ریاضیات ویژه تیزهوشان

ریاضی هشتم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)

کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه 100%

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

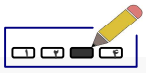
آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس‌آموز؛ (منحصر به‌فرد)

جزئیات این مجموعه



ریاضی تیزهوشان

(بسیار پیشرفته)

هسته اصلی این پک آموزشی، یک درسنامه دقیق و بسیار پیشرفته، نکات و تکنیک‌های ضروری با پوشش کامل از محتوای مورد نیاز آزمون‌ها است.

سطح پیشرفته ریاضیات

جهت آمادگی تحصیل در مدارس سمپاد و نمونه

سطح پیشرفته‌تر (تکمیلی)

ویژه کسب نمره کامل ۱۰۰٪ در آزمون‌های ورودی

طرح و تشریح

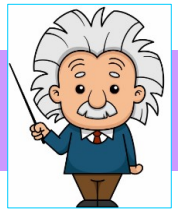
صدها مثال و تست متوسط، دشوار و دشوارتر

بانک تمرین تست

شامل صدها تست متوسط و دشوار (پاسخ‌نامه تشریحی جداگانه دارد.)

پوشش آخرین آزمون‌های سمپاد و نمونه کشوری

Up to date



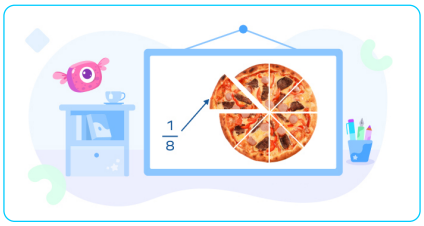
فهرست

۱	عددهای صحیح و گویا	۲
۲	تعیین عددهای اول	۲۷
۳	چند ضلعی‌ها	۴۶
۴	عبارت جبری و معادله	۷۷
۵	بردار و برآیند	۱۰۳
۶	مثلث و هم‌نهشتی	۱۲۸
۷	توان و جذر	۱۵۱
۸	آمار و احتمال	۱۷۳
۹	دایره	۱۹۷

ریاضی هشتم

تیزهوشان

۱



عددهای صحیح و گویا

فهرست	صفحه
■ عدد صحیح و گویا	۳
■ محاسبات کسرها	۱۴
■ سؤالات چهار گزینه‌ای	۲۳

۱ عدد صحیح و گویا

قبل از معرفی عددهای گویا، مروری بر عددهای صحیح داشته و برخی موارد جدید نیز خواهیم دید.

عدد صحیح:

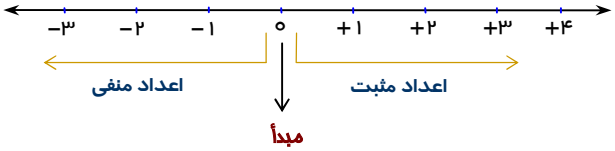
عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و . . . «**طبیعی**» بوده و با افزودن قرینه‌های آن‌ها (و صفر)، عددهای «**صحیح**» ساخته می‌شوند:

$$\ldots,-۴,-۳,-۲,-۱,۰,۱,۲,۳,۴,۵,\ldots$$

توجه کنید:

در این عددها، بزرگ‌ترین یا کوچک‌ترین عدد وجود ندارد.

نمایش روی محور:



محاسبات با عددهای صحیح را با آوردن نمونه‌هایی یادآوری می‌کنیم.

حاصل عبارت $(۳\times۳-۶)(۲^{۳}-۱۵\div۵^{۲}\times۳^{۲}-۲)$ برابر کدام است؟

❶ -۶۳ ❷ -۱۸۹ ❸ ۱۳۵ ❹ ۶۳

☑ گزینه ۴

به یاد داشته باشید:

توان‌رسانی، بعد از پرانتز، بیشترین اولویت محاسباتی را دارد!

