: توسط حروف کلمه‌ی showman چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت که شامل حروف m و h باشند؟

پاسخ

دو حرف m و h اجباراً باید انتخاب شوند. لذا سه حرف دیگر را از بین پنج حرف (s o w a n) انتخاب می‌کنیم: $\binom{۵}{۳}=۱۰$ حالت. با این پنج حرف تعداد $۵!$ جایگشت وجود دارد. پس طبق اصل ضرب:

$$\binom{۵}{۳}\times ۵!=۱۰\times ۱۲۰=۱۲۰۰$$

با حروف کلمه **DANESH** چند رمز عبور چهار حرفی می‌توان ساخت به طوری که حرف **S** در هر رمز باشد؟ **(کنکور ۱۳۹۷)**

❶ ۲۴۰ ❷ ۲۶۰ ❸ ۲۷۰ ❹ ۲۵۰

گزینه ۱

حرف **S** اجباراً انتخاب شده، باید سه حرف نیز از بین پنج حرف باقی‌مانده انتخاب کنیم:

$$\binom{۵}{۳}=۱۰$$

با این چهار حرف، تعداد $۴!=۲۴$ رمز ساخته می‌شود. در نتیجه تعداد رمزها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$۱۰\times ۲۴=۲۴۰$$

با ارقام ۱، ۲، . . . و ۹ چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت که درست ۲ رقم آن زوج باشد؟ **(ریاضی ۹۴)**

❶ ۶۴۰۰ ❷ ۷۲۰۰ ❸ ۸۴۰۰ ❹ ۹۶۰۰

گزینه ۲

ابتدا از بین رقم‌های ۲، ۴، ۶ و ۸ به $\binom{۴}{۲}$ حالت دو رقم زوج و از بین رقم‌های ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ به $\binom{۵}{۳}$ حالت سه رقم دیگر را انتخاب می‌کنیم تا در کل ۵ رقم داشته باشیم. اکنون چون با هر انتخاب ۵ رقم، دقیقاً تعداد $۵!$ عدد نوشته می‌شود که دو رقم آن‌ها زوج است، پس تعداد کل عددها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{۴}{۲}\times\binom{۵}{۳}\times ۵!=۶\times ۱۰\times ۱۲۰=۷۲۰۰$$

در ادامه، نمونه‌های دیگری از کاربرد تکنیک متمم را در پاسخ‌گویی به تست‌ها ببینید.

تعداد اعداد سه رقمی شامل رقم ۷ کدام است؟

❶ ۲۴۸ ❷ ۲۴۰ ❸ ۶۴۸ ❹ ۲۵۲

گزینه ۴

روش مستقیم حالت‌های مختلف و زیادی دارد؛ بنابراین روش غیرمستقیم را به‌کار می‌بریم:

- کل عددهای سه رقمی برابر است با:

$$۹ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۹۰۰$$

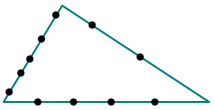
- تعداد عددهایی که در آن‌ها رقم ۷ به‌کار نرفته برابر است با:

$$۸ \times ۹ \times ۹ = ۶۴۸$$

بنابراین تعداد عددهای سه رقمی شامل رقم ۷ از تفریق دو عدد بالا به‌دست خواهد آمد: $۹۰۰ - ۶۴۸ = ۲۵۲$

چند مثلث وجود دارد که رأس‌های هر کدام از نقاط روی شکل مقابل انتخاب شوند؟

❶ ۱۶۵
❷ ۱۵۵
❸ ۱۵۱
❹ ۱۶۱



گزینه ۳

محاسبه‌ی تعداد حالت‌ها به صورت مستقیم به در نظر گرفتن چند حالت مختلف نیاز دارد؛ ولی طبق روش متمم:

- کل حالت‌های انتخاب ۳ نقطه از بین کل ۱۱ نقطه برابر است با:

$$\binom{۱۱}{۳} = \frac{۱۱ \times ۱۰ \times ۹}{۲ \times ۳} = ۱۱ \times ۵ \times ۳ = ۱۶۵$$

- اما اگر هر سه نقطه‌ی انتخاب شده روی یک ضلع قرار گیرند، مثلثی تشکیل نمی‌شود و بنابراین لازم است که تعداد این حالت‌ها از کل حالات کسر گردد:

$$\binom{۴}{۳} + \binom{۵}{۳} = ۴ + ۱۰ = ۱۴$$

بنابراین تعداد مثلث‌ها برابر $۱۶۵ - ۱۴ = ۱۵۱$ است.

