۱۲

آموزش مفهومی ریاضی

درسنامه:

ریاضی دوازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

نهایی ۲۰

ساختار جدید

بهینه شده ویژه نهایی

محتوای جامع آموزش
(درسنامه دقیق + مثال‌های فراوان و متنوع)

پوشش کامل محتوای کتاب
(شامل مثال‌ها، فعالیت‌ها و تمرینات برگزیده)

تمرینات پوششی
(طرح انواع سؤالات ممکن نهایی بخش به بخش + پاسخ‌نامه)

سؤالات چالشی
(طرح شده به صورت جداگانه ویژه علاقمندان)

پوشش و بررسی آخرین آزمون‌های نهایی
Up to date

فهرست

آموزش:

ریاضی دوازدهم تجربی

۱

تابع

فهرست	صفحه

یادآوری:

روش انجام چند نوع تغییر نسبتاً ساده در نمودار یک تابع از همین ابتدا مورد نیاز است؛ قبل از هر چیز، آن‌ها را یـادآوری می‌کنیم. (بحث کامل، کمی پیش‌تر آورده شده است.)

فرض کنید نمودار یک تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم.

انتقال افقی:

برای رسم $y=f(x-a)$، نمودار f به صورت افقی به اندازه‌ی a به سمت راست و برای رسم $y=f(x+a)$، نمودار f به صورت افقی به اندازه‌ی a به سمت چپ منتقل می‌شود. $(a>0)$

انتقال عمودی:

برای رسم $y=f(x)+k$، نمودار f به صورت عمودی به اندازه‌ی k به سمت بالا و برای رسم $y=f(x)-k$، نمودار f به صورت عمودی به اندازه‌ی k به سمت پایین منتقل می‌شود. $(k>0)$.

قرینه‌سازی:

رسم $y=-f(x)$ با قرینه سازی نمودار f نسبت به محور طول انجام می‌شود.

۱ توابع چند جمله‌ای

شکل کلی تابع چندجمله‌ای:

$$f(x)=ax^n+bx^{n-1}+\cdots+kx+l$$

که ضرایب $a\neq 0$، b، . . . ، k و l عددهایی حقیقی و $n\geq 0$ عددی صحیح (درجه‌ی تابع) است. چون محدودیتی برای مقدار گذاری در این توابع وجود ندارد، دامنه برابر $\mathbb{R}$ است. چند حالت ویژه از این نوع توابع:

- **تابع ثابت:**

  ساده‌ترین تابع به صورت $f(x)=c$، چند جمله‌ای درجه‌ی صفر است. (**c عدد ثابت**)

- **تابع خطی:**

  به صورت $f(x)=ax+b$، چند جمله‌ای درجه‌ی یک است.

- **تابع درجه دوم:**

  این تابع به صورت $f(x)=ax^2+bx+c$ بوده، نمودارش همیشه یک سهمی است که در پایه‌ی یازدهم بررسی گردید.

- **تابع درجه سوم:**

  این تابع به شکل کلی $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ است؛ بررسی بیشتری از آن در ادامه انجام خواهد شد.

مثال: نمودار یک تابع خطی، خط $x=2$ را در نقطه‌ای به عرض ۵ و خط $y=1$ را در نقطه‌ای به طول ۴ قطع کرده است. نقطه‌ی برخورد نمودار این تابع با محور طول را مشخص کنید.

پاسخ

تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. باید:

- نمودار از نقطه‌ی $(۲,۵)$ عبور کند و بنابراین:

$$a(۲)+b=۵ \Rightarrow ۲a+b=۵$$

- همچنین نقطه‌ی $(۴,۱)$ روی نمودار است:

$$a(۴)+b=۱ \Rightarrow ۴a+b=۱$$

از حل دستگاه $\begin{cases} ۲a+b=۵ \\ ۴a+b=۱ \end{cases}$ خواهیم داشت: $a=-۲$ و $b=۹$. در نتیجه ضابطه به صورت $f(x)=-۲x+۹$ معلوم می‌شود. برخورد نمودار با محور طول‌ها:

$$y=۰:\ -۲x+۹=۰ \ \rightarrow\ ۲x=۹ \ \rightarrow\ x=۴/۵ \ \Rightarrow\ (۴/۵,۰)$$

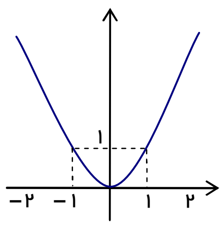
مثال: توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=x^۳$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودارهای هر دو تابع را رسم کنید.

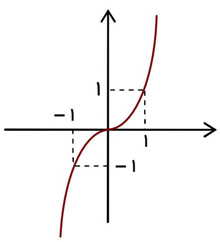
ب) توسط نمودار، مجموعه جواب نامعادله‌های $f(x)>g(x)$ و $f(x)\geq g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

الف) هر دو نمودار با تشکیل جدول مقادیر به آسانی رسم می‌شوند:



x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=x^۲$	۴	۱	۰	۱	۴



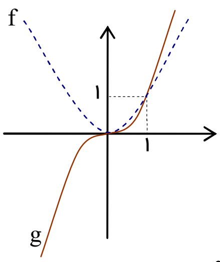
x	-۲	-۱	۰	۱	۲
$y=x^۳$	-۸	-۱	۰	۱	۸

ب) می‌دانیم:

عددهای بین صفر و یک هر قدر به توان بزرگ‌تری برسند، مقدارشان کوچک‌تر می‌شود. یعنی:

$$۰<x<۱ \ \Rightarrow\ x^۳<x^۲$$

بنابراین دو نمودار بالا در مقایسه با هم چنین خواهند بود:



اکنون:

- در مجموعه جواب نامعادله‌ی $f(x)>g(x)$، باید نمودار f بالاتر از نمودار g قرار داشته باشد:

$$f(x)>g(x) \ \Rightarrow\ x\in(-\infty,۰)\cup(۰,۱)$$

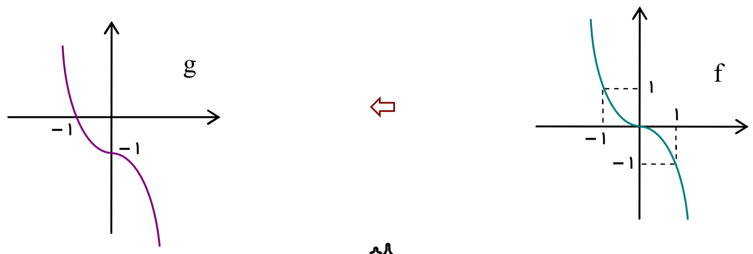
- در نامعادله‌ی $f(x)\geq g(x)$، علاوه بر جواب بالا، نقاط برخورد نمودارها نیز عرض یکسان داشته و قابل قبول هستند:

$$f(x)\geq g(x) \ \Rightarrow\ x\in(-\infty,۱]$$

مثال: با توجه به نمودار $y=x^{۳}$؛

الف) هنگام رسم نمودار $f(x)=-x^{۳}$، نمودار تابع فوق نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

ب) برای رسم نمودار $g(x)=-x^{۳}-۱$، نمودار f یک واحد به پایین منتقل می‌شود.



---✧---

مثال: فقط توضیح دهید نمودار تابع $y=-(x-۱)^{۳}+۳$ چگونه توسط نمودار $y=x^{۳}$ رسم می‌شود.

پاسخ

نمودار در طی سه مرحله رسم می‌شود:

- بعد از رسم $y=x^{۳}$، نمودار یک واحد به راست منتقل شده تا $y=(x-۱)^{۳}$ رسم شود.
- نمودار حاصل در مرحله‌ی قبل را نسبت به محور طول قرینه کرده تا $y=-(x-۱)^{۳}$ رسم شود.
- نمودار حاصل از مرحله‌ی قبل را ۳ واحد به صورت عمودی به بالا انتقال داده تا $y=-(x-۱)^{۳}+۳$ رسم شود.

---✧---

(بررسی بیشتری از توابع چند جمله‌ای در ادامه‌ی همین مبحث)

پاسخ دهید (۱)

۱– نمودار تابع $y=۲-x^{۳}$ را به کمک نمودار $f(x)=x^{۳}$ رسم کنید.

۲– نمودار تابع $y=x^{۳}-۳x^{۲}+۳x$ را به کمک نمودار $f(x)=x^{۳}$ رسم کنید.

۳– اگر $f(x)=x^{۳}$ باشد، با رسم نشان دهید نمودارهای دو تابع $y=f(x-۱)$ و $y=f(x)-۱$ در دو نقطه مشترک هستند.

سؤال ترکیبی:

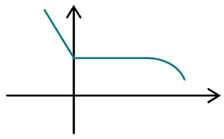
۱– محدوده‌ای که در آن نمودار تابع $f(x)=x^{۳}$ پایین‌تر از نمودار تابع $g(x)=x|x|$ قرار دارد را مشخص کنید.

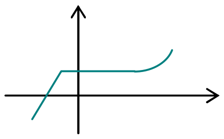
۲ توابع یکنوا

فرض کنیم f یک تابع و $x_1, x_2 \in D_f$ دلخواه باشند.

❖ f را **«صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \le f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا زیاد شود.

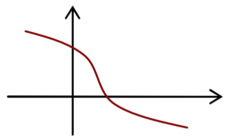
❖ f را **«نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) \ge f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع یا ثابت بماند و یا کم شود.

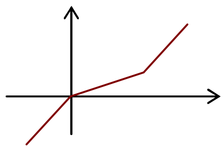

تابع نزولی


تابع صعودی

❖ تابع f را **«اکیداً صعودی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) < f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع زیاد می‌شود.

❖ تابع f را **«اکیداً نزولی»** گوییم، هرگاه اگر $x_1 < x_2$ باشد، آنگاه $f(x_1) > f(x_2)$. یعنی:
با زیاد شدن x، مقدار تابع کم می‌شود.


تابع اکیداً نزولی


تابع اکیداً صعودی

بعلاوه:

تابع صعودی یا نزولی را **«یکنوا»** و تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی را **«اکیداً یکنوا»** گوییم.

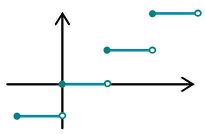
توجه کنید:

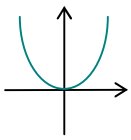
طبق تعاریف بالا، هر تابع اکیداً صعودی، تابع صعودی هم محسوب می‌شود؛ همچنین تابع اکیداً نزولی، نزولی هم هست.

مثال: با رسم نمودار، یکنوایی توابع $y=[x]$، $y=x^2$، $y=x|x|$، $y=x^3$ و $y=|x|+x$ را روی دامنه بررسی کنید.

پاسخ

- تابع پله‌ای $y=[x]$ صعودی است، ولی صعودی اکید نیست.





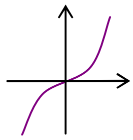
- سهمی $y=x^2$ در دامنه یکنوا نیست:

توجه کنید:

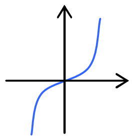
این تابع در بازه‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً نزولی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

- نمودار تابع $y=x|x|$ به‌صورت زیر بوده و صعودی اکید است:

$$y=x|x|=\begin{cases}-x^2 & x<0\\ x^2 & x\geq 0\end{cases}$$

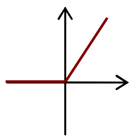


- نمودار تابع $y=x^3$ را قبلاً دیده‌ایم و صعودی اکید است:



- نمودار تابع $y=|x|+x$ به‌صورت زیر، صعودی بوده، ولی صعودی اکید نیست:

$$y=x+|x|=\begin{cases}0 & x<0\\ 2x & x\geq 0\end{cases}$$



چنان‌که می‌بینید:

تابع روی بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

مثال: تابع $y=(x+1)^3$ در دامنه‌ی خود . . . . (صعودی – نزولی) است.

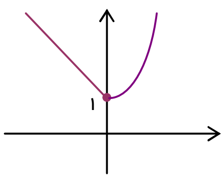
پاسخ

صعودی؛ چون نمودار صعودیِ $y=x^3$ فقط یک واحد به چپ منتقل می‌شود.

مثال: نمودار تابع $y=\begin{cases}x^2+1 & x\geq 0\\ -x+1 & x<0\end{cases}$ را رسم کرده و نتیجه بگیرید یکنوا نیست.

پاسخ

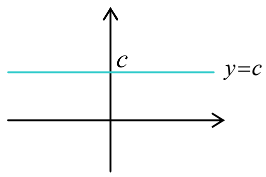
برای $x\geq 0$ نمودار با انتقال نیم‌سهمی $y=x^2+1$ و برای $x<0$ نیم‌خط $y=-x+1$ را رسم می‌کنیم:



می‌بینید نمودار ابتدا کاهشی و سپس افزایشی است؛ پس در کل روی دامنه یکنوا نیست.