کاربرد قوانین توان و سپس سایر محاسبات:

$$(۲-\underbrace{۳^{۲}\times۵^{۲}}\div۱۵-۲^{۳})(۶-\underbrace{۳\times۳}) = (۲-\underbrace{۱۵^{۲}\div۱۵}-۸)(۶-۹) = (۲-۱۵-۸)(-۳)$$

$$= \underbrace{(-۱۳-۸)}_{=-۲۱}(-۳) = ۶۳$$

عدد $-(-(-(۱۷)))$ را ۱۴۰۳ بار قرینه کرده و آن را a می‌نامیم. اگر قرینه‌ی عدد -۲۳ نسبت به a برابر $۲m-۱۵$ شود، مقدار m کدام است؟

❶ -۲۱ ❷ -۳۱ ❸ ۳۱ ❹ ۲۱

☑ گزینه ۱

می‌دانیم $-(-(-(۱۷))) = -۱۷$ و کافی است فقط یک بار قرینه شود:

$$a = ۱۷$$

قرینه سازی عدد -۲۳ نسبت به $a=۱۷$:

$$۱۵-۲m=۲(۱۷)-(-۲۳) \rightarrow ۱۵-۲m=۳۴+۲۳=۵۷ \rightarrow -۲m=۵۷-۱۵=۴۲$$
$$\Rightarrow m=\frac{۴۲}{-۲}=-۲۱$$

تنها با گذاشتن تعدادی پرانتز، کمترین مقداری که از عبارت زیر می‌توان حاصل کرد، چه عددی است؟

$$۱۲-۸-۵\times۶-۲\times۳$$

(**توجه:** منظور از پرانتزگذاری، فقط تعیین اولویت محاسبات است و نمی‌توانید از پرانتزها برای عمل ضرب استفاده کنید.)

❶ عددی بین ۰ و -۱۰
❷ عددی بین -۳۵ و -۴۵
❸ عددی بین -۷۵ و -۸۵
❹ عددی کمتر از -۱۰۰

گزینه ۳

روش پاسخ‌گویی با جزئیات کامل جهت یادگیری حداکثری:

۱) باید جواب نهایی تا حداکثر ممکن ظاهری بزرگ (با علامت منفی) داشته باشد. پس عدد ۳ سمت راست را در کل به ضرب تبدیل می‌کنیم:

$$(۱۲-۸-۵\times۶-۲)\times۳$$

۲) اکنون لازم است داخل پرانتز، بزرگ‌ترین عدد ممکن البته با علامت منفی ساخته شود. با یک بررسی ساده، بهترین انتخاب به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$((۱۲-۸)-(۵\times۶)-۲)\times۳$$

جواب نهایی:

$$((۱۲-۸)-(۵\times۶)-۲)\times۳=(۴-۳۰-۲)\times۳=(-۲۸)\times۳=-۸۴$$

روش‌های خلاقانه در بسیاری از محاسبات با عددهای طبیعی یا صحیح، کسب جواب با محاسبات کم را ممکن می‌سازد. دو نکته‌ای که در ادامه می‌آید، در زمره‌ی همین روش‌ها هستند.

نکته ۱

مجموع منظم زیر را در نظر بگیرید:

$$۱+۲+۳+\cdots+n$$

حاصل این عبارت برابر $\frac{n\times(n+۱)}{۲}$ است.

برای نمونه؛

- حاصل مجموع $۱+۲+۳+\cdots+۲۰$ برابر است با:

$$\frac{۲۰(۲۰+۱)}{۲}=۱۰\times۲۱=۲۱۰$$

- حاصل مجموع $۲+۴+۶+\cdots+۲۰$ را نیز می‌توان با تبدیل به عددهای طبیعی متوالی حساب کرد:

$$۲+۴+۶+\cdots+۲۰=۲(۱+۲+۳+\cdots+۱۰)=۲\times\frac{۱۰\times(۱۰+۱)}{۲}=۱۰\times۱۱=۱۱۰$$

دلیل نکته‌ی قبل:

مجموع را به دو صورت نوشته و عددها را دو به دو همان‌طور که مرتبط شده‌اند، با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{ccccccccccc} ۱ & + & ۲ & + & ۳+\cdots+ & (n-۱) & + & n \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & \searrow & & \downarrow \\ n & + & (n-۱) & + & \cdots+ & ۳ & + & ۲ & + & ۱ \end{array}$$

می‌بینید:

جمع هر جفت عدد برابر $n+۱$ است و چون تعدادشان n تا بوده، دو برابر مجموع مورد نظر $n\times(n+۱)$ خواهد شد. پس مجموع برابر است با:

$$۱+۲+۳+\cdots+n=[n\times(n+۱)]\div۲ \Rightarrow \boxed{۱+۲+۳+\cdots+n=\frac{n\times(n+۱)}{۲}}$$