قبل از بیان تکنیک بعدی، به یک نمونه توجه کنید.

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی و ۴ کتاب فیزیک را یک در میان در یک قفسه چید؟

پاسخ

با توجه به این که تعداد کتاب‌های فیزیک بیشتر است، ابتدا کتاب فیزیک قرار می‌گیرد:

$$\underset{ف}{۴} \times \underset{ر}{۳} \times \underset{ف}{۳} \times \underset{ر}{۲} \times \underset{ف}{۲} \times \underset{ر}{۱} \times \underset{ف}{۱} = ۴! \times ۳! = ۲۴ \times ۶ = ۱۴۴$$

توجه کنید:

اگر در مثال قبل، تعداد کتاب‌های فیزیک و ریاضی هر دو برابر ۳ بود، آنگاه هم می‌توانستیم اولین کتاب را ریاضی در نظر بگیریم و هم اولین کتاب فیزیک باشد. در هر یک از این دو حالت، تعداد روش‌ها مانند بالا $۳!\times ۳!$ به‌دست می‌آمد و کل حالات برابر می‌شد با:

$$۲\times ۳!\times ۳!$$

بنابراین می‌توان قوانین زیر را بیان کرد:

نکته ۲

اگر بخواهیم n شیء از یک نوع و m شیء از نوع دیگر را یک در میان کنار هم قرار دهیم، دو حالت رخ می‌دهد:

- اگر $m=n$ باشد، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$۲\times m!\times n!$$

- اگر $m=n+۱$ باشد، یعنی m و n دو عدد متوالی باشند، تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$m!\times n!$$

مثال: به چند طریق می‌توان ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول و ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم را یک در میان در قفسه‌ای مرتب کرد؟

پاسخ

ابتدا ۳ کتاب از بین ۵ کتاب سال اول، سپس ۴ کتاب از ۶ کتاب سال دوم انتخاب می‌کنیم و در پایان این کتاب‌ها به $۳!\times ۴!$ حالت به‌طور یک در میان کنار هم قرار می‌گیرند:

$$\binom{۵}{۳}\times\binom{۶}{۴}\times ۳!\times ۴!=۱۰\times ۱۵\times ۶\times ۲۴=۲۱۶۰۰$$

تعداد جایگشت‌های شش حرفی از کلمه‌های **ordeal** و **beard** که در آن حروف صدادار و بی‌صدا یک در میان قرار گیرند، به ترتیب کدام است؟

❶ ۱۲ - ۳۶ ❷ ۲۴ - ۷۲ ❸ ۲۴ - ۳۶ ❹ ۱۲ - ۷۲

گزینه ۴

در کلمه‌ی **ordeal** چون سه حرف **o**، **e** و **a** صدادار و سه حرف دیگر بی‌صدا هستند، طبق مورد اول نکته‌ی بالا:

$$۲\times ۳!\times ۳!=۲\times ۶\times ۶=۷۲$$

در کلمه‌ی **beard** دو حرف صدادار و سه حرف بی‌صدا بوده و مورد دوم نکته‌ی بالا به‌کار می‌رود:

$$۲!\times ۳!=۲\times ۶=۱۲$$

مورد بعد، نقش مهمی در پاسخ به برخی سؤالات جایگشت دارد.

نکته ۳

تکنیک طناب‌پیچ:

اگر هنگام جایگشت بخواهیم برخی اشیاءِ خاص کنار هم باشند، چنین عمل می‌کنیم:

- تصور می‌کنیم که آن اشیاءِ خاص را با طناب بسته‌ایم تا با هم یک شیءِ تشکیل دهند.
- آن شیءِ در کنار اشیاءِ باقی‌مانده، تعداد جایگشت مشخصی خواهد داشت که قابل محاسبه است.