حالت خاص:

تابع ثابت $f(x)=c$ (نمودار: خط افقی) هم شرط صعودی بودن را دارد و هم شـرط نزولـی بـودن را؛ پـس تـابع ثابـت روی دامنه‌ی خود، هم صعودی و هم نزولی است. (ولی یکنوای اکید نیست.)



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

بی‌شمار تابع وجود دارد که هم صعودی و هم نزولی است. (**درست** ☐ – **نادرست** ☐)

پاسخ

درست است، زیرا:

بی‌شمار تابع ثابت وجود دارد؛ مانند $f(x)=0$ و $f(x)=-1$ و ...

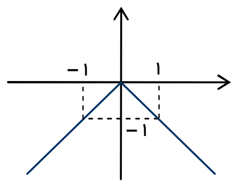
توجه کنید:

چنان‌که در بالاتر هم دیدیم، گاهی یک تابع روی دامنه‌ی خود یکنوا نیست؛ اما:

می‌توان دامنه‌ی آن را طوری محدود انتخاب کرد، تا در آن دامنه یکنوا باشد.

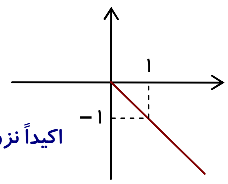
برای نمونه:

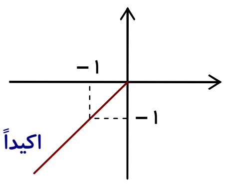
تابع $y=-|x|$ یکنوا نیست:



ولی:

- روی بازه‌ی $[0,\infty)$ اکیداً نزولی است.
- روی بازه‌ی $(-\infty,0]$ اکیداً صعودی است.



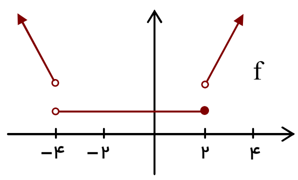


نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

با توجه به نمودار تابع f، در جدول زیر برای هر یک از قسمت‌های ستون **(۱)**، قسمت صحیح از ستون **(۲)** را انتخاب کنید.

(یکی از قسمت‌های ستون **(۲)** اضافه است.)

(۱)	(۲)
الف) تابع در این بازه اکیداً صعودی است.	۱) $(-\infty,-4)$
ب) تابع در این بازه اکیداً نزولی است.	۲) $(2,+\infty)$
پ) تابع در این بازه ثابت است.	۳) $(-1,+\infty)$
	۴) $[-4,2]$



پاسخ

طبق مفاهیم مربوطه:

(الف) ← (۲) (ب) ← (۱) (پ) ← (۴)

---✧---

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید:

الف) تابع $y=\sqrt{x}$ در دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

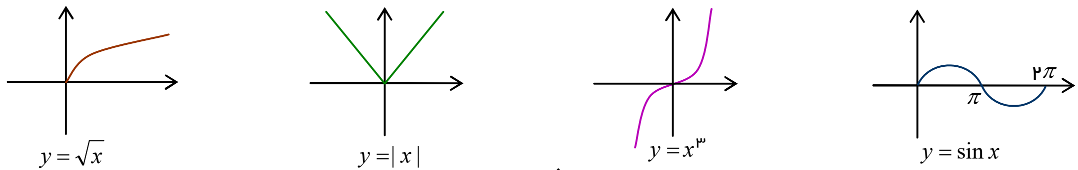
ب) تابع $y=|x|$ در بازه‌ی $[-۳,۰]$ اکیداً نزولی است.

پ) تابع $y=-x^{۳}$ در بازه‌ی $(-\infty,۰)$ صعودی است.

ت) تابع $y=\sin x$ در بازه‌ی $[۰,\pi]$ صعودی است.

پاسخ

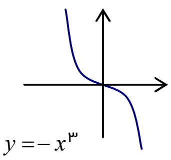
نمودارهای تقریبی توابع را در نظر می‌گیریم:



الف) با توجه به نمودار نادرست است.
ب) با توجه به نمودار درست است.

پ) نادرست است؛ زیرا:

باید نمودار $y=x^{۳}$ را نسبت به محور طول قرینه کنید؛ می‌بینید نمودار روی تمام دامنه اکیداً نزولی است:



ت) با توجه به نمودار نادرست است.

در واقع، تابع در $[۰,\frac{\pi}{۲}]$ صعودی اکید و در $[\frac{\pi}{۲},\pi]$ نزولی اکید است.

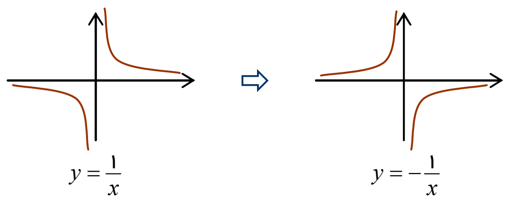
---✧---

مثال: نمودار توابع $f(x)=-\frac{۱}{x}$ و $g(x)=x-|x|$ را رسم کرده و فواصل یکنوایی هر یک را مشخص کنید.

پاسخ

- **نمودار f:**

نمودار شناخته شده‌ی $y=\frac{۱}{x}$ را رسم کرده و نسبت به محور طول قرینه می‌کنیم:

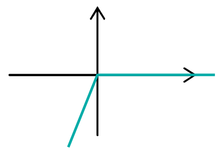


تابع f در هر دو بازه‌ی $(۰,+\infty)$ و $(-\infty,۰)$ اکیداً صعودی است. (**توجه:** تابع روی کل دامنه صعودی یا صعودی اکید نیست.)

- **نمودار g:**

ضابطه را گسترده نوشته و نمودار متشکل از دو نیم‌خط را رسم می‌کنیم:

$$f(x)=\begin{cases} ۲x & x<۰ \\ ۰ & x\geq ۰\end{cases}$$



می‌بینید که:

تابع در بازه‌ی $(-\infty,۰]$ اکیداً صعودی و روی $\mathbb{R}$ صعودی است. (در بازه‌ی $[۰,+\infty)$ نزولی هم محسوب می‌شود.)

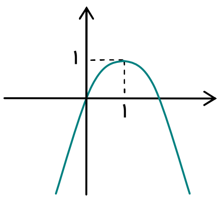
مثال: محدوده‌ی x را طوری تعیین کنید که تابع $y=۲x-x^۲$ در آن محدوده نزولی باشد.

پاسخ

ضابطه را با اضافه و کم کردن عدد ۱ به صورت مناسب زیر می‌نویسیم:

$$y=۲x-x^۲-۱+۱=-(x^۲-۲x+۱)+۱ \Rightarrow y=-(x-۱)^۲+۱$$

حالا می‌توانیم با تغییرات نمودار $y=x^۲$، نمودار تابع را رسم کنیم:



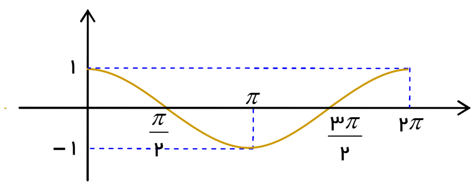
با نگاه به نمودار می‌بینید:

تابع در بازه‌ی $[۱,+\infty)$ اکیداً نزولی (همچنین نزولی) است.

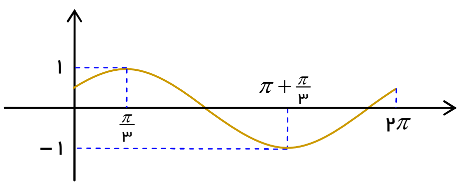
مثال: (از متن کتاب) نمودار تابع $f(x)=\cos(x-\frac{\pi}{۳})$ را در بازه‌ی $[۰,۲\pi]$ رسم کرده و مشخص کنید در چه بازه‌ای صعودی و در چه بازه‌ای نزولی است.

پاسخ

نمودار شناخته شده‌ی $y=\cos x$ را به اندازه‌ی $\frac{\pi}{۳}$ به راست انتقال می‌دهیم:



⇨



می‌بینیم:

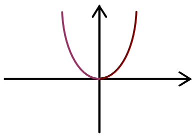
تابع در $[\frac{۴\pi}{۳},۲\pi]\cup[۰,\frac{\pi}{۳}]$ اکیداً صعودی و در $[\frac{\pi}{۳},\frac{۴\pi}{۳}]$ اکیداً نزولی است.

مثال: (از متن کتاب) تابع $y=x^۲|x|$ در بازه‌ی $(-\infty,a]$ نزولی است. حداکثر مقدار a را مشخص کنید.

پاسخ

ضابطه را گسترده نوشته و نمودار تقریبی تابع را رسم می‌کنیم:

$$y=\begin{cases} x^2(-x) & x<0 \\ x^2(x) & x\geq 0\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -x^3 & x<0 \\ x^3 & x\geq 0\end{cases}$$



بزرگ‌ترین بازه‌ی نزولی تابع $(-\infty,0]$ و در نتیجه حداکثر مقدار a برابر ۰ است.

---✧---

وقتی ضابطه شامل چند قدرمطلق است، برای رسم، ضابطه را باز کنید.

مثال: نمودار تابع $y=|x+2|+|x|$ را رسم کرده و محدوده‌ای را مشخص کنید که تابع در آن صعودی است.

پاسخ

با توجه به ریشه‌های داخل قدر مطلق‌ها، ضابطه باز می‌شود:

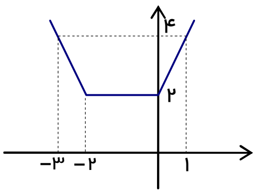
$$|x+2|:\ x+2=0 \rightarrow x=-2 \quad و \quad |x|:\ x=0$$

بنابراین با توجه به علامت داخل قدر مطلق‌ها در هر محدوده:

$$y=\begin{cases} -(x+2)-x & x<-2 \\ x+2-x & -2\leq x\leq 0 \\ x+2+x & x>0\end{cases} \Rightarrow y=\begin{cases} -2x-2 & x<-2 \\ 2 & -2\leq x\leq 0 \\ 2x+2 & x>0\end{cases}$$

با تشکیل جدول مقادیر، نمودار خط شکسته‌ی تابع رسم می‌شود:

x	-3	-2	0	1
y	4	2	2	4

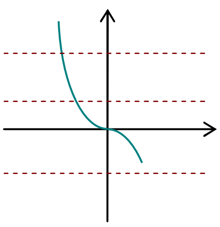


تابع در $[-2,+\infty)$ صعودی و در بازه‌ی $[0,+\infty)$ اکیداً صعودی است.

---✧---

مطلب پایانی:

واضح است که وقتی تابع در دامنه‌ی مربوطه اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، خط‌های افقی نمی‌توانند نمودار را در بیش از یک نقطه قطع کنند:



بنابراین:

یک نتیجه‌ی یکنوایی اکید، یک‌به‌یک بودن آن تابع است. بررسی بیشتر در بخش پایانی این فصل انجام خواهد شد.

سؤال:

آیا از یکنوایی تابع نیز می‌توان یک‌به‌یک بودن آن را نتیجه گرفت؟

پاسخ دهید (۲)

۱- جاهای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید:

الف) تابع $y=|x|-1$ در بازه‌ی .... نزولی است.

ب) تابع $y=ax+b$ برای هر مقدار .... a اکیداً صعودی است.

پ) هر تابع اکیداً صعودی، تابعی .... است.

ت) تابع $g(x)=x^2-4x+5$ در بازه‌ی $(-\infty,a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a .... است. **(نهایی؛ خرداد ۴۰۳)**

۲- در هر مورد عبارت مناسب را انتخاب کنید:

الف) اگر تابعی نزولی باشد، با حرکت بر روی نمودار از چپ به راست .... خواهیم رفت. (رو به بالا - رو به پایین)

ب) هر تابع ثابت، تابعی .... است. (صعودی - غیریکنوا)

ج) هر تابع اکیداً نزولی، تابعی .... است. (یک به یک - وارون‌ناپذیر)

۳- نمودار تابع $g(x)=\begin{cases} x+1 & x<-2 \\ -1 & -2\le x<1 \\ -2x & x\ge 1 \end{cases}$ را رسم کرده و:

الف) بزرگ‌ترین بازه‌هایی که تابع در آن‌ها صعودی، نزولی یا ثابت است را معلوم کنید.

ب) بازه‌هایی که تابع در آن نزولی یا نزولی اکیدا است چه تفاوتی دارند؟

۴- نمودار تقریبی تابع با ضابطه‌ی $y=a^x$ را در هر دو حالت $a>1$ و $0<a<1$ رسم کنید.