حاصل جمع عددهای روبرو که در یازده سطر نوشته شده‌اند، برابر کدام است؟



❶ $۱۱\times۱۱\times۱۱۱$
❷ $۱۱\times۱۲\times۱۱۱$
❸ $۱۱\times۵\times۱۱۱$
❹ $۱۱\times۶\times۱۱۱$

گزینه ۴

تعداد عددهای ۱۱۱ که نوشته شده‌اند:

$$۱+۲+۳+\cdots+۱۱=\frac{۱۱\times(۱۱+۱)}{۲}=\frac{۱۱\times۱۲}{۲}=۱۱\times۶$$

پس باید عدد ۱۱۱ تعداد ۱۱×۶ بار با خودش جمع شود، حاصل:

$$۱۱\times۶\times۱۱۱$$

حاصل مجموع $۷۶+\cdots+۱۹+۱۶+۱۳$ برابر کدام است؟

❶ ۲۲۰
❷ ۷۹۹
❸ ۹۷۹
❹ ۱۰۲۰

گزینه ۳

با توجه به این‌که عددها ۳ تا ۳ تا افزایش یافته‌اند، از هر کدام عدد ۱۰ را کم کنیم، تا مضرب‌های ۳ ظاهر شوند:

$$۳+۶+۹+\cdots+۶۶=۳(۱+۲+۳+\cdots+۲۲)$$

پس تعداد عددها ۲۲ تا بوده و در نتیجه به جمع بالا باید $۲۲\times۱۰=۲۲۰$ نیز اضافه شود:

$$۳\times\frac{۲۲(۲۲+۱)}{۲}+۲۲۰=۳\times۱۱\times۲۳+۲۲۰=۷۵۹+۲۲۰=۹۷۹$$

(روشی ساده‌تر در فصل ۸ آورده شده است.)

اگر تمام عددهای ۵۰ سطر اول جدول روبرو را جمع کنیم، حاصل کدام است؟

۱ ۰	۲ ۲۲۵
۳ -۶۲۵	۴ -۶۵۰

$$\begin{array}{c} -۱ \\ ۲\quad -۲ \\ -۳\quad ۳\quad -۳ \\ ۴\quad -۴\quad ۴\quad -۴ \\ \vdots \end{array}$$

گزینه ۳

سطرهای شماره زوج جمعشان صفر است. در سطرهای شماره‌ی فرد، غیر از عدد اول سمت چپ، بقیه جمعشان صفر می‌شود. با توجه به این که دو سطر آخر به صورت زیر است:

$$\begin{array}{cccccccc} -۴۹ & ۴۹ & -۴۹ & \cdots & -۴۹ & ۴۹ & -۴۹ \\ ۵۰ & -۵۰ & ۵۰ & \cdots & ۵۰ & -۵۰ & ۵۰ \end{array}$$

پس فقط باید عبارت $-۴۹-\cdots-۵-۳-۱$ را حساب کنیم. مشابه قبل، با توجه به این که عددها ۲ تا ۲ تا افزایش یافته‌اند، اگر از هر کدام عدد ۱ را کم کنیم، مضرب‌های ۲ ظاهر می‌شوند:

$$-۲-۴-۶-\cdots-۵۰=-۲(۱+۲+۳+\cdots+۲۵)$$

پس تعداد عددها ۲۵ تا بوده و در نتیجه به جمع بالا باید $۲۵\times۱=۲۵$ نیز اضافه شود:

$$-۲\times\frac{۲۵(۲۵+۱)}{۲}+۲۵=-۲۵\times۲۶+۲۵=-۶۵۰+۲۵=-۶۲۵$$

برای بیان نکته‌ی بعد، از یک نمونه‌ی مناسب کمک می‌گیریم:

می‌خواهیم مجموع $۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲$ را به روشی سریع حساب کرده و الگویی کلی برای محاسبات مشابه به‌دست آوریم. این عبارت را به صورت گسترده می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} ۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲ &= ۱+۲\times۲+۳\times۳+۴\times۴ \\ &= ۱+۲+۲+۳+۳+۳+۴+۴+۴+۴ \end{aligned}$$