بعلاوه

- باید توجه کنید که آیا جابجایی چند شیء خاص در کنار هم اهمیت دارد یا خیر؟ (مثال بعد)
- برای شمارش تعداد حالت‌هایی که این اشیاء خاص **الزاماً همگی کنار هم نیستند**، تکنیک متمم را به‌کار خواهیم برد.

در چند نمونه‌ی بعدی، با تکنیک بالا و روش کاربرد آن آشنا می‌شویم.

مثال: الف) با پنج رقم فرد ۱، ۳، . . . و ۹، چند عدد پنج رقمی نوشته می‌شود که ارقام ۵ و ۷ کنار هم باشند؟

ب) با حروف کلمه‌ی **speedy** چند کلمه‌ی شش حرفی نوشته می‌شود که حروف **e** کنار هم باشند.

پاسخ

الف) تصور کنید که ارقام ۵ و ۷ را با طناب بسته‌ایم و تشکیل یک شیء داده است. این شیء به همراه ۱، ۳ و ۹، چهار شیء شده و $۴!=۲۴$ جایگشت دارند:

۹	۳	۱	۵ , ۷

بعلاوه، رقم‌های ۵ و ۷ در کنار هم به $۲!=۲$ حالت می‌توانند جایگشت کرده و حالت جدید بسازند. کل حالات طبق اصل ضرب:

تعداد عددها $۲۴\times۲=۴۸$

ب) مشابه قبل، پنج شیء داریم:

y	d	p	s	e e

این اشیاء دارای $۵!$ جایگشت هستند؛ چون با جابجایی e ها کنار هم حالت جدیدی نداریم، نباید جواب در $۲!=۲$ ضرب شود. پس:

تعداد کلمات $۵!=۱۲۰$

ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ را به طریقی کنار هم قرار داده‌ایم که همواره رقم‌های فرد کنار هم باشند، تعداد پنج رقمی‌های حاصل کدام است؟

❶ ۱۲ ❷ ۲۴ ❸ ۳۶ ❹ ۴۸

گزینه ۳

رقم‌های فرد را به هم طناب‌پیچ می‌کنیم و موقتاً به عنوان یک شیء در نظر می‌گیریم:

۴	۲	۱,۳,۵

این شیء با دو رقمِ ۲ و ۴ سه شیء تشکیل داده و دارای $۳!$ جایگشت است. اما سه رقم طناب‌پیچ شده هم در کنار هم دارای $۳!$ جایگشت هستند. در نتیجه:

$$۳! \times ۳! = ۶ \times ۶ = ۳۶$$

به چند طریق می‌توان ۳ کتاب ریاضی یکسان و ۳ کتاب شیمیِ مختلف را کنار هم قرار داد به‌طوری که کتاب‌های ریاضی همگی کنار هم باشند؟

❶ ۱۸ ❷ ۲۴ ❸ ۳۶ ❹ ۷۲

گزینه ۲

کتاب‌های ریاضی را طناب‌پیچ کرده و به عنوان یک کتاب در نظر می‌گیریم. این کتاب به همراه ۳ کتاب شیمی، چهار کتاب تشکیل داده و تعداد جایگشت‌های آن‌ها برابر است با:

$$۴! = ۲۴$$

توجه کنید:

چون سه کتاب ریاضی یکسان داده شده‌اند، عدد بالا را نباید در $۳!$ ضرب کنید!

با حروف کلمه‌ی subtitle چند کلمه‌ی هشت حرفی می‌توان نوشت که حروف صدادار در کنار هم و حروف t نیز کنار هم باشند؟

❶ ۷۲۰ ❷ ۳۶۰ ❸ ۱۲۰ ❹ $۸!$

گزینه ۱

طبق تکنیک طناب‌پیچ:

s b l uie tt

پنج شیء دارای $۵!$ جایگشت بوده و سه حرف صدادار در کنار هم $۳!$ جایگشت دارند. در کل:

$$۵! \times ۳! = ۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$$

شمارش تعداد زیر مجموعه‌های یک مجموعه را کامل بیان می‌کنیم.