سپس:

یکنوایی توابع $f(x)=2^{2x}-3$ و $g(x)=3^{-x}+4$ را طبق قسمت قبل مشخص نمایید.

منتخب کتاب:

۱- نمودار تابعی را رسم کنید که در هر یک از بازه‌های $(-\infty,0)$ و $(0,\infty)$ اکیداً صعودی باشد، ولی در $\mathbb{R}$ اکیداً صعودی نباشد.

سؤال ترکیبی:

۱- بخش‌هایی از بازه‌ی $[0,\pi]$ که در آن تابع $y=\cos(\sin x)$ اکیداً صعودی است را مشخص کنید.

چالش (ویژه علاقمندان) CHALLENGE

f تابعی صعودی اکید با دامنه‌ی $\mathbb{R}$ و نمودار آن از مبدأ عبور کرده است. دامنـه‌ی تـابع $y=\sqrt{f(x)\left(2^{2x-x^2}-1\right)}$ را مشخص کنید.

۳ ترکیب توابع

در این بخش ترکیب دو تابع و ساخت توابعی جدید را خواهیم دید.

ضابطه تابع مرکب:

برای دو تابع f و g، «**ترکیب**» آن‌ها، تابع gof به صورت زیر محاسبه می‌شود:

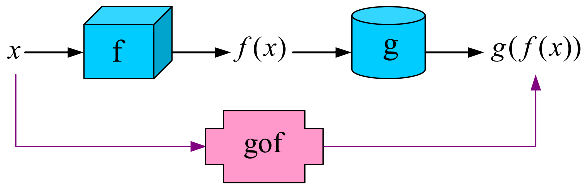
$$(gof)(x)=g(f(x))$$

یعنی:

در ضابطه‌ی تابع g، باید جای x عبارت $f(x)$ قرار گیرد.

توجه کنید:

ضابطه‌ی تابع مرکب fog نیز به صورت مشابه تعیین می‌شود. به نمودار مربوط به اثر تابع gof نگاه کنید:



چنان‌که می‌بینید:

برای $x\in D_f$، ابتدا تابع f آن را به $f(x)$ تبدیل کرده و سپس تابع g این خروجی را به عنوان ورودی گرفته و آن را به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند. (**توجه:** لازم است $f(x)\in D_g$ باشد.) نتیجه:

عملکرد تابع مرکب:

تابع gof، عضو $x\in D_f$ را یک‌باره به $g(f(x))$ تبدیل می‌کند.

(یعنی: اثر هر دو تابع f و g را به صورت متوالی دارد.)

مثال: برای توابع $f(x)=x^۲$ و $g(x)=\sqrt{x}$ ضابطه‌ی توابع fog و gof به صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$(fog)(x)=f(g(x))=f(\sqrt{x})=(\sqrt{x})^۲=x$$

$$(gof)(x)=g(f(x))=g(x^۲)=\sqrt{x^۲}=|x|$$

مثال: با داشتن توابع $f(x)=۲\sqrt{x}-۱$ و $g(x)=\dfrac{۲}{۳x-۴}$، مقادیر $(fog)(۴)$ و $(gof)(۴)$ را حساب کنید.

پاسخ

$$g(۴)=\frac{۲}{۳(۴)-۴}=\frac{۲}{۸}=\frac{۱}{۴}\ \Rightarrow\ (fog)(۴)=f(g(۴))=f(\tfrac{۱}{۴})=۲\sqrt{\frac{۱}{۴}}-۱=۱-۱=۰$$

$$f(۴)=۲\sqrt{۴}-۱=۳\ \Rightarrow\ (gof)(۴)=g(f(۴))=g(۳)=\frac{۲}{۳(۳)-۴}=\frac{۲}{۵}$$

---✧---

توجه کنید:

چنان‌که در نمونه‌های قبل می‌بینید، توابع fog و gof معمولاً برابر نیستند.

مثال: ضابطه‌ی $y=f(x)$ معادله‌ی خطی است که محور x را با طول -۲ و محور y را با عـرض ۱ قطع کـرده اسـت. مقدار $fof(۴)$ را بیابید.

پاسخ

تابع خطی را به صورت $f(x)=ax+b$ در نظر می‌گیریم. با جای‌گذاری نقاط داده شده‌ی $(-۲,۰)$ و $(۰,۱)$ در ضابطه‌ی f، این دو مجهول را تعیین می‌کنیم:

$$(۰,۱):\ ۱=a(۰)+b \ \to\ b=۱$$

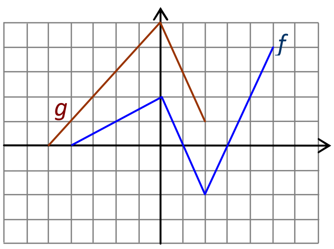
$$(-۲,۰):\ ۰=a(-۲)+b \xrightarrow{b=۱} -۲a+۱=۰ \ \to\ a=\frac{۱}{۲}$$

پس $f(x)=\frac{۱}{۲}x+۱$ بوده و در نتیجه:

$$f(۴)=\frac{۱}{۲}(۴)+۱=۲+۱=۳ \Rightarrow f(f(۴))=f(۳)=\frac{۱}{۲}(۳)+۱=۲/۵$$

---✧---

مثال: با استفاده از نمودار توابع داده شده، مقادیر زیـر را در صـورت امکان حساب کنید.



الف) $f(g(-۱))$ ب) $g(f(۲))$

پ) $g(f(۵))$ ت) $f(f(۳))$

پاسخ

مقادیر مورد نیاز در شکل دیده می‌شوند:

$$f(g(-۱))=f(۴)=۲$$

$$g(f(۲))=g(-۲)=۳$$

$$g(f(۵))=g(۴)$$ وجود ندارد. (نتیجه: عدد ۵ در دامنه‌ی تابع gof قرار ندارد.)

$$f(f(۳))=f(۰)=۲$$

---✧---

مثال: اگر $f=\{(۲,۱),(۱,۴),(۳,۰)\}$ و $g=\{(۱,۳),(۰,۳),(۲,۰)\}$، آنگاه تابع gof و دامنه و بـرد آن را مـشخص کنید.

پاسخ

تابع gof را روی اعضای دامنه‌ی f اثر می‌دهیم:

$$(gof)(۲)=g(f(۲))=g(۱)=۳$$

$$(gof)(۱)=g(f(۱))=g(۴)$$ تعریف نشده

$$(gof)(۳)=g(f(۳))=g(۰)=۳$$

بنابراین $gof=\{(۲,۳),(۳,۳)\}$ و در نتیجه:

$$R_{gof}=\{۳\} \quad و \quad D_{gof}=\{۲,۳\}$$

توجه به ضابطه‌ی $g(f(x))$، دامنه‌ی تابع gof را نیز مشخص می‌کند.

تعیین دامنه:

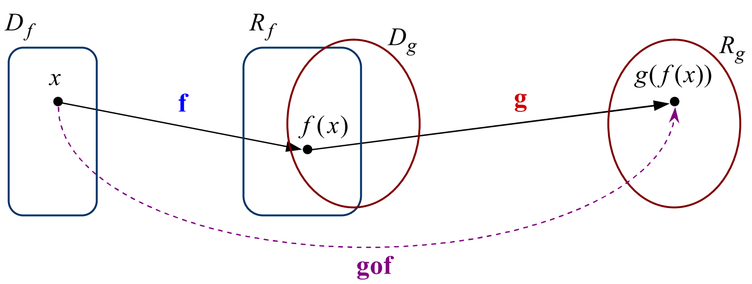
طبق آن‌چه گفته‌ایم: $gof(x)=g(f(x))$، پس برای آن‌که عدد x در دامنه‌ی تابع gof قرار گیرد، لازم است هر دو شرط زیر برقرار باشند:

اول: $x\in D_f$ و **دوم:** $f(x)\in D_g$

پس دامنه چنین محاسبه می‌شود:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

ببینید:



بنابراین:

باید بین D_f و مجموعه جواب شرط $f(x)\in D_g$ اشتراک بگیریم.

مثال: با داشتن دو تابع $f(x)=\sqrt{x-۱}$ و $g(x)=\dfrac{x-۱}{x}$:

الف) ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

ب) دامنه‌ی توابع gof و gog را توسط تعریف مشخص کنید.

پاسخ

الف) ضابطه تابع:

$$(gof)(x)=g(f(x))=\frac{f(x)-۱}{f(x)}=\frac{\sqrt{x-۱}-۱}{\sqrt{x-۱}}$$

ب) باید دامنه‌ی توابع داده شده تعیین شوند:

$$D_f:\quad x-۱\geq ۰ \quad\rightarrow\quad x\geq ۱$$

$$D_g:\quad x=۰ \quad\rightarrow\quad D=\mathbb{R}-\{۰\}$$

(بیان دیگر D_g، عبارت $x\neq ۰$ است.)

اکنون:

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}=\{x\geq ۱ \mid f(x)\neq ۰\}=\{x\geq ۱ \mid \sqrt{x-۱}\neq ۰\}$$
$$=\{x\geq ۱ \mid x-۱\neq ۰\}=\{x\geq ۱ \mid x\neq ۱\}=(۱,+\infty)$$

(در مرحله‌ی آخر بین دو محدوده‌ی $x \geq 1$ و $x \neq 1$ اشتراک گرفته‌ایم و $(1,+\infty)$ به‌دست آمده است.)

$$D_{gog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_g\} = \{x \neq 0 \mid g(x) \neq 0\} = \{x \geq 1 \mid \frac{x-1}{x} \neq 0\}$$
$$= \{x \neq 0 \mid x-1 \neq 0\} = \{x \neq 0 \mid x \neq 1\}$$

جواب نهایی را می‌توان به صورت $\mathbb{R} - \{0,1\}$ یا $(-\infty,0) \cup (0,1) \cup (1,+\infty)$ نوشت.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

اگر $f(x) = \sqrt{x-1}$ و $g(x) = 2x^2 - 1$ باشد؛

الف) دامنه‌ی تابع fog را با استفاده از تعریف به‌دست آورید.

ب) مقدار $(gof)(2)$ را تعیین کنید.

پاسخ

الف) تعیین دامنه‌ی دو تابع:

$$D_f: \quad x-1 \geq 0 \rightarrow x \geq 1 \quad \text{و} \quad D_g = \mathbb{R}$$

بنابراین:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid 2x^2 - 1 \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid 2x^2 - 1 \geq 1\}$$

جواب نامعادله‌ی $2x^2 - 1 \geq 1$ را مشخص می‌کنیم:

$$2x^2 - 1 \geq 1 \rightarrow 2x^2 \geq 2 \rightarrow x^2 \geq 1 \rightarrow x \leq -1 \quad \text{یا} \quad x \geq 1$$

با اشتراک گیری خواهیم داشت:

$$D_{fog} = (-\infty,-1] \cup [1,+\infty)$$

ب)

$$(gof)(2) = g(\underbrace{f(2)}_{=\sqrt{2-1}=1}) = g(1) = 2(1)^2 - 1 = 2-1 = 1$$

مثال: دو تابع $f(x) = \sqrt{x-4}$ و $g(x) = \frac{1}{x^2-1}$ را در نظر بگیرید. دامنه‌ی تابع gof را توسط تعریف مشخص کنید.

پاسخ

مشابه نمونه‌ی قبل:

$$D_f: \quad x-4 \geq 0 \rightarrow x \geq 4$$
$$D_g: \quad x^2 - 1 = 0 \rightarrow x = \pm 1 \Rightarrow D: \quad x \neq \pm 1$$

اکنون:

$$D_{gof} = \{x \in D_f \mid f(x) \in D_g\} = \{x \geq 4 \mid f(x) \neq \pm 1\}$$

چون $f(x) = \sqrt{x-4}$ منفی نمی‌شود، فقط جواب‌های $f(x) \neq 1$ را تعیین می‌کنیم:

$$\sqrt{x-4} \neq 1 \rightarrow x-4 \neq 1 \rightarrow x \neq 5$$
$$\Rightarrow D_{gof} = \{x \geq 4 \mid x \neq 5\} = [4,5) \cup (5,+\infty)$$

مثال: توابع $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ و $g(x) = \cos x$ داده شده‌اند.

الف) ضابطه‌ی تابع fog را به ساده‌ترین صورت ممکن بنویسید.

ب) دامنه‌ی این تابع را طبق تعریف مشخص کنید.

پاسخ

الف) ضابطه تابع:

$$(fog)(x) = f(g(x)) = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\sin^2 x} = |\sin x|$$

ب) با محاسبه‌ی ساده: $D_f = [-1,1]$ و $D_g = \mathbb{R}$ بوده و در نتیجه:

$$D_{fog} = \{x \in D_g \mid g(x) \in D_f\} = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \le \cos x \le 1\} = \mathbb{R}$$

توجه دارید که شرط $-1 \le \cos x \le 1$ همواره برقرار است.