اکنون، جمع آخر را به سه ترتیب گوناگون نوشته و عددهای متناظر را با هم جمع می‌کنیم:

$$\begin{array}{c} ۱ \\ ۲\ ۲ \\ ۳\ ۳\ ۳ \\ ۴\ ۴\ ۴\ ۴ \end{array} + \begin{array}{c} ۴ \\ ۳\ ۴ \\ ۲\ ۳\ ۴ \\ ۱\ ۲\ ۳\ ۴ \end{array} + \begin{array}{c} ۴ \\ ۴\ ۳ \\ ۴\ ۳\ ۲ \\ ۴\ ۳\ ۲\ ۱ \end{array} = \begin{array}{c} ۹ \\ ۹\ ۹ \\ ۹\ ۹\ ۹ \\ ۹\ ۹\ ۹\ ۹ \end{array}$$

تعداد عددهای ۹ برابر $۱+۲+۳+۴=\frac{۴\times(۴+۱)}{۲}$ است و بنابراین سه برابر مجموع برابر $۹\times\frac{۴\times(۴+۱)}{۲}$ است.

در نتیجه:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲=\frac{۹\times\frac{۴\times(۴+۱)}{۲}}{۳}=\frac{\frac{۴\times(۴+۱)\times۹}{۲}}{۳}=\frac{۴\times(۴+۱)\times۹}{۶}$$

(**توجه:** عدد ۹ که در محاسبات بالا ظاهر شده، در واقع $۲\times۴+۱$ است.)

با توجه به مورد قبل، نکته‌ی بعدی قابل بیان است:

نکته ۲

مجموع منظم زیر را در نظر بگیرید:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+n^۲$$

حاصل این عبارت همواره برابر است با: $\frac{n\times(n+۱)\times(۲n+۱)}{۶}$

برای نمونه؛

حاصل عبارت $۱+۴+۹+۱۶+\cdots+۱۲۱$ برابر است با:

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۴^۲+\cdots+۱۱^۲ \xrightarrow{n=۱۱} =\frac{۱۱\times۱۲\times۲۳}{۶}=۱۱\times۲\times۲۳=۵۰۶$$

کدام مقایسه در مورد عددهای زیر صحیح است؟

$$a=۱+۲+۳+\cdots+۱۰۰۰$$
$$b=۱^۲+۲^۲+۳^۲+\cdots+۵۰۰^۲$$
$$c=(۱۰۰۱-۱)(۱۰۰۰-۱)\cdots(-۱۰۰۱-۱)$$

❶ $a<b<c$ ❷ $c<b<a$ ❸ $c<a<b$ ❹ $b<c<a$

گزینه ۳

چون $\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰۱}{۲}=۵۰۰\times۱۰۰۱$ و $a=\frac{۱۰۰۰\times۱۰۰۱}{۲}$ است، چون $b=\frac{۵۰۰\times۵۰۱\times۱۰۰۱}{۶}=۲۵۰\times۱۶۷\times۱۰۰۱$ و $۲۵۰\times۱۶۷>۵۰۰$، بنابراین باید:

$$a<b$$

در عبارت سوم، یک پرانتز به صورت $(۱-۱)=۰$ بوده و بنابراین $c=۰$ خواهد شد. در نتیجه:

$$c<a<b$$

معرفی دقیق عددهای کسری:

عددهای گویا:

کسرهایی هستند که صورت و مخرج آن‌ها دو عدد صحیح باشند. مانند:

$$-\frac{۷}{۳} \quad و \quad \frac{۱۲}{۵} \quad و \quad \frac{-۲۱}{۳}$$

توجه کنید:

۱) وقتی یک کسر منفی (مانند: $-\frac{۷}{۳}$) داریم، علامت منفی را می‌توان به هر یک از سه صورت $-\frac{۷}{۳}$ یا $\frac{-۷}{۳}$ یا $\frac{۷}{-۳}$ قرار داد که البته موارد اول و دوم بیشتر استفاده می‌شوند.

۲) چنان‌که می‌دانیم، کسر همان حاصل تقسیم صورت بر مخرج است و چون تقسیم بر صفر بی‌معنی است:

در هر عدد گویا، مخرج باید مخالف صفر باشد.

برای نمونه؛

کسرهای $\frac{۷}{۰}$ و $\frac{۰}{۰}$ بی‌معنی (یا: تعریف نشده) بوده، ولی $\frac{۰}{۷}=۰$ و $\frac{۰}{-۳}=۰$ است.

نمایش کسرها:

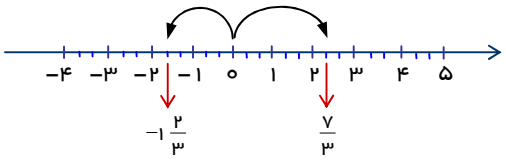
هر کسر گویا را می‌توان روی محور و کسرهای مثبت را می‌توان در شکل‌های هندسی نیز نشان داد.