مثال: مجموعه‌ی $A = \{a, b, c, d, e\}$ را در نظر بگیرید:

الف) A چند زیرمجموعه دارد؟ ب) چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی دارد؟

پ) در چند زیر مجموعه‌ی ۳ عضوی، حرف d وجود دارد؟

پاسخ

الف) و ب): چون A پنج عضو دارد، تعداد زیرمجموعه‌های آن $۳۲ = ۲^۵$ و تعداد زیرمجموعه‌های سه عضوی آن برابر $\binom{۵}{۳} = \binom{۵}{۲} = \frac{۵ \times (۵-۱)}{۲} = ۱۰$ است.

پ) وقتی حرف d به اجبار در مجموعه قرار دارد، باید ۲ حرف دیگر از بین ۴ حرف باقی‌مانده انتخاب شود:

$$\binom{۴}{۲} = \frac{۴ \times ۳}{۲} = ۶$$

در مورد شمارش تعداد زیرمجموعه‌های یک مجموعه با n عضو، گاهی تمام زیرمجموعه‌ها مورد نظر است:

نکته ۴

حالت اول:

- تعداد کل زیرمجموعه‌ها برابر است با ۲^n.
- تعداد کل زیرمجموعه‌هایی که شامل k عضو خاص باشند یا نباشند برابر است با ۲^{n-k}.

نمونه‌هایی مرتبط:

- مجموعه‌ی $A=\{۱,۲,۳,۴,۵,۶\}$ دارای $۲^۶=۶۴$ زیرمجموعه است.
- مجموعه‌ی A دارای $۲^{۶-۳}=۲^۳=۸$ زیرمجموعه از عددهای فرد است.

گاهی تعداد زیرمجموعه‌ها با تعداد عضو مشخص از مجموعه‌ی n عضوی مورد نظر است:

نکته ۵

حالت دوم:

- تعداد زیرمجموعه‌های r عضوی برابر است با $\binom{n}{r}$.
- تعداد انتخاب‌های r عضو به‌طوری که شامل k عضو خاص باشد، برابر است با $\binom{n-k}{r-k}$.
- تعداد انتخاب‌های r عضو به‌طوری که شامل k عضو خاص نباشد، برابر است با $\binom{n-k}{r}$.

توجه:

نیازی به حفظ کردن فرمول‌های بالا نیست، مانند چند نمونه‌ی بعد، کافی است طبق شرایط، استدلالی ساده بیان کنید.

مثال: فرض کنید در یک جمع ۹ نفر حاضر هستند.

الف) به چند طریق می‌توان از بین آن‌ها ۵ نفر انتخاب کرد به طوری که شامل ۳ فرد خاص باشد؟

ب) به چند طریق می‌توان ۴ نفر انتخاب کرد که ۲ شخص خاص در بین آن‌ها نباشد؟

پاسخ

الف) می‌خواهیم ۵ نفر انتخاب کنیم، ولی ۳ نفر از قبل به‌طور اجبار انتخاب شده‌اند. در نتیجه باید از بین ۶ نفر باقی‌مانده ۲ نفر انتخاب گردند:

$$\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

ب) می‌خواهیم ۴ نفر انتخاب کنیم، ولی چون ۲ نفر حق انتخاب شدن ندارند، ۴ فرد مورد نظر باید از بین ۷ فرد باقی‌مانده انتخاب گردند:

$$\binom{۷}{۴} \xrightarrow{=} \binom{۷}{۳} = \frac{۷\times۶\times۵}{۲\times۳} = ۷\times۵ = ۳۵$$

تعداد زیر مجموعه‌های ۵ عضوی مجموعه‌ی $\{۱,۲,۳,۴,\ldots,۱۰\}$ که شامل عضو ۱ باشند، ولی شامل عضوهای ۸ و ۳ نباشند، کدام است؟