---✱---

به مورد مهم زیر مرتبط با دامنه تابع مرکب توجه کنید.

مثال: برای $f(x) = x^2$ و $g(x) = \sqrt{x}$، ضابطه‌ی ساده شده‌ی تابع fog به صورت $y = x$ است.

آیا می‌توان گفت: $D_{fog} = \mathbb{R}$؟

پاسخ

پاسخ خیر است!

زیرا عددهای منفی در عبارت $f(g(x)) = (\sqrt{x})^2$ نمی‌توانند قرار گیرند.

---✱---

نتیجه:

دامنه‌ی تابع مرکب را باید از روش گفته شده‌ی قبلی تعیین کنید. البته از ضابطه‌ی $f(g(x))$ یا $g(f(x))$ قبل از ساده کردن عبارت‌های حاصل نیز می‌توان تعیین دامنه کرد.

به دو مورد زیر مرتبط با ترکیب توابع توجه کنید.

مورد اول:

گاهی $f(x)$ و ترکیب $f(g(x))$ داده شده و تابع $g(x)$ مورد نظر است.

در این حالت؛

با استفاده از ضابطه‌ی $f(x)$، عبارت $f(g(x))$ را با مجهول $g(x)$ تشکیل داده و با $f(g(x))$ داده شده برابر قرار می‌دهیم.

نمونه‌ی بعدی را ببینید.

مثال: اگر $f(x) = x^2 + 2x$ و $f(g(x)) = x^4 - 1$، تابع $g(x)$ را بیابید.

پاسخ

طبق نکته‌ی قبل:

$$f(x)=x^{2}+2x \rightarrow f(g(x))=(g(x))^{2}+2g(x)$$
$$\rightarrow (g(x))^{2}+2g(x)=x^{4}-1 \rightarrow (g(x))^{2}+2g(x)+1=x^{4}$$
$$\rightarrow (g(x)+1)^{2}=x^{4} \rightarrow g(x)+1=\pm x^{2} \Rightarrow g(x)=-1\pm x^{2}$$

یعنی دو تابع به عنوان جواب g به‌دست می‌آید.

---✧---

مثال: اگر $f(g(x))=3x^{2}-6x+14$ و $f(x)=3x-4$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

مانند قبل، توسط $f(x)=3x-4$، ضابطه‌ی $f(g(x))$ را تشکیل داده و با عبارت داده شده برابر قرار می‌دهیم:

$$3g(x)-4=3x^{2}-6x+14 \rightarrow 3g(x)=3x^{2}-6x+18 \xrightarrow{\div 3} g(x)=x^{2}-2x+6$$

---✧---

مورد دوم:

گاهی ترکیب $f(g(x))$ و $g(x)$ داده شده و تابع $f(x)$ مورد نظر است.

در این حالت:

- **روش اول:** اگر با قرار دادن $g(x)=t$، بتوان x را بر حسب t حساب کرد؛

با جایگزینی در $f(g(x))$ بر حسب t، ضابطه‌ی تابع f معلوم خواهد شد.

- **روش دوم:** اگر روش اول قابل انجام نباشد، باید عبارت $f(g(x))$ را بر حسب $g(x)$ بنویسیم تا از آنجا ضابطه‌ی f معلوم گردد.

مثال: در موارد زیر ضابطه‌ی $f(x)$ را تعیین کنید:

الف) $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right)=\sqrt{1-x}$.

ب) $f(g(x))=x^{2}+\frac{1}{x^{2}}$ و $g(x)=x-\frac{1}{x}$.

پاسخ

الف) طبق روش اول: $\frac{x-1}{x+1}=t$ و از این رابطه x را بر حسب t تعیین می‌کنیم:

$$\frac{x-1}{x+1}=t \rightarrow tx+t=x-1 \rightarrow tx-x=-1-t \rightarrow x(t-1)=-1-t$$
$$\Rightarrow x=\frac{-1-t}{t-1}=-\frac{1+t}{t-1}$$

اکنون ضابطه را بر حسب t جایگزین می‌سازیم:

$$f(t)=\sqrt{1+\frac{1+t}{t-1}}=\sqrt{\frac{t-1+1+t}{t-1}}=\sqrt{\frac{2t}{t-1}} \Rightarrow f(x)=\sqrt{\frac{2x}{x-1}}$$

ب) طبق روش دوم: باید سعی کنیم عبارت $g(x)$ را در ضابطه‌ی $f(g(x))$ ظاهر کنیم:

$$f(g(x))=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}=x^{۲}+\frac{۱}{x^{۲}}-۲+۲=\left(x-\frac{۱}{x}\right)^{۲}+۲=(g(x))^{۲}+۲ \Rightarrow f(g(x))=(g(x))^{۲}+۲$$

در نتیجه $f(t)=t^{۲}+۲$ و یا همان $f(x)=x^{۲}+۲$ است.

مثال: اگر $f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵$ باشد، ضابطه‌ی $f(۱-x)$ را مشخص کنید.

پاسخ

قرار می‌دهیم $x-۳=t$؛ در این صورت $x=t+۳$ و:

$$f(x-۳)=x^{۲}-۴x+۵ \rightarrow f(t)=(t+۳)^{۲}-۴(t+۳)+۵ \Rightarrow f(t)=t^{۲}+۲t+۲$$

حال با داشتن ضابطه‌ی تابع، جای t عبارت $۱-x$ را قرار می‌دهیم:

$$f(۱-x)=(۱-x)^{۲}+۲(۱-x)+۲=x^{۲}-۴x+۵$$

پاسخ دهید (۳)

۱- اگر $f(x)=\frac{x+۲}{x-۱}$ و $g(x)=\frac{۱}{x}$ باشند، آنگاه:

الف) دامنه‌ی تابع gof را توسط تعریف مشخص کنید.

ب) ضابطه‌ی تابع gof را بنویسید.

۲- اگر $f(x)=۲x+a$ و $g(x)=۱-۴x$ باشند، مقدار a را طوری بیابید که داشته باشیم:

$$(fog)(x)=۵-۸x$$

۳- تابع خطی $f(x)=ax+b$ را طوری مشخص کنید که داشته باشیم: $(fof)(x)=۹x-۲$.

۴- اگر $f(x)=۳\sqrt{x}+۲$ و $f(g(x))=۳x^۲-۴$ باشد، ضابطه‌ی تابع $g(x)$ را به‌دست آورید. (نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴)

۵- اگر $f(۲x-۳)=۴x^۲-۱۲x$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ را مشخص کنید.

منتخب کتاب:

۱- اگر $f=\{(۷,۸),(۵,۳),(۹,۸),(۱۱,۴)\}$ و $g=\{(۵,۷),(۳,۵),(۷,۹),(۹,۱۱)\}$ باشند، توابع fog و gof را به‌دست آورید.

۲- در هر مورد زیر، D_{gof} و $(gof)(x)$ را مشخص کنید.

الف) $f(x)=\sqrt{x+۲}$ و $g(x)=\sqrt{x^۲-۱۶}$.　　ب) $f(x)=\sin x$ و $g(x)=\sqrt{x}$.

۳- هر یک از توابع زیر را به صورت ترکیب دو تابع بنویسید. آیا جواب منحصربه‌فرد (= یکتا) است؟

الف) $f(x)=\sqrt{x^۳+۵}$　　ب) $g(x)=\sqrt[۳]{x^۲+۱}$.

سؤال ترکیبی:

۱- برای توابع $f(x)=[x]+۲x$ و $g(x)=f([x-f(x)])$، مقدار $gof(-\frac{۲}{۳})$ را حساب کنید.

چالش (ویژه علاقمندان)

CHALLENGE

برای توابع $f(x)=-x^۲+۴x-۳$ و $g(x)=\begin{cases}\sqrt{۷-x} & ۰\le x<۷\\ [۵x]-۵x & x\ge ۷\end{cases}$، برد تابع fog برابر بازه‌ی $(a,b]$ است. حاصل $b-a$ را بیابید. (براکت ≡ جزءصحیح)

۴ تغییرات نمودار

روش‌های انتقال افقی نمودار چنان‌که قبلاً هم اشاره کردیم:

انتقال افقی:

انتقال افقی نمودار $y=f(x)$ به دو صورت است: $(a>0)$

- برای رسم نمودار تابع $y=f(x+a)$:

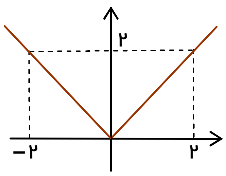
نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت چپ** منتقل می‌کنیم.

- برای رسم نمودار $y=f(x-a)$:

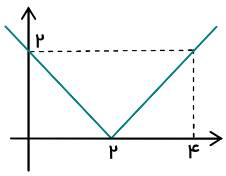
نمودار $y=f(x)$ را به اندازه‌ی a به صورت **افقی به سمت راست** منتقل می‌کنیم.

برای نمونه؛

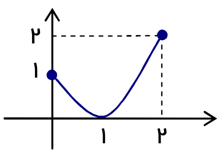
نمودار تابع $f(x)=|x-2|$ را با استفاده از انتقال نمودار $y=|x|$ رسم می‌کنیم:


$y=|x|$

⇨


$y=|x-2|$

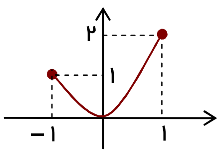
مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت روبه‌رو داده شده است:



نمودار تابع $y=f(x+1)$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را معلوم کنید.

پاسخ

سه نقطه از نمودار که مختصات مشخص دارند، یک واحد به چپ منتقل شده و توسط آن‌ها نمودار جدید رسم می‌شود:



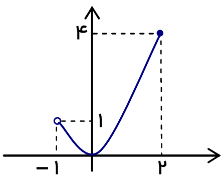
می‌بینید: دامنه $D=[-1,1]$ و برد $R=[0,2]$ است.

مثال: نمودار تابع $y=(x+2)^2$ را توسط انتقال در بازه‌ی $(-3,0]$ رسم کرده و برد آن را معلوم کنید.

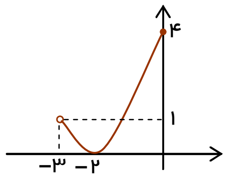
پاسخ

اگر نمودار $y=x^2$ را در بازه‌ی $(-1,2]$ رسم کنیم، بعد از ۲ واحد حرکت به چپ:

ضابطه‌ی آن $y=(x+2)^2$ و دامنه‌ی آن $(-3,0]$ خواهد شد.



$y=x^۲$



$y=(x+۲)^۲$

می‌بینید که برد تابع در هر دو نمودار $[۰,۴]$ است.

روش مهمی برای تغییر افقی نمودار به صورت زیر است:

انبساط و انقباض افقی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(kx)$:

- نقاطی با طول و عرض مشخص از نمودار مشخص می‌کنیم.
- طول این نقاط بر k تقسیم شده و عرض نقطه ثابت می‌ماند.

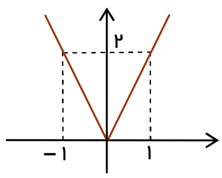
بویژه: چنان‌که در نمونه‌های بعدی می‌بینید:

- اگر $۰<k<۱$ باشد، نمودار به صورت افقی گسترده می‌شود، (انبساط می‌یابد.)
- اگر $k>۱$ باشد، نمودار به صورت افقی جمع می‌شود، (انقباض می‌یابد.)

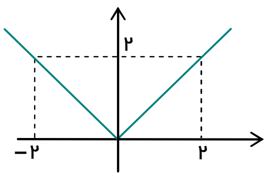
مثال: نمودار تابع $g(x)=|۲x|$ را با تغییر مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

پاسخ

با توجه به نمودار $f(x)=|x|$ و طبق روش بالا، نمودار $g(x)=f(۲x)$ را رسم می‌کنیم:



$g(x)=|۲x|$



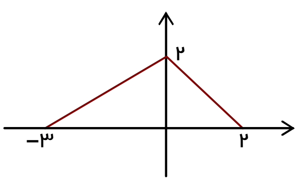
$f(x)=|x|$

$$(-۲,۲)\in f \xrightarrow{k=۲} (\frac{-۲}{۲},۲)=(-۱,۲)\in g$$

$$(۰,۰)\in f \longrightarrow (\frac{۰}{۲},۰)=(۰,۰)\in g$$

$$(۲,۲)\in f \longrightarrow (\frac{۲}{۲},۲)=(۱,۲)\in g$$

مثال: نمودار تابع f به شکل مقابل است:



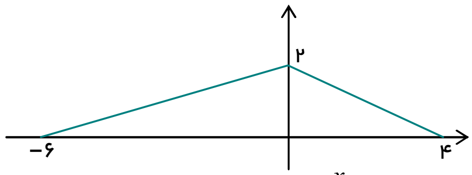
الف) نمودار $y=f(\frac{x}{۲})$ را رسم کنید.