❖ نمایش روی محور:

هر واحد روی محور را به اندازه‌ی مخرج به تعداد قسمت برابر تقسیم کرده و واحدهای کوچک را به اندازه‌ی صورت کسر می‌شماریم. (اگر کسر منفی باشد، حرکت به سمت چپ محور.)

برای نمونه؛

عددهای $\frac{۷}{۳}$ و $-۱\frac{۲}{۳}$ روی محور نمایش داده شده‌اند:

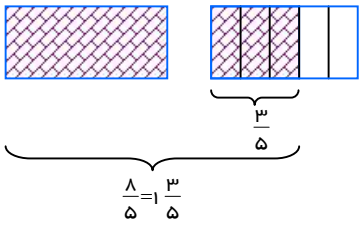


❖ نمایش هندسی:

کافی است یک شکل هندسی (مانند مستطیل) را طبق مخرج کسر، به تعداد قسمت‌های برابر تقسیم کرده و تعداد بخش‌های کوچک را به تعداد صورت کسر انتخاب کنیم. (اگر صورت از مخرج بزرگ‌تر باشد، ابتدا تبدیل به عدد مخلوط شود.)

برای نمونه؛

نمایش هندسی عدد گویای $۱\frac{۳}{۵}=\frac{۸}{۵}$ به صورت زیر است:

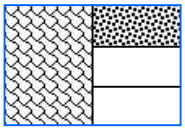


نیمی از کتاب‌های امین، علمی، $\frac{۱}{۳}$ باقی‌مانده، کتاب‌های داستانی و او ۴ کتاب شعر نو دارد. اگر $\frac{۱}{۴}$ کل کتاب‌های او تاریخی باشند، امین حداقل چند کتاب دارد؟

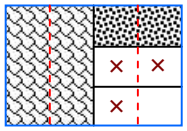
❶ ۳۶ ❷ ۴۸ ❸ ۹۶ ❹ ۱۲۰

گزینه ۲

از نمایش هندسی کمک گرفته، ابتدا بخش علمی و داستانی را مشخص می‌کنیم.



برای نمایش بخش تاریخی، شکل را به صورت عمودی به ۴ بخش تقسیم کرده و سپس $\frac{۱}{۴}$ از کل را مشخص می‌کنیم:



می‌بینید که فقط $\frac{۱}{۱۲}$ از شکل باقی مانده است. اگر کل این قسمت را مربوط به ۴ کتاب شعر بگیرید، تعداد کل براابر است با:

$$۱۲\times۴=۴۸$$

نکته ۳

واضح است که تمام عددهای صحیح گویا هم محسوب می‌شوند؛ زیرا می‌توان مخرج آن‌ها را ۱ گرفت.

برای نمونه؛

$$-۳=\frac{-۳}{۱} \quad \text{و} \quad ۷=\frac{۷}{۱}$$

حالت عکس را می‌توان چنین بیان کرد: **(مهم)**

برای این که یک عدد گویا، صحیح هم باشد، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد. (یا صورتِ کسر صفر باشد!)

برای نمونه؛

عدد گویای $\frac{۰}{۴}=۰$ صحیح هم هست؛ همچنین، کسر $-\frac{۱۲}{۳}$ عددی صحیح است، زیرا: $-\frac{۱۲}{۳}=-\frac{۴}{۱}=-۴$.

چه تعداد عدد صحیح در بین عددهای زیر وجود دارد؟

$$\frac{۶۵۰}{۱۱},\ \dots,\ \frac{۲۵۶}{۱۱},\ \frac{۲۵۵}{۱۱},\ \frac{۲۵۴}{۱۱},\ \frac{۲۵۳}{۱۱}$$

❶ ۳۶ تا ❷ ۳۷ تا ❸ ۵۹ تا ❹ ۵۸ تا

گزینه ۲

باید ببینیم از ۲۵۳ تا ۶۵۰، چند عدد بر ۱۱ بخش‌پذیر است. روش و مراحل: (دقیق بخوانید!)

۱) چون $\frac{۶۵۰}{۱۱}=۵۹/۰۹$ است، از ۱ تا ۶۵۰ تعداد ۵۹ عدد بخش‌پذیر بر ۱۱ داریم.