❶ $\binom{۷}{۴}$ ❷ $\binom{۶}{۳}$ ❸ $\binom{۱۰}{۵}$ ❹ $\binom{۸}{۴}$

گزینه ۱

عضو ۱ اجباراً انتخاب شده است و بنابراین باید چهار عدد از بین هفت عدد (تمام عددها به جز ۱ و ۳ و ۸) انتخاب شوند:

$$\binom{۷}{۴}$$

تعداد زیر مجموعه‌های چهار عضوی مجموعه‌ی $\{۰,۱,۲,۴,۶,۸,۹\}$ که شامل عدد ۸ باشد، ولی شامل عدد ۴ نباشد، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۵۰ ❷ ۴۰ ❸ ۱۰ ❹ ۴۰

گزینه ۳

فقط باید سه عدد از بین $\{۰,۱,۲,۶,۹\}$ انتخاب شود:

$$\binom{۵}{۳} \xrightarrow{=} \binom{۵}{۲} = \frac{۵\times۴}{۲} = ۱۰$$

تعداد زیر مجموعه‌های پنج عضوی از $\{۱۰,\ldots,۴,۳,۲\}$ که حاصل‌ضرب اعضای آن مضرب ۳ باشد، کدام است؟

❶ ۲۴۰ ❷ ۹۶ ❸ ۱۲۰ ❹ ۱۴۴

گزینه ۳

توجه کنید:

باید لااقل یکی از رقم‌های ۳، ۶ یا ۹ در مجموعه باشد تا ضرب اعضاء بر ۳ بخش‌پذیر شود.

روش متمم کوتاه است:

- تعداد کل: $\binom{۹}{۵} = \binom{۹}{۴} = \frac{۹\times۸\times۷\times۶}{۱\times۲\times۳\times۴} = ۳\times۱\times۷\times۶ = ۱۲۶$
- تعداد زیر مجموعه‌های پنج عضوی بدون آن سه عدد:

$$\binom{۶}{۵} = \binom{۶}{۱} = ۶$$

جواب نهایی $۱۲۶ - ۶ = ۱۲۰$ است.

از میان ۵ حقوق‌دان، ۶ اقتصاددان و ۴ جامعه شناس قرار است کمیته‌ای ۴ نفره انتخاب شود به طوری که از هر رشته لااقل یک نفر در کمیته باشد. کمیته به چند طریق قابل تشکیل است؟

❶ ۸۴۰ ❷ ۷۲۰ ❸ ۶۴۰ ❹ ۹۶۰

گزینه ۲

باید از یک رشته دو نفر و از دو رشته‌ی دیگر هر کدام یک نفر انتخاب شوند که در کل سه حالت داریم:

$$\binom{۵}{۲}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۲}\times\binom{۴}{۱}+\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۴}{۲}=۱۰\times۶\times۴+۵\times۱۵\times۴+۵\times۶\times۶$$

$$=۲۴۰+۳۰۰+۱۸۰=۷۲۰$$

روش کوتاه‌تر:

از هر رشته یک نفر انتخاب کرده و در پایان یک نفر هم از ۱۲ فرد باقی‌مانده انتخاب می‌کنیم؛ البته برای حذف حالات تکراری، باید عدد حاصل بر ۲ تقسیم گردد:

$$\frac{\binom{۵}{۱}\times\binom{۶}{۱}\times\binom{۴}{۱}\binom{۱۲}{۱}}{۲}=\frac{۵\times۶\times۴\times۱۲}{۲}=۵\times۳\times۴\times۱۲=۷۲۰$$

در پایان، یک تکنیک شمارشی می‌آوریم که ممکن است مورد نیاز واقع شود.