ب) دامنه و برد تابع جدید را مشخص کنید.

پاسخ

در واقع ضابطه به صورت $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ است، پس باید طول نقاط بر $k=\frac{۱}{۲}$ تقسیم شود:

$$(-3,0)\in f \xrightarrow{k=\frac{1}{2}} (\frac{-3}{\frac{1}{2}},0)=(-6,0)$$
$$(0,2)\in f \xrightarrow{0\times 2=0} (0,2)$$
$$(2,0)\in f \xrightarrow{2\times 2=4} (4,0)$$



$y=f(\frac{x}{2})$

در نمودار حاصل، دامنه $[-6,4]$ و برد $[0,2]$ است.

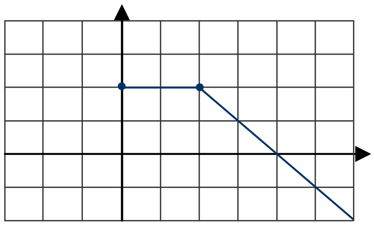
---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در شکل روبه‌رو، نمودار تابع f داده شده؛

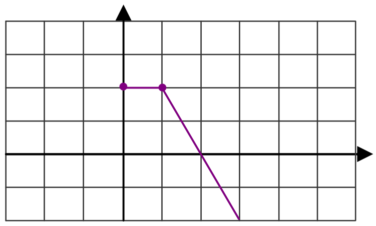
الف) نمودار تابع g با ضابطه‌ی $g(x)=f(2x)$ را رسم کنید.

ب) مقدار $gof(0)$ را به‌دست آورید.



پاسخ

نمودار انقباض افقی با ضریب ۲ است: (طول نقاط تقسیم بر دو)



طبق نمودارها: $gof(0)=g(f(0))=g(2)=0$

---✧---

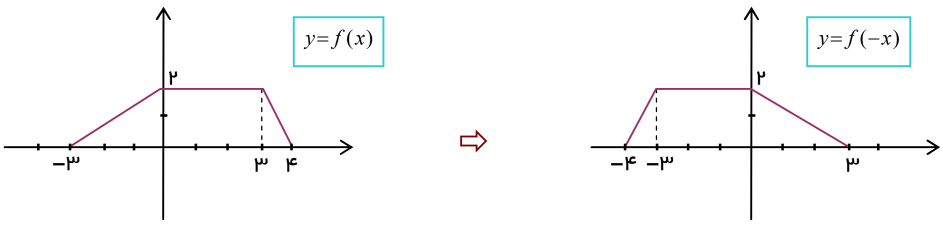
حالت ویژه:

اگر نمودار $y=f(x)$ را داشته باشیم، برای رسم نمودار $y=f(-x)$:

باید قرینه‌ی نمودار نسبت به محور عرض رسم شود.

برای نمونه؛

نمودار یک تابع $f(x)$ و توسط آن نمودار $f(-x)$ را رسم کرده‌ایم:



توجه کنید:

در هر تغییر افقی نمودار (انتقال یا انبساط و انقباض):

برد تابع ثابت مانده و فقط دامنه ممکن است تغییر کند.

یادآوری روش انتقال عمودی نمودار:

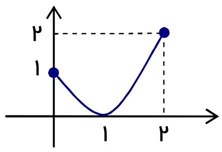
انتقال عمودی:

وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=f(x)+k$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها را به اندازه‌ی k در جهت عمودی انتقال می‌دهیم. به طور دقیق‌تر:

- اگر k **مثبت** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **بالا** منتقل می‌شود.
- اگر k **منفی** باشد، نمودار به اندازه‌ی k به **پایین** منتقل می‌شود.

برای نمونه؛

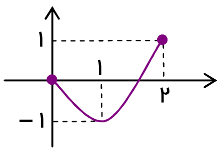
نمودار تابع $y=f(x)$ به صورت مقابل داده شده است:



در رسم نمودار تابع $y=f(x)-۱$، عرض هر نقطه یک واحد کم می‌شود:

دامنه و برد تابع جدید:

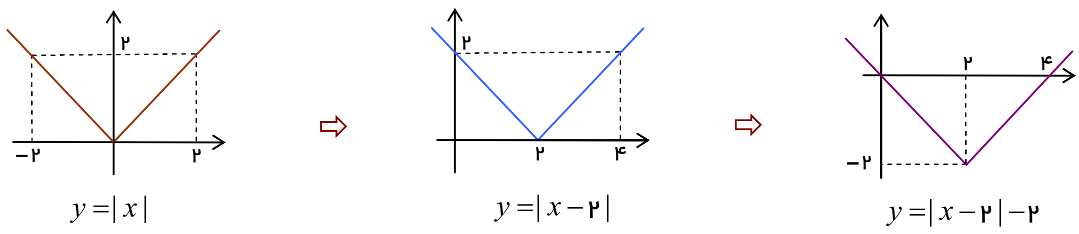
$$R=[-۱,۱] \quad \text{و} \quad D=[۰,۲]$$



مثال: نمودار تابع $f(x)=|x-۲|-۲$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=|x|$ رسم کرده و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

طبق قواعد مربوطه با دو مرحله انتقال:



می‌بینید که برد $R_f=[-۲,+\infty)$ است.

مثال: نمودار تابع $h(x)=|\frac{x}{۲}|-۱$ را با تغییرات مناسب نمودار $f(x)=|x|$ رسم کنید.

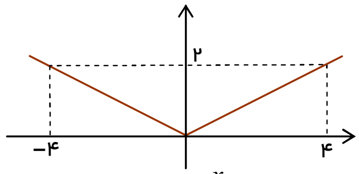
پاسخ

ابتدا مشابه نمونه‌های بالا، نمودار $|\frac{x}{۲}|$ را رسم می‌کنیم:

$$(-۲,۲)\in f \xrightarrow{k=\frac{۱}{۲}} (\frac{-۲}{\frac{۱}{۲}},۲)=(-۴,۲)$$

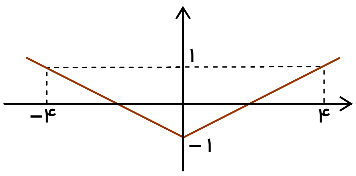
$$(۰,۰)\in f \longrightarrow (\frac{۰}{\frac{۱}{۲}},۰)=(۰,۰)$$

$$(۲,۲)\in f \longrightarrow (\frac{۲}{\frac{۱}{۲}},۲)=(۴,۲)$$



$y=|\frac{x}{۲}|$

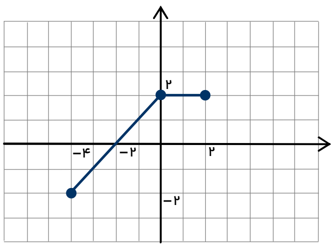
اکنون کافی است، عرض نقاط یک واحد کم شود:



$h(x)=|\frac{x}{۲}|-۱$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۰

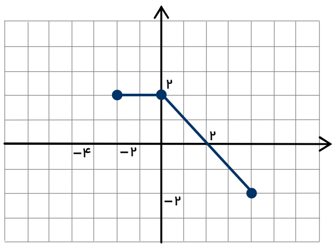
با توجه به نمودار تابع $y=f(x)$، نمودار تابع $y=f(-x)+۲$ را رسم کنید.



پاسخ

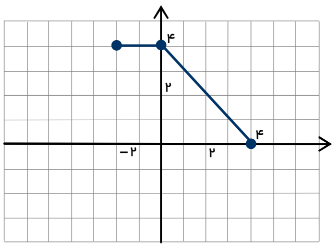
طبق گفته‌های قبل:

۱) رسم قرینه نسبت به محور عرض



⇦

۲) دو واحد انتقال به بالا



روش‌های دیگری در تغییر عمودی نمودار:

انبساط و انقباض عمودی:

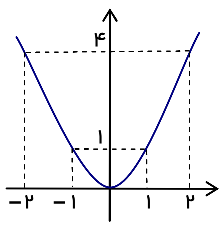
وقتی نمودار یک تابع f را داشته باشیم، برای رسم نمودار تابع $y=k\,f(x)$، طول نقاط ثابت مانده و فقط عرض آن‌ها در عدد k ضرب می‌شود. به طور دقیق‌تر:

- اگر $k>۱$ باشد، اندازه‌ها بزرگ‌تر شده و نمودار به صورت عمودی گسترده می‌شود. (نمودار **انبساط** می‌یابد.)
- اگر $۰<k<۱$ باشد، اندازه‌ها کوچک‌تر شده و نمودار به صورت عمودی جمع می‌شود. (نمودار **انقباض** می‌یابد.)

مثال: نمودار تابع $g(x)=۲x^۲-۱$ را با تغییرات مناسب نمودار $y=x^۲$ رسم کنید.

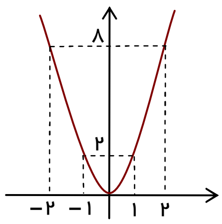
پاسخ

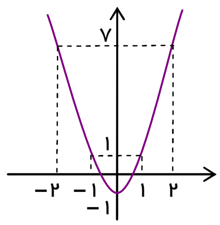
ابتدا نمودار $y=x^۲$ را رسم می‌کنیم:



اکنون در دو مرحله، نمودار تابع رسم می‌شود:

$y=۲x^۲$





$y=۲x^۲-۱$

مثال: درستی یا نادرستی هر مورد را معلوم کنید.

الف) اگر دامنه‌ی تابع f بازه‌ی $[-۴,۱]$ باشد، دامنه‌ی تابع $y=-۲f(\frac{x}{۲})$ برابر $[-۲,\frac{۱}{۲}]$ است.

ب) اگر نقطه‌ی $(-۳,۱)$ روی نمودار f باشد، نقطه‌ی $(-\frac{۳}{۲},\frac{۱}{۲})$ روی نمودار تابع $y=-۲f(۲x)$ است.

پ) برای رسم نمودار تابع $y=|۲x-۱|$ توسط نمودار $y=|x-۱|$، کافی است طول هر نقطه از نمودار تابع دوم بر عدد ۲ تقسیم شود.

پاسخ

الف) نادرست است؛

چون طول نقاط بر $\frac{1}{2}$ تقسیم شده و خواهیم داشت: $D=[-8,2] \xrightarrow{\div\frac{1}{2}} [-4,1]$

ب) نادرست است؛

طول نقطه بر ۲ تقسیم شده و به $-\frac{3}{2}$ تبدیل می‌شود، ولی عرض نقطه باید در -2 ضرب شود: $(-3,1) \to (-\frac{3}{2},-2)$

پ) درست است؛

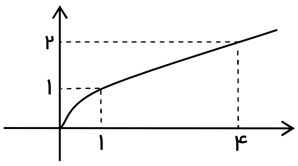
اگر قرار دهیم: $f(x)=|x-1|$، در این صورت $f(2x)=|2x-1|$ بوده و روش گفته شده برای رسم صحیح است.

مثال: با رسم نمودار $y=\sqrt{x}$ توسط نقطه گذاری، نمودار تابع $y=-2\sqrt{x}+1$ را رسم کنید.

پاسخ

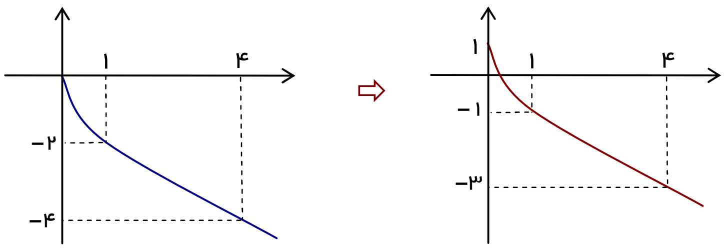
نمودار $y=\sqrt{x}$ را با تشکیل جدول چند مقدار نامنفی رسم می‌کنیم:

x	۰	۱	۴
y	۰	۱	۲



اکنون در دو مرحله: ابتدا ضرب عرض‌ها در -2 و سپس جمع عرض‌های جدید با عدد ۱، نمودار خواسته شده رسم می‌شود:

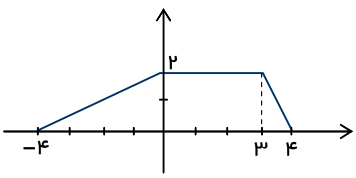
$y=-2\sqrt{x}$



$y=-2\sqrt{x}+1$

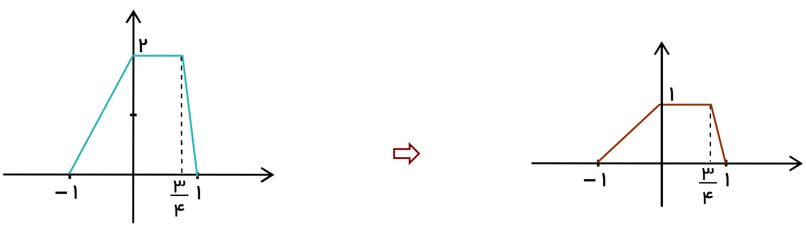
می‌بینید در تابع آخر، برد $R=(-\infty,1]$ است.