۲) در ۵۹ عدد مرحله‌ی قبل، چون $\frac{۲۵۲}{۱۱}=۲۲/۹$ است، تعداد ۲۲ تا زیاد شمرده شده و باید کم شود.

جواب:

$$۵۹-۲۲=۳۷$$

اگر n یک عدد صحیح باشد، مجموع همه‌ی عددهای صحیح که می‌توانند جای n قرار گیرند به طوری‌که $\frac{5n+24}{n+3}$ یک عدد صحیح باشد، چقدر است؟

❶ -12 ❷ -18 ❸ 18 ❹ 12

گزینه ۲

چون صورت صفر نمی‌شود (چرا؟!)، فقط باید بخش‌پذیری صورت بر مخرج را بررسی کرد. با ظاهر فعلی، این کار آسان نیست؛ کسر را ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{5n+24}{n+3}=\frac{5n+15}{n+3}+\frac{9}{n+3}=\frac{5(n+3)}{n+3}+\frac{9}{n+3}=5+\frac{9}{n+3}$$

پس:

باید ۹ بر $n+3$ بخش‌پذیر باشد. بررسی تمام حالت‌ها:

$n+3=9 \Rightarrow n=6$ $\quad$ $n+3=3 \Rightarrow n=0$ $\quad$ $n+3=1 \Rightarrow n=-2$

$n+3=-9 \Rightarrow n=-12$ $\quad$ $n+3=-3 \Rightarrow n=-6$ $\quad$ $n+3=-1 \Rightarrow n=-4$

شش جواب برای n حاصل شد؛ مجموع آن‌ها:

$$-2+0+6-4-6-12=-18$$

به خاصیتی ویژه‌ی عددهای گویا توجه کنید:

نکته ۴

بی‌شمار نمایش:

اگر هر دوی صورت و مخرج یک عدد گویا را در عددی یکسان ضرب یا بر آن تقسیم کنید، مقدار آن عدد گویا تغییر نمی‌کند! برای نمونه:

$$\frac{6}{14}\xrightarrow{\times 3}\frac{18}{42}\xrightarrow{\div 2}\frac{9}{21}$$

بعلاوه:

با توجه به نکته‌ی بالا، به چند مورد مهم و مرتبط اشاره می‌شود:

- هر عدد گویا بی‌شمار نمایش به صورت کسر دارد.
- با تقسیم صورت و مخرج کسر بر عددهایی یکسان و تکرار آن تا جای ممکن، کسر به ساده‌ترین صورت ممکن نوشته خواهد شد. به صورت دقیق‌تر:

برای تبدیل یکباره‌ی کسر به ساده‌ترین صورت ممکن (به نام: کسر ساده نشدنی):

کافی است هر دوی صورت و مخرج را بر «ب.م.م» آن‌ها تقسیم کنیم.

برای نمونه:

در کسر $\frac{880}{1360}$، با محاسبه خواهیم دید که ب.م.م $(880,1360)=80$ است. در نتیجه:

$$\frac{۸۸۰}{۱۳۶۰}=\frac{۸۸۰\div ۸۰}{۱۳۶۰\div ۸۰}=\frac{۱۱}{۱۷}$$

نمایش ساده نشدنی کسرهای $\frac{۵۲\times ۲۱۸}{۹۱\times ۲۱۸}$ و $\frac{۵۲+۲۱۸}{۹۱+۲۱۸}$ به ترتیب کدام است؟

❶ $\frac{۵۲}{۹۱}$ و $\frac{۹۰}{۱۰۳}$ ❷ $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۳}{۷}$ ❸ $\frac{۴}{۷}$ و $\frac{۹۰}{۱۰۳}$ ❹ $\frac{۱۳}{۷}$ و $\frac{۴}{۷}$

گزینه ۳

کسر اول به آسانی ساده می‌شود:

$$\frac{\overbrace{۵۲}^{۴\times ۱۳}\times ۲۱۸}{\underbrace{۹۱}_{۷\times ۱۳}\times ۲۱۸}=\frac{۴}{۷}$$

اما صورت و مخرج کسر دوم به صورت جمع بوده و فعلاً حق ساده کردن نداریم. جمع‌ها را انجام داده و سپس طبق معمول:

$$\frac{۵۲+۲۱۸}{۹۱+۲۱۸}=\frac{۲۷۰}{۳۰۹}=\frac{۹۰}{۱۰۳}$$

خاصیتی دیگر از عددهای گویا:

نکته ۵

عددهای بین دو کسر:

چنان که در ادامه روش‌های مربوطه آورده شده‌اند؛

بین هر دو عدد گویا (و در نتیجه بین هر دو عدد صحیح)، بی‌شمار کسر گویا وجود دارد.