نکته ۶

جایگشت‌های با تکرار:

اگر در میان n شیء موجود، $n_۱$ تا یکسان از نوع اول، $n_۲$ تا یکسان از نوع دوم، ... و n_k تا یکسان از نوع kام باشند، آنگاه تعداد جایگشت‌های این n شیء برابر است با:

$$\frac{n!}{n_۱!\times n_۲!\times\cdots\times n_k!}$$

مثال: توسط رقم‌های ۱، ۱، ۱، ۶ و ۸، چند عدد پنج رقمی می‌توان نوشت؟

پاسخ

باید از جایگشت‌های با تکرار استفاده کنیم. کل ارقام ۵ تا هستند که ۳ تای آن‌ها تکراری است:

$$\frac{۵!}{۳!}=\frac{۵\times۴\times۳!}{۳!}=۵\times۴=۲۰$$

با حروف کلمه **FARHAD** چند رمز عبور شش حرفی می‌توان ساخت طوری که دو حرف **A** در کنار هم نباشند؟ (کنکور ۱۳۹۶)

❶ ۲۴۰ ❷ ۱۲۰ ❸ ۳۰۰ ❹ ۱۸۰

گزینه ۱

باید تکنیک متمم به‌کار رود:

تعداد کل حالات طبق نکته‌ی قبل: $\frac{۷۲۰}{۲}=۳۶۰=\frac{۶!}{۲!}$ و تعداد حالاتی که **A** ها کنار هم باشند، طبق روش طناب‌پیچ:

$$۵!=۱۲۰$$

پس تعداد رمزها برابر است با:

$$۳۶۰-۱۲۰=۲۴۰$$

TEST تمرین تست

۱ ساختمانی دارای دو درب و یک مجتمع فروشگاهی دارای پنج درب است. یک شخص به چند طریق می‌تواند از درب‌های ساختمان اول خارج و از درب‌های فروشگاه داخل آن شود؟

۱) ۵ ۲) ۷ ۳) ۱۰ ۴) ۳

۲ با ارقام ۰، ۲، ۴، ۷ و ۹ چند عدد سه رقمی کوچک‌تر از ۴۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت؟

۱) ۶۰ ۲) ۴۸ ۳) ۲۴ ۴) ۱۲

۳ سه کتاب متمایز ریاضی و چهار کتاب متمایز ادبی را به چند طریق می‌توان در یک قفسه قرار داد که کتاب‌های ریاضی همواره کنار هم باشند؟

۱) ۱۸۰ ۲) ۳۶۰ ۳) ۵۴۰ ۴) ۷۲۰

۴ سه کتاب ریاضی، دو کتاب فیزیک و دو کتاب شیمی را به چند طریق می‌توان کنار هم در قفسه‌ای چید به‌طوری که کتاب‌های هر درسی پهلوی هم باشند؟

۱) ۳۶ ۲) ۵۴ ۳) ۷۲ ۴) ۱۴۴

۵ چند عدد پنج رقمی یافت می‌شود که رقم یکان آن‌ها ۳ و رقم سمت چپ آن‌ها ۷ بوده و رقم تکراری نداشته باشد؟

۱) ۵۱۲ ۲) ۵۰۴ ۳) ۳۳۶ ۴) ۲۱۶

۶ در پرتاب یک تاس سفید و یک تاس قرمز با هم، در چند حالت عدد تاس قرمز از عدد تاس سفید کمتر است؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۱۰ ۴) ۵

۷ یک مجموعه‌ی ۱۰ عضوی چند زیرمجموعه‌ی ۸ عضوی دارد؟

۱) ۳۵ ۲) ۴۰ ۳) ۴۵ ۴) ۵۰

۸ از بین ۶ داوطلب گروه ریاضی و ۴ داوطلب گروه تجربی، ۴ نفر به تصادف انتخاب می‌شوند. در چند حالت ۲ نفر از گروه ریاضی است؟

۱) ۴۵ ۲) ۹۰ ۳) ۲۴ ۴) ۳۶

۹ نُه عدد گوی با شماره‌های ۱، ۲، . . . . . و ۹ در ظرفی قرار دارد. دو گوی به تصادف خارج می‌کنیم. در چند حالت هر دو گوی عدد زوج است؟