مثال: با استفاده از نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو، نمودار $y=\frac{1}{2}f(4x)$ را رسم کنید.

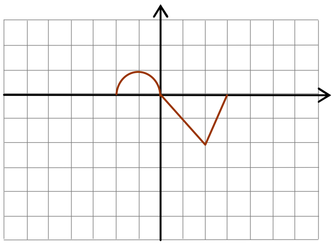


پاسخ

ابتدا رسم $y=f(4x)$ با انقباض افقی (تقسیم طول نقاط بر ۴) و سپس انقباض عمودی (ضرب عرض نقاط در $\frac{1}{2}$):



مثال: نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل روبه‌رو رسم شده است.

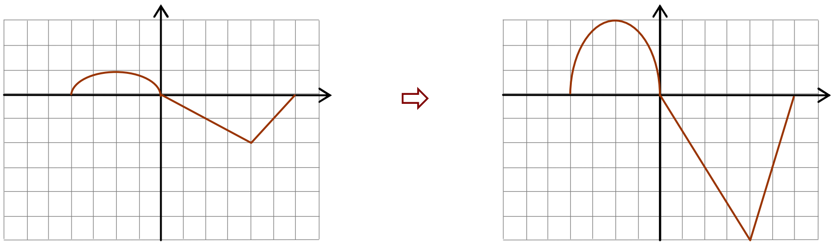


الف) نمودار تابع $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ را رسم کنید.

ب) دامنه‌ی تابع قسمت (الف) را تعیین کنید.

پاسخ

الف) ابتدا رسم $y=f(\frac{۱}{۲}x)$ (انبساط افقی با تقسیم طول نقاط بر $\frac{۱}{۲}$، یعنی طول نقاط ضرب در ۲) و سپس انبساط عمودی (ضرب عرض نقاط در ۳):

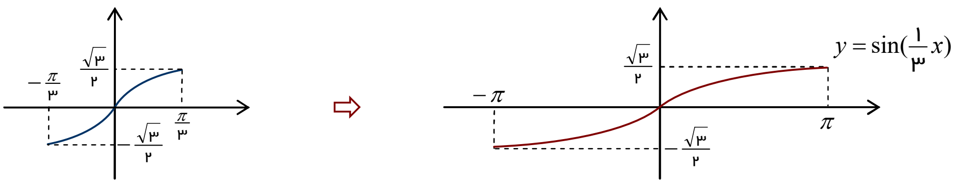


ب) در نمودار می‌بینید که دامنه‌ی تابع $y=۳f(\frac{۱}{۲}x)$ برابر $[-۴,۶]$ است.

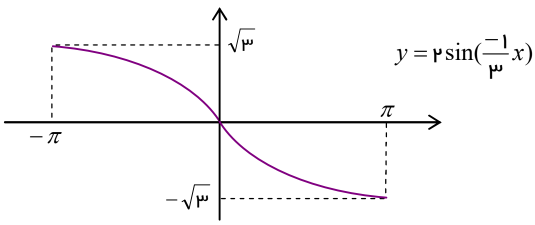
مثال: (تمرین کتاب) نمودار تابع $y=۲\sin(\frac{-۱}{۳}x)$ را به کمک نمودار تابع $y=\sin x$ در بازه‌ی $[-\pi,\pi]$ رسم کنید.

پاسخ

بهتر است ضابطه را به صورت $y=-۲\sin(\frac{۱}{۳}x)$ در نظر بگیریم. نمودار $y=\sin x$ را در بازه‌ی $[-\frac{\pi}{۳},\frac{\pi}{۳}]$ رسم می‌کنیم؛ بعد از انبساط افقی با $k=\frac{۱}{۳}$، دامنه به $[-\pi,\pi]$ گسترش می‌یابد:



اکنون کافی است انبساط عمودی با ضرب عرض نقاط در ۲- انجام شود:



توجه کنید:

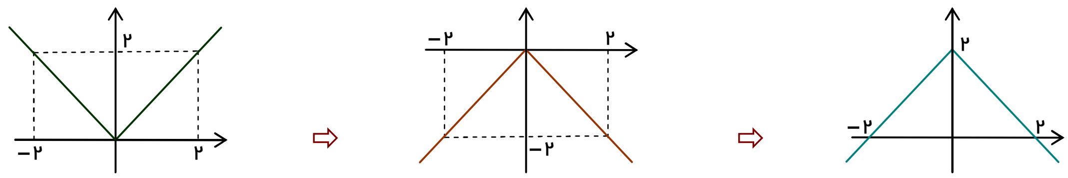
در رسم نمودار $y=-f(x)$، وقتی نمودار تابع $f(x)$ داده شده، چون عرض‌ها قرینه می‌شوند:

نمودار تابع f نسبت به محور طول قرینه می‌شود.

مثال: مساحت محدود به نمودار $y=-|x|+۲$ و محور طول‌ها را بیابید.

پاسخ

با دو تغییر و به سادگی نمودار رسم می‌شود:



$y=|x|$ ⇦ $y=-|x|$ ⇦ $y=-|x|+۲$

می‌بینید که محدوده‌ی مورد نظر، مثلثی با ارتفاع و قاعده‌ی مشخص است:

$$S=\frac{۲\times۴}{۲}=۴$$

تکنیک مهم:

در مواردی که ضابطه‌ی تابع چندین تغییر گوناگون داشته، اگر x قرینه شده یا ضریب گرفته، تغییرات روی آن را در آخرین گام انجام دهید. برای نمونه؛

- برای رسم $f(۲x-۱)$ چنین عمل کنید:

$$f(x)\longrightarrow f(x-۱)\longrightarrow f(۲x-۱)$$

ابتدا یک واحد به راست و سپس ضرب طول نقاط در $\frac{۱}{۲}$

- برای رسم $f(-۲x+۱)$ چنین عمل کنید:

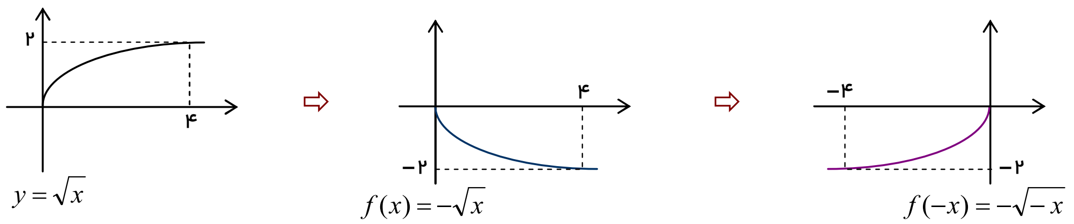
$$f(x)\longrightarrow f(x+۱)\longrightarrow f(۲x+۱)\longrightarrow f(-۲x+۱)$$

ابتدا یک واحد به چپ، سپس انقباض با ضریب ۲ و در پایان قرینه نسبت به محور عرض

مثال: (از کتاب) نمودار تابع $y=-\sqrt{-x}$ را رسم کرده و دامنه و برد آن را تعیین کنید.

پاسخ

نمودار $f(x)=-\sqrt{x}$ (قرینه‌ی نمودار $y=\sqrt{x}$ نسبت به محور طول) را رسم کرده و سپس قرینه‌ی نمودار نسبت به محور عرض: $f(-x)=-\sqrt{-x}$ رسم می‌شود:



می‌بینید $D=(-\infty,0]$ و $R=(-\infty,0]$ است.

توجه کنید:

در هر انتقال یا انبساط و انقباض عمودی:

دامنه‌ی تابع ثابت مانده و برد معمولاً تغییر خواهد کرد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۱

برد تابع f بازه‌ی $(-3,1]$ است. برد تابع $y=-2f(3x-1)+3$ کدام‌یک از موارد زیر است؟

الف) $(-3,1]$ ب) $(-12,0]$ پ) $[1,9)$ ت) $[-10,2)$

پاسخ

چنان‌که گفته‌ایم، تغییرات افقی، برد را تغییر نمی‌دهد. پس،
برد $y=f(3x-1)$ برابر $(-3,1]$ است، در انبساط عمودی $y=-2f(3x-1)$ برد با ضرب در -2 به $[-2,6)$ تبدیل شده و در انتقال عمودی $y=-2f(3x-1)+3$، برد با عدد ۳ جمع می‌شود:

$$[-2,6)\xrightarrow{+3}[1,9)$$

در پایان این بخش، به نوع خاصی از تغییر عمودی نمودار اشاره می‌شود.

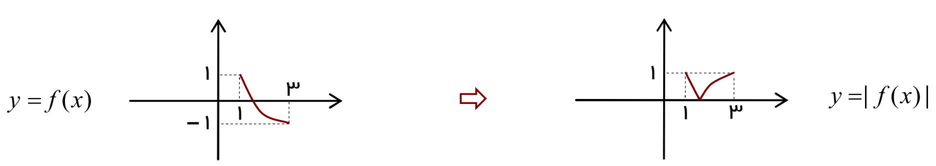
قدرمطلقِ تابع:

با داشتن نمودار تابع $y=f(x)$، در رسم نمودار $y=|f(x)|$:

فقط عرض نقاطی از نمودار f که منفی است، قرینه و مثبت خواهند شد.

بنابراین:

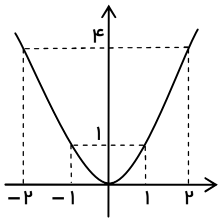
برای رسم نمودار $y=|f(x)|$، فقط قسمت‌هایی از نمودار که زیر محور طول واقع است، به صورت قرینه در بالای این محور رسم می‌شوند. برای نمونه؛



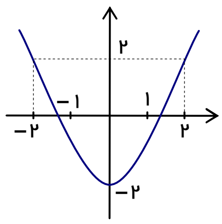
مثال: نمودار تابع $y=|x^۲-۲|$ را به روش بالا رسم کنید.

پاسخ

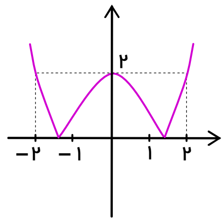
طی دو مرحله؛ ابتدا $y=x^۲$ و سپس با انتقال عمودی $y=x^۲-۲$ را رسم کرده و در پایان، طبق روش بالا نمودار $y=|x^۲-۲|$ را رسم می‌کنیم:



$y=x^۲$



$y=x^۲-۲$

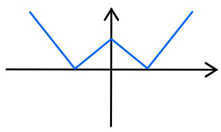


$y=|x^۲-۲|$

سؤال:

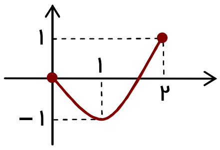
چگونه می‌توان توسط نمودار $y=x$ و فقط طبق دو قاعده‌ی انتقال عمودی و قاعده‌ی بالا، نمودار $y=||x|-۲|$ را رسم کرد؟

نمودار نهایی چنین خواهد بود:



پاسخ دهید (۱۴)

۱– نمودار تابع f به صورت مقابل است. نمودار توابع زیر را رسم کرده و دامنه و برد هر کدام را بنویسید.

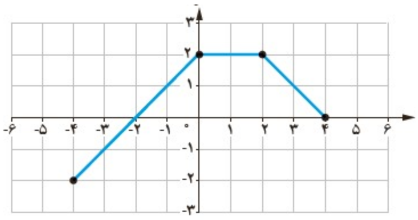


الف) تابع $y=f(-x)$

ب) تابع $y=-f(x)$

منتخب کتاب:

۱– با استفاده از نمودار تابع f، نمودارهای خواسته شده را رسم کنید



الف) $y=\frac{۱}{۲}f(۲x)-۱$

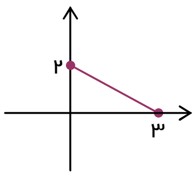
ب) $y=-f(-x)+۲$

پ) $y=۲f(x-۱)-۳$

ت) $y=۲f(\frac{۱}{۲}x)$

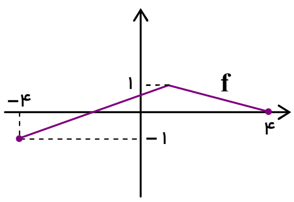
سؤال ترکیبی:

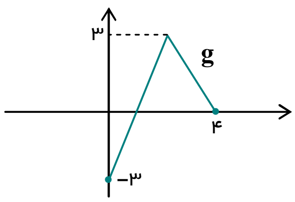
۱– نمودار تابع f به صورت روبه‌رو داده شده؛ مساحت محدود به نمودار $y=f(|x|+x)$، محور طول و خط $x=-\frac{۵}{۲}$ را حساب کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

نمودار توابع f و g در زیر داده شده و می‌دانیم دامنه و برد تابع $y_۱=\frac{۱}{۳}g(x+a)+۱$ با دامنه و برد تابع $y_۲=f(۲x)+b$ یکسان است. مقادیر a و b را مشخص کنید.