روش‌ها:

با داشتن دو کسر، به روش‌های زیر می‌توانید به تعداد دلخواه عدد گویا بین آن دو بنویسید.

- مخرج‌ها را یکسان و به اندازه‌ی کافی بزرگ نوشته تا بتوان صورت کسرها را طوری انتخاب کرد تا بین آن کسرها قرار گیرند.
- اگر $\frac{a}{b}$ و $\frac{c}{d}$ دو کسر باشند، همیشه کسر $\frac{a+c}{b+d}$ بین آن دو قرار دارد.

چند عدد گویا با مخرج ۲۴ بین $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۱}{۳}$ قرار دارد؟

❶ ۶ ❷ ۵ ❸ ۴ ❹ ۳

گزینه ۴

با توجه به این‌که:

$\frac{۱}{۳}=\frac{۱\times۸}{۳\times۸}=\frac{۸}{۲۴}$ و $\frac{۱}{۶}=\frac{۱\times۴}{۶\times۴}=\frac{۴}{۲۴}$

فقط سه کسر $\frac{۵}{۲۴}$ و $\frac{۶}{۲۴}$ و $\frac{۷}{۲۴}$ قابل قبول هستند.

در انتهای این بخش، مقایسه‌ی عددهای گویا را خواهیم دید.

نکته ۶

مقایسه‌ی دو کسر:

وقتی دو کسر مثبت داشته باشیم، با تبدیل مخرج‌ها به عددهایی یکسان؛

کسری که صورت بزرگ‌تر دارد، نسبت به کسر دیگر، بزرگ‌تر است.

بعلاوه:

در صورتی که صورت‌ها یکسان باشد، کسری که مخرج بزرگ‌تر دارد، از کسر دیگر کوچک‌تر است.

برای نمونه؛

$\frac{۷}{۱۱}<\frac{۷}{۱۰}<\frac{۷}{۹}<\cdots$ و $\frac{۷}{۱۱}<\frac{۸}{۱۱}<\frac{۹}{۱۱}<\cdots$

بویژه:

در کسرهای مثبت، اگر صورت از مخرج کوچک‌تر باشد، کسر از ۱ کوچک‌تر بوده و اگر صورت بزرگ‌تر از مخرج باشد، کسر بزرگ‌تر از ۱ است. برای نمونه؛

$$\frac{۷}{۸}<۱<\frac{۲۰}{۱۹}$$

چند عدد گویا بین $\frac{۲۱}{۱۰۰}$ و $-\frac{۴۱}{۸۰}$ وجود دارند که مخرج‌شان ۲۰ باشد؟

❶ ۱۲ ❷ ۱۳ ❸ ۱۵ ❹ بی‌شمار

گزینه ۳

مخرج هر دو کسر را به ۲۰ تبدیل می‌کنیم؛

$\frac{۲۱\div۵}{۱۰۰\div۵}=\frac{۴/۲}{۲۰}$ و $-\frac{۴۱\div۴}{۸۰\div۴}=-\frac{۱۰/۲۵}{۲۰}$

کسرهای قابل قبول $-\frac{۱۰}{۲۰}$ و $-\frac{۹}{۲۰}$ و ... و $-\frac{۱}{۲۰}$ و $\frac{۰}{۲۰}=۰$ و $\frac{۱}{۲۰}$ و ... و $\frac{۴}{۲۰}$ بوده که تعدادشان ۱۵ = ۴ + ۱ + ۱۰ است.

اگر $۰<\frac{m}{n}<۱$ باشد، کدام مورد نادرست است؟

❶ $۱-\frac{n}{m}<\frac{n}{m}-۱$ ❷ $۱-\frac{m}{n}<-۱+\frac{m}{n}$ ❸ $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}<\frac{n}{m}$ ❹ موارد ۱ و ۳

گزینه ۲

با توجه به $\frac{m}{n}>0$ و $\frac{m}{n}<1$، عدد $-\frac{m}{n}-1$ مثبت و عدد $-1+\frac{m}{n}$ منفی بوده و بنابراین مورد دوم قطعاً صحیح نیست.