۱) ۴ ۲) ۶ ۳) ۸ ۴) ۱۲

۱۰ از جعبه‌ای که شامل ۵ مهره سفید و ۶ مهره سیاه است، ۲ مهره به تصادف خارج می‌کنیم. در چند حالت مهره‌ها همرنگ هستند؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۱۱ به چند طریق می‌توان از بین ۷ تهرانی، ۵ اصفهانی و ۴ نفر تبریزی دو نفر انتخاب کرده که همشهری نباشند؟

۱) ۸۹ ۲) ۸۷ ۳) ۸۳ ۴) ۸۱

۱۲ به چند طریق می‌توان بین اعداد ۱ تا ۵۰ دو عدد طبیعی انتخاب کرد که حاصل‌ضرب آن‌ها زوج باشد؟

۱) ۹۲۵ ۲) ۸۲۵ ۳) ۷۲۵ ۴) ۶۲۵

۱۳ با ارقام ۹، ۸، ۵، ۲ و ۰ چند عدد سه رقمی مضرب ۵ و بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۲۱ ۲) ۱۲ ۳) ۲۵ ۴) ۱۸

۱۴ در چند عدد چهار رقمی با ارقام ۲، ۳، ۵، ۸ و ۹ رقم تکراری وجود دارد؟

۱) ۴۰۵ ۲) ۵۰۵ ۳) ۱۲۰ ۴) ۶۲۵

۱۵ مطابق شکل، بین چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. به چند روش می‌توان از A به D رفت به شرطی که از هر شهر دقیقاً یک بار عبور کنیم؟



۱) ۶ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۴

۱۶ قرار است افراد A، B، C و D در یک همایش سخنرانی کنند. اگر قرار باشد بین A و B دقیقاً یک نفر سخنرانی کند، چند روش وجود دارد؟

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۳۲

۱۷ با حروف کلمه‌ی sport تمام کلمه‌های ممکن را نوشته‌ایم. به ترتیب در چند حالت «حروف s، p و o کنار هم قرار دارند؟» و «عبارت spo در کلمه‌ها دیده می‌شود؟»

۱) ۱۸ و ۱۲ ۲) ۳۶ و ۱۲ ۳) ۶ و ۶ ۴) ۳۶ و ۶

۱۸ با رقم‌های ۲,۲,۳,۳,۳,۵,۷ چند عدد هفت رقمی می‌توان نوشت که در آن‌ها ارقام ۲ کنار هم و ارقام ۳ نیز کنار هم باشند؟

۱) $7!$ ۲) $4!$ ۳) $4!\times 3!\times 2!$ ۴) $4!\times 3!\times 2!\times 2!$

۱۹ دو کتاب منطق، دو کتاب اقتصاد و سه کتاب ریاضی را به چند روش می‌توانیم در کتابخانه قرار دهیم به طوری که کتاب‌های اقتصاد کنار هم و کتاب‌های ریاضی نیز در کنار هم باشند؟

۱) ۲۴ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۲۸۸

۲۰ تعداد جایگشت‌های چهار حرفی حروف کلمه‌ی SANTOR که دو حرف R و O حتماً در آن‌ها وجود داشته باشد، کدام است؟

۱) ۷۲ ۲) ۱۲۲ ۳) ۱۴۴ ۴) ۴۶۲

۲۱ چند جایگشت شش حرفی از حروف کلمه‌ی honest می‌توان نوشت که حروف o و t در کنار هم و حروف h، n و s نیز در کنار هم باشند؟

۱) ۱۸ ۲) ۱۲ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

۲۲ چند عدد طبیعی چهار رقمی فرد وجود دارد که ارقام دهگان و صدگان آن‌ها فرد نباشد؟

۱) ۶۲۵ ۲) ۷۲۰ ۳) ۱۲۲۵ ۴) ۱۲۵۰

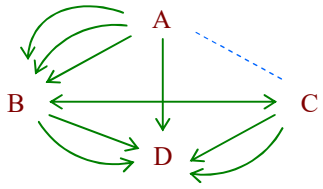
۲۳ می‌خواهیم هفت کتاب گوناگون را با شرایط زیر بین سه دانش‌آموز توزیع کنیم:
یکی از کتاب‌ها را شانسی به یک دانش‌آموز خاص داده و بقیه را به طور مساوی بین دو نفر دیگر توزیع کنیم.
چند روش وجود دارد؟