۵ وارون توابع

یادآوری:

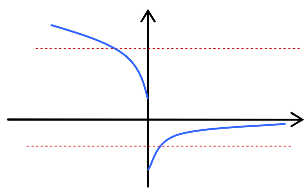
تابع f را «**یک‌به‌یک**» گویند، هرگاه هیچ دو زوج مرتب آن دارای مؤلفه‌های دوم برابر نباشند.

به صورت معادل:

اگر دو زوج مؤلفه‌ی دوم برابر داشتند، مؤلفه‌های اول آن‌ها هم برابر باشند.

تشخیص از نمودار:

شرط یک‌به‌یک بودن تابع این است که هر خط افقی نمودار آن را حداکثر در یک نقطه قطع کند.



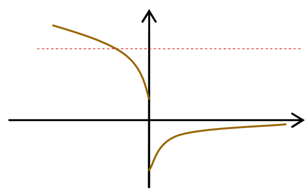
تابع یک‌به‌یک

توجه:

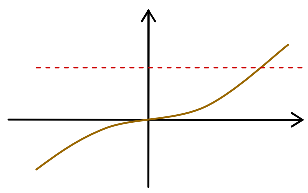
شرط بالا در توابع اکیداً یکنوا همیشه دیده می‌شود:

اگر تابع اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد، متماً یک‌به‌یک است.

برعکس مطلب بالا صحیح نیست. شکل‌های مربوطه را ببینید:



اکیداً یکنوا $\not\Leftarrow$ یک‌به‌یک



اکیداً یکنوا $\Leftarrow$ یک‌به‌یک

وارون تابع:

وارون یک تابع f با جابجایی مؤلفه‌های اول و دوم زوج‌های مرتب حاصل می‌شود. پس:

$$(x,y)\in f \;\Rightarrow\; (y,x)\in f^{-1}$$

f^{-1} «**وارون**» یا «**معکوس**» تابع f است. **توجه:** اگر f یک‌به‌یک باشد، f^{-1} یک تابع خواهد بود.

طبق مفهوم بالا؛

در تابع یک‌به‌یک f داریم: $\boxed{f(a)=b \;\Leftrightarrow\; f^{-1}(b)=a}$

نهایی؛ دی ۱۴۰۱

اگر $f(x)=2x^3-1$ باشد، حاصل $f^{-1}(15)$ برابر . . . . . . است.

پاسخ

اگر قرار دهیم: $f^{-1}(۱۵)=a$ ، باید داشته باشیم:

$$f(a)=۱۵ \rightarrow ۲a^۳-۱=۱۵ \rightarrow a^۳=\frac{۱۵+۱}{۲}=۸ \Rightarrow a=۲$$

---✧---

مثال: در تابع $g=\{(۲,-۱),(۰,۳),(۴,۱)\}$ ، تابع g^{-1} را نوشته و دامنه و برد دو تابع را با هم مقایسه کنید.

پاسخ

طبق تعاریف مربوطه:

$$g^{-1}=\{(-۱,۲),(۳,۰),(۱,۴)\}$$

می‌بینید که $D_f=R_{g^{-1}}=\{۰,۲,۴\}$ است و:

$$D_{g^{-1}}=R_g=\{-۱,۳\}$$

---✧---

توجه کنید:

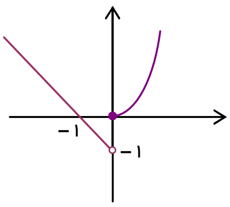
- وقتی f یک‌به‌یک بوده و در نتیجه f^{-1} یک تابع باشد، گوئیم: f وارون‌پذیر است.
- مانند نمونه‌ی بالا، همواره داریم:

$$\boxed{D_{f^{-1}}=R_f} \quad و \quad \boxed{D_f=R_{f^{-1}}}$$

مثال: با رسم نمودار تابع $f(x)=\begin{cases} x^۲ & x\geq ۰ \\ -x-۱ & x<۰ \end{cases}$ ، نشان دهید تابع وارون‌پذیر نیست.

پاسخ

در محدوده‌ی $[۰,+\infty)$ نیم سهمی $y=x^۲$ و در محدوده‌ی $(-\infty,۰)$ نیم‌خط $y=-x-۱$ رسم می‌شود:



تابع یک به یک نبوده و در نتیجه وارون‌پذیر نیست.

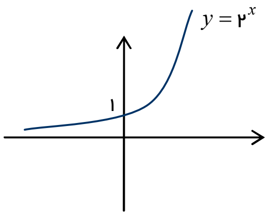
---✧---

مثال: (تمرین کتاب) تابع نمایی $y=۲^x-۲$ و تابع لگاریتمی $y=-\log_۲ x+۲$ را رسم کرده و یکنوایی (و یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر بودن) آن‌ها را مشخص کنید.

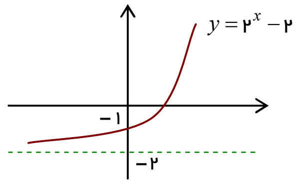
پاسخ

- تابع $y=۲^x-۲$:

نمودار شناخته شده‌ی $y=۲^x$ را رسم کرده و سپس آن را ۲ واحد به پایین انتقال می‌دهیم:



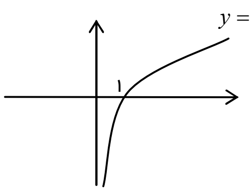
⇦



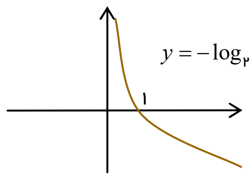
چنان‌که می‌بینید:
تابع اکیداً صعودی است، در نتیجه یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است.

- **تابع** $y=-\log_۲ x+۲$:

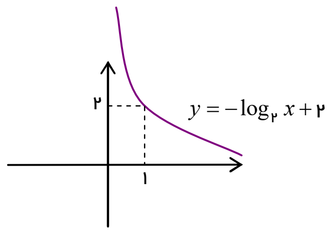
ابتدا نمودار $y=\log_۲ x$، سپس $y=-\log_۲ x$ و در پایان $y=-\log_۲ x+۲$ رسم می‌شود:



⇦



⇦



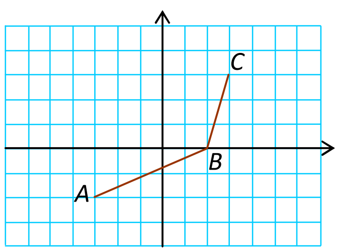
می‌بینید:
تابع $y=-\log_۲ x+۲$ اکیداً نزولی بوده، در نتیجه یک‌به‌یک و معکوس‌پذیر است.

توجه کنید:

با توجه به این‌که هر دو نقطه به صورت (a,b) و (b,a) نسبت به خط $y=x$ (**نیمساز ربع اول و سوم**) قرینه‌ی یکدیگر هستند، طبق تعریف تابع وارون:

برای رسم نمودار f^{-1}، نمودار f را نسبت به خط $y=x$ قرینه رسم می‌کنیم.

مثال: نمودار تابع f در یک بازه به صورت مقابل داده شده است:



الف) ضابطه‌ی تابع را تعیین کنید.

ب) نمودار f^{-1} را رسم کنید.

پ) با توجه به قسمت قبل، ضابطه‌ی f^{-1} را نوشته و دامنه و برد آن را مشخص کنید.

پاسخ

الف) در محدوده‌ی $[-۳,۲]$، باید معادله‌ی پاره‌خط AB و در محدوده‌ی $(۲,۳]$، باید معادله‌ی پاره‌خط BC را بنویسیم:

- شیب AB برابر $\frac{y_B-y_A}{x_B-x_A}=\frac{۰-(-۲)}{۲-(-۳)}=\frac{۲}{۵}$ و توسط نقطه‌ی B داریم:

$$y-0=\frac{2}{5}(x-2) \rightarrow y=\frac{2}{5}x-\frac{4}{5}$$

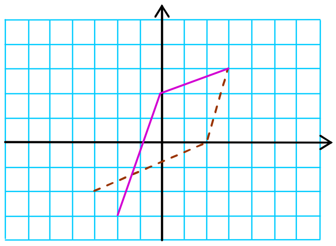
- شیب BC برابر $3 = \frac{3-0}{3-2} = \frac{y_C-y_B}{x_C-x_B}$ و توسط نقطه‌ی B داریم:

$$y-0=3(x-2) \rightarrow y=3x-6$$

پس ضابطه‌ی تابع چنین است:

$$f(x)=\begin{cases} \frac{2}{5}x-\frac{4}{5} & -3 \le x \le 2 \\ 3x-6 & 2 < x \le 3 \end{cases}$$

ب) قرینه سازی نسبت به خط $y=x$:



پ) ضابطه‌ی f^{-1} مشابه قسمت (الف) نوشته می‌شود. بعلاوه طبق نمودار:

$$D_{f^{-1}}=[-2,3] \quad و \quad R_{f^{-1}}=[-3,3]$$

---✧---

بیان و بررسی خواص مهم دیگری از تابع وارون در ادامه:

مثال: دو تابع $f=\{(1,0),(-1,2),(2,3)\}$ و $g=\{(3,1),(2,0),(1,2),(0,0)\}$ داده شده‌اند.

الف) توابع f^{-1} و g^{-1} را مشخص کنید.

ب) نشان دهید تساوی $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ درست است.

پ) بعد از تعیین توابع fof^{-1} و $f^{-1}of$، در مورد دامنه‌ی x در تساوی‌های $(fof^{-1})(x)=x$ و $(f^{-1}of)(x)=x$ چه می‌توان گفت؟

پاسخ

الف) واضح است که:

$$f^{-1}=\{(0,1),(2,-1),(3,2)\} \quad و \quad g^{-1}=\{(1,3),(0,2),(2,1),(0,0)\}$$

ب) ترکیب‌های $g^{-1}of^{-1}$ و fog به روش گفته شده نوشته می‌شوند:

$$fog=\{(3,0),(1,3)\}$$
$$g^{-1}of^{-1}=\{(0,3),(3,1)\}$$

می‌بینید که $(fog)^{-1}=\{(0,3),(3,1)\}$ بوده و تساوی $(fog)^{-1}=g^{-1}of^{-1}$ برقرار است.

پ) مشابه قسمت قبل، fof^{-1} و $f^{-1}of$ را مشخص می‌کنیم:

$$fof^{-1}=\{(0,0),(2,2),(3,3)\}$$
$$f^{-1}of=\{(1,1),(-1,-1),(2,2)\}$$

چنان‌که می‌بینید، عبارت $(f^{-1}of)(x)=x$ برای $x\in D_f$ و عبارت $(fof^{-1})(x)=x$ برای $x\in R_f$ صحیح است.

---✧---

توجه کنید:

در بخش سوم مثال قبل می‌بینیم؛ هر دو تابع $f^{-1}of$ و fof^{-1} همانی هستند؛ ولی:

دامنه‌های آن‌ها یکسان نیست.

دقیق‌تر:

دامنهٔ $f^{-1}of$ برابر D_f و دامنهٔ fof^{-1} برابر R_f است.

پس می‌توان نوشت:

$$(f^{-1}of)(x)=x\,,\quad (x\in D_f)\qquad و\qquad (fof^{-1})(x)=x\,,\quad (x\in R_f)$$

تذکر مهم:

- مانند آن‌چه در مثال قبل دیدیم، اگر f تابعی وارون‌پذیر باشد، همواره:

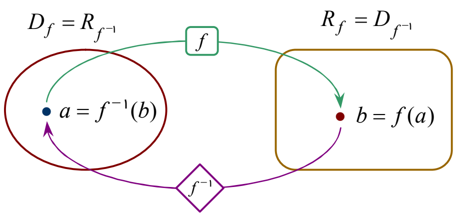
$$\boxed{(f^{-1}of)(x)=x\,,\quad (x\in D_f)}\qquad و\qquad \boxed{(fof^{-1})(x)=x\,,\quad (x\in R_f)}$$

یعنی:

هر دو تابع fof^{-1} و $f^{-1}of$ توابع همانی هستند، ولی دامنه‌های آن‌ها ممکن است متفاوت باشند. پس در حالت کلی برابری توابع $fof^{-1}=f^{-1}of$ برقرار نیست.

در نمودار هم می‌بینید که:

توابع f و f^{-1} اثر یکدیگر را خنثی می‌کنند:



$$f^{-1}(f(a))=a\qquad و\qquad f(f^{-1}(b))=b$$

- اگر دو تابع f و g دارای دو شرط زیر باشند:

$$(gof)(x)=x\,,\quad (x\in D_f)\qquad و\qquad (fog)(x)=x\,,\quad (x\in D_g)$$

در این صورت، این دو تابع وارون یکدیگر هستند.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

اگر $f(x)=۳+\sqrt{۲x-۱}$ باشد، مقدار $(fof^{-1})(۵)$ برابر .... است.

پاسخ

طبق خاصیت $f(f^{-1}(b))=b$، بدون استفاده از ضابطهٔ $f(x)$، داریم: $(fof^{-1})(۵)=f(f^{-1}(۵))=۵$.

(البته باید عدد ۵ در دامنهٔ تابع f^{-1} (= برد تابع f) واقع باشد.)

---✧---

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

اگر $f(x)=\sqrt{x-۲}$ باشد، آنگاه:

الف) دامنه‌ی تابع $f^{-1}of$ را به‌دست آورید.

ب) مقدار $f^{-1}(5)$ را محاسبه کنید.

پاسخ

الف) می‌دانیم $D_{f^{-1}of} = D_f$ است:

$$x-2\geq 0 \rightarrow x\geq 2 \rightarrow D_{f^{-1}of}=[2,+\infty)$$

ب) قرار می‌دهیم: $f^{-1}(5)=a$. بنابراین:

$$f(a)=5 \rightarrow \sqrt{a-2}=5 \rightarrow a-2=25 \Rightarrow a=27$$

مثال: درستی یا نادرستی عبارت زیر را مشخص کنید.

دو تابع $f(x)=-\frac{2x+6}{7}$ و $g(x)=\frac{-7}{2}x-3$ وارون یکدیگرند.

پاسخ

درست است؛ زیرا:

معیار گفته شده‌ی بالا برقرار است.

$$f(g(x))=-\frac{2(\frac{-7}{2}x-3)+6}{7}=-\frac{-7x-6+6}{7}=-\frac{-7x}{7}=x$$

$$g(f(x))=-\frac{7}{2}(-\frac{2x+6}{7})-3=\frac{2x+6}{2}-3=x+3-3=x$$

تعیین ضابطه‌ی وارون:

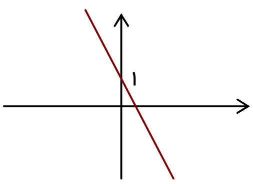
به شرط یک‌به‌یک بودن تابع f ، برای تعیین ضابطه‌ی تابع f^{-1} :

- از ضابطه f ، x را بر حسب y به‌دست می‌آوریم.
- سپس x و y را در آن جابه‌جا می‌کنیم.

مثال: اولاً نشان دهید تابع $g(x)=-2x+1$ وارون‌پذیر است و ثانیاً ضابطه‌ی تابع معکوس را بیابید.

پاسخ

طبق نمودار، تابع یک‌به‌یک و در نتیجه معکوس‌پذیر است:



تعیین ضابطه‌ی معکوس به روش بالا:

$$y=-2x+1 \rightarrow 2x=-y+1 \Rightarrow x=\frac{-y+1}{2}$$

با جابجا کردن x و y، ضابطه‌ی وارون به صورت $y=\frac{-x+1}{2}$ یا $g^{-1}(x)=\frac{-x+1}{2}$ است.

مثال: هر گاه $x \xrightarrow{g} 1+\sqrt[3]{x} \xrightarrow{f} x$ باشد، حاصل عبارت $f(8)+g(2)$ را بیابید.

پاسخ

می‌بینید که $g(f(x))=x$ داده شده و در نتیجه g معکوس تابع $f(x)=1+\sqrt[3]{x}$ است:

$$y=1+\sqrt[3]{x} \to \sqrt[3]{x}=y-1 \to x=(y-1)^3 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x-1)^3$$

پس $g(x)=(x-1)^3$ بوده و در نتیجه:

$$f(8)+g(2)=1+\sqrt[3]{8}+(2-1)^3=1+2+1=4$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

دامنه و ضابطه‌ی تابع وارون $f(x)=\sqrt{x+4}-1$ را بیابید.

پاسخ

با رسم تقریبی f (نمودار $y=\sqrt{x}$ چهار واحد به چپ و یک واحد به پایین)، برد آن بازه‌ی $[-1,+\infty)$ حاصل شده و در نتیجه:

$$D_{f^{-1}}=[-1,+\infty)$$

تعیین ضابطه:

$$y=\sqrt{x+4}-1 \to \sqrt{x+4}=y+1 \to x+4=(y+1)^2 \Rightarrow f^{-1}(x)=(x+1)^2-4$$

مثال: ضابطه‌ی وارون توابع زیر را تعیین کنید.

الف) تابع $f(x)=x^3+2$.

ب) تابع $g(x)=x^2-4x$ در دامنه‌ی $(-\infty,2]$.

پاسخ

الف) طبق روش بالا:

$$y=x^3+2 \to x^3=y-2 \to x=\sqrt[3]{y-2} \xrightarrow{x\leftrightarrow y} y=\sqrt[3]{x-2}$$

یعنی: $f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$ است.

ب) عدد ۴ را به دو طرف $y=x^2-4x$ اضافه می‌کنیم:

$$y+4=x^2-4x+4 \to (x-2)^2=y+4 \Rightarrow x-2=\pm\sqrt{y+4}$$

چون $x\le 2$ بوده است:

داریم: $x-2\le 0$ و بنابراین در سمت راست بالا، علامت منفی درست است.

بنابراین:

$$x-2=-\sqrt{y+4} \to x=2-\sqrt{y+4} \Rightarrow g^{-1}(x)=2-\sqrt{x+4}$$

توجه کنید:

با کمی بررسی می‌توانید ببینید که برد تابع g برابر $[-4,+\infty)$ بوده و در نتیجه $D_{g^{-1}}=[-4,+\infty)$ خواهد بود.

---✡---

مطلب پایانی:

همان‌طور که گاهی برای یکنوایی لازم است دامنه را محدود کنیم؛

ممکن است تابع روی دامنه وارون‌پذیر نباشد، اما در بازه‌هایی کوچک‌تر وارون‌پذیر باشد.

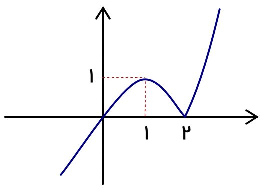
مثال: ابتدا بازه‌ای مشخص کنید که تابع $y=x|x-2|$ در آن بازه نزولی است. سپس ضابطه‌ی معکوس تابع در آن بازه را مشخص کنید.

پاسخ

ضابطه‌ی تابع را با استفاده از ریشه‌ی داخل قدرمطلق باز می‌کنیم تا بازه‌ی نزولی بودن معلوم شود:

$$y=\begin{cases}-x(x-2) & x<2\\ x(x-2) & x\geq 2\end{cases} \rightarrow y=\begin{cases}2x-x^2 & x<2\\ x^2-2x & x\geq 2\end{cases}$$

رأس هر دو نیم سهمی، $x=1$ است و با نقطه گذاری به صورت تقریبی رسم می‌شوند:



می‌بینید که تابع در بازه‌ی $(1,2)$ نزولی بوده، ضابطه $y=2x-x^2$ و برد آن در این بازه $(0,1)$ است. پس:

$$y=2x-x^2 \rightarrow x^2-2x=-y \xrightarrow{+1} (x-1)^2=1-y \rightarrow \sqrt{(x-1)^2}=\sqrt{1-y}$$

$$\rightarrow |x-1|=\sqrt{1-y} \xrightarrow{1<x<2 \Rightarrow x-1>0} x-1=\sqrt{1-y} \Rightarrow x=1+\sqrt{1-y}$$

در نتیجه:

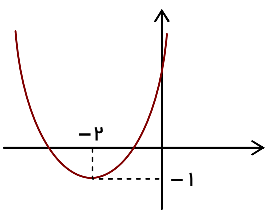
ضابطه‌ی معکوس $y=1+\sqrt{1-x}$، دامنه‌ی آن $(0,1)$ و برد آن $(1,2)$ است.

---✡---

مثال: (تمرین کتاب) تابع $h(x)=x^2+4x+3$ یک‌به‌یک نیست، با محدود کردن دامنه، تابعی یک‌به‌یک بسازید و ضابطه‌ی معکوس آن را مشخص کنید.

پاسخ

ضابطه را به صورت $h(x)=x^2+4x+4-1=(x+2)^2-1$ نوشته و نمودار تقریبی با دو انتقال رسم می‌شود:



تابع در هر دو بازه‌ی $(-\infty,-2]$ و $[-2,+\infty)$ یک‌به‌یک و در نتیجه وارون‌پذیر است. دامنه را $(-\infty,-2]$ گرفته و تابع وارون را تعیین می‌کنیم:

$$y=(x+2)^2-1 \rightarrow (x+2)^2=y+1 \xrightarrow{\sqrt{\ }} |\underbrace{x+2}_{\leq 0}|=\sqrt{y+1} \rightarrow -(x+2)=\sqrt{y+1}$$

$$\rightarrow x+2=-\sqrt{y+1} \Rightarrow x=-\sqrt{y+1}-2$$

بنابراین ضابطه‌ی تابع وارون $h^{-1}(x)=-\sqrt{x+1}-2$ و دامنه‌ی آن $[-1,+\infty)$ (برابر برد h) است.

---✡---

پاسخ دهید (۵)

۱– در تابع $f(x)=۴+\sqrt{x-۱}$ ، دامنه‌ی تابع $y=(f^{-۱}of)(x)$ برابر $[۱,+\infty)$ است. (درست ☐ – نادرست ☐) (نهایی؛ خرداد ۴۰۳)

۲– تابع $f(x)=-\sqrt{x+۲}$ را در نظر بگیرید:

الف) توسط رسم نمودار نشان دهید تابع یک به یک است.

ب) ضابطه‌ی تابع وارون را به‌دست آورده و نمودار آن را رسم کنید.

پ) دامنه و برد توابع f و $f^{-۱}$ را با هم مقایسه کنید.

۳– اگر $f(x)=-\frac{۲}{۳}x+۱$ و $g(x)=\sqrt{۱-۲x}$ باشند، مقادیر زیر را بیابید.

الف) $(f^{-۱}og^{-۱})(۳)$

ب) $(g^{-۱}og^{-۱})(۱)$

۴– اگر $g(x)=۲\sqrt{x}+۳$ و $g(f(x))=x$ باشد، ضابطه‌ی $f(x)$ را مشخص کنید.

۵– تابع $f(x)=\{(-۱,۳),(۰,۲),(۲,۱)\}$ را در نظر بگیرید:

الف) تابع $f^{-۱}$ را بنویسید.

ب) هر دو تابع $fof^{-۱}$ و $f^{-۱}of$ را مشخص کرده و نشان دهید همانی هستند.

پ) آیا توابع قسمت قبل برابر هستند؟

منتخب کتاب:

۱– ضابطه‌ی وارون تابع $f(x)=-۵-\sqrt{۳x+۱}$ را مشخص کنید.

۲– توابع زیر یک‌به‌یک نیستند. با محدود کردن دامنه‌ی آن‌ها، توابعی یک‌به‌یک ساخته و ضابطه‌ی وارون آن‌ها را به‌دست آورید.

الف) $f(x)=|x|$　　ب) $g(x)=-x^۲$　　پ) $h(x)=x^۲+۴x+۳$

۳– برای توابع $f(x)=\frac{۱}{۸}x-۳$ و $g(x)=x^۳$ ، مقادیر خواسته شده را به‌دست آورید.

الف) $(fog)^{-۱}(۵)$　　ب) $(f^{-۱}of^{-۱})(۶)$　　پ) $(g^{-۱}of^{-۱})(۵)$

سؤال ترکیبی:

۱– نمودار وارون تابع $f(x)=x+۲\sqrt{x}$ را یک واحد به راست منتقل می‌کنیم. نمودار حاصل، نمودار f را در چه نقطه‌ای قطع می‌کند؟

چالش (ویژه علاقمندان)　CHALLENGE

تابع با ضابطه‌ی $f(x)=\sqrt{x}-\sqrt{-۲x+۶}+۲$ را در نظر گرفته و دامنه‌ی تابع $y=\sqrt{f(x)-f^{-۱}(x)}$ را مشخص کنید.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