۱) ۷۷ ۲) ۱۰۰ ۳) ۱۸۰ ۴) ۱۴۰

۲۴ با ارقام ۰ تا ۶ چند عدد چهار رقمی فرد بزرگ‌تر از ۲۰۰۰ و کوچک‌تر از ۵۰۰۰ بدون تکرار ارقام می‌توان ساخت؟

۱) ۲۰۰ ۲) ۱۲۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۲۴۰

۲۵ مطابق شکل، بین چهار شهر راه‌هایی وجود دارد. اگر بتوان به ۲۹ روش از A به D سفر کرد، به چند روش می‌توان از A به C رفت؟ (فقط راه بین B و C دو طرفه است.)



۱) ۴
۲) ۵
۳) ۹
۴) ۳

۲۶ با حروف «مصادف» چند کلمه‌ی پنج حرفی می‌توان نوشت به طوری که بین «م» و «ص» دقیقاً یک حرف قرار گرفته و حرف «د» در آخر کلمه باشد؟ (معنی کلمات مهم نیست.)

۱) ۴ ۲) ۸ ۳) ۱۲ ۴) ۱۶

۲۷ به چند روش می‌توان در یک آزمون چهار گزینه‌ای، لااقل به نه سؤال از ده سؤال به تصادف پاسخ داد؟

۱) $۴^{۹}+۴^{۱۰}$ ۲) ۷×۴^{۱۰} ۳) ۷×۴^{۹} ۴) ۱۴×۴^{۹}

۲۸ شش رقم ۷، ۸، ۳، ۲، ۴ و ۸ را از مقوا بریده و هر سه رقم انتخابی از آن‌ها را در کنار هم جابجا می‌کنیم. چند عدد سه رقمی متمایز حاصل می‌شود؟ **(کنکور ۹۵)**

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۶۰ ۴) ۶۳

۲۹ با حروف کلمه‌ی **SAZESH** چند رمز عبور سه حرفی می‌توان ساخت؟ **(کنکور ۹۷ خارج)**

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۸۱ ۴) ۸۴

۳۰ با ارقام موجود در مجموعه‌ی $\{1,2,4,6,7,8\}$ چند عدد پنج رقمی فرد، بدون تکرار رقم‌ها می‌توان نوشت؟ **(کنکور ۹۸)**

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۸۰ ۳) ۲۴۰ ۴) ۳۰۰

۳۱ با ارقام ۷، ۶، ۴، ۹، ۱ و ۵ چند عدد سه رقمی می‌توان نوشت به طوری که در همه‌ی آن‌ها، شرط زیر برقرار باشد؟
(بدون تکرار ارقام)

یکان > صدگان > دهگان

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۲۰ ۴) ۲۵

۳۲ در یک اتومبیل معمولی، پنج نفر به چند طریق می‌توانند بنشینند به طوری که ۳ نفر آن‌ها، مجاز به رانندگی باشند؟
(کنکور ۱۳۹۹)

۱) ۷۲ ۲) ۷۵ ۳) ۸۴ ۴) ۶۰

۳۳ با ارقام ۰،۱،۲،۴،۵،۷ چند عدد سه رقمی فرد بدون تکرار رقم‌ها که مضرب ۵ نباشد، می‌توان نوشت؟
(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

۱) ۴۸ ۲) ۴۰ ۳) ۳۶ ۴) ۳۲

۳۴ سه نفر به همراه علی و حسن قرار است در یک هتل، هر کدام در یک اتاق، اقامت کنند. هتل سه اتاق خالی کنار هم در یک طرف راهرو و دو اتاق دیگر در کنار هم در طرف دیگر راهرو دارد. به چند طریق، این افراد می‌توانند در اتاق‌ها اقامت کنند، به طوری که علی و حسن در اتاق‌های کنار هم ساکن شوند؟ **(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)**

۱) ۸ ۲) ۲۴ ۳) ۳۶ ۴) ۷۲

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