موارد اول و سوم صحیح هستند؛ زیرا:

عدد $-\frac{n}{m}-1$ منفی و عدد $\frac{n}{m}-1$ مثبت است؛ پس گزینه‌ی اول صحیح بوده؛ همچنین، چون $\frac{m}{n}-\frac{n}{m}$ منفی خواهد شد، گزینه‌ی سوم نیز صحیح است.

کدام عدد بین کسرهای $\frac{-2023}{2022}$ و $\frac{-2022}{2023}$ قرار دارد؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ -1 ❹ $-\frac{2022}{2021}$

گزینه ۳

موقتاً علامت منفی را در نظر نگیرید. می‌دانیم:

$$\frac{2022}{2023}<1<\frac{2023}{2022}$$

پس باید $-\frac{2022}{2023}>-1>-\frac{2023}{2022}$ باشد. (**تکلیف:** توضیح دهید چرا گزینه‌ی چهارم جواب نیست؟)



۲ محاسبات کسرها

برای انجام چهار عمل اصلی در کسرها روش‌هایی در ادامه آورده شده است. این عمل‌ها و همچنین توان رسانی کسرها، مشابه محاسبات عددهای صحیح، با رعایت اولویت‌ها انجام می‌شود.

یادآوری:

جمع و تفریق کسرهایی که مخرج‌های مشترک دارند، به آسانی انجام می‌شود:

$$\frac{b}{a}+\frac{c}{a}=\frac{b+c}{a} \quad \text{و} \quad \frac{b}{a}-\frac{c}{a}=\frac{b-c}{a}$$

اگر مخرج‌ها یکسان نباشد، لازم است مخرج مشترک بگیریم.

توجه کنید:

بهترین مخرج مشترک، «ک.م.م» مخرج کسرها است.

برای نمونه؛

$$\frac{۷}{۱۲}-\frac{۵}{۱۶} \xrightarrow{[۱۲,۱۶]=۴۸} \frac{۷}{۱۲}-\frac{۵}{۱۶}=\frac{۷\times۴-۵\times۳}{۴۸}=\frac{۱۳}{۴۸}$$

کدام عدد روی محور فاصله‌ی برابر تا دو کسر $-\frac{۴}{۵}$ و $\frac{۵}{۹}$ دارد؟

❶ $-\frac{۱۱}{۹۰}$ ❷ $\frac{۱۱}{۹۰}$ ❸ $\frac{۱۱}{۴۵}$ ❹ $-\frac{۱۱}{۴۵}$

☑ گزینه ۱

واضح است که جواب عدد پیش (وسط) آن‌ها روی محور است. پس باید با هم جمع شده و حاصل بر ۲ تقسیم شود:

$$\frac{۵}{۹}+(-\frac{۴}{۵})=\frac{۵}{۹}-\frac{۴}{۵}=\frac{۲۵-۳۶}{۴۵}=-\frac{۱۱}{۴۵} \xrightarrow{\div۲} -\frac{۱۱}{۴۵}\div۲=-\frac{۱۱}{۴۵}\times\frac{۱}{۲}=-\frac{۱۱}{۹۰}$$

حاصل عبارت روبه‌رو برابر کدام است؟ $(\frac{۹}{۷}+\frac{۱۰}{۸}+\frac{۱۱}{۹}+\cdots+\frac{۱۰۸}{۱۰۶})-(\frac{۲}{۷}+\frac{۲}{۸}+\frac{۲}{۹}+\cdots+\frac{۲}{۱۰۶})$

❶ ۵۰ ❷ ۱۰۶ ❸ ۵۳ ❹ ۱۰۰

☑ گزینه ۴

جفت‌جفت عددها از دو پرانتز را کنار هم قرار می‌دهیم:

$$\frac{۹}{۷}-\frac{۲}{۷}=\frac{۷}{۷}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{۱۰}{۸}-\frac{۲}{۸}=\frac{۸}{۸}=۱ \quad \text{و} \quad \frac{۱۱}{۹}-\frac{۲}{۹}=\frac{۹}{۹}=۱ \quad \text{و} \cdots$$

چون از ۷ تا ۱۰۶ دقیقاً صد عدد وجود دارد (چرا؟!)، پس باید صدتا عدد ۱ با هم جمع شود:

$$۱+۱+۱+\cdots+۱=۱۰۰$$

حاصل عبارت مقابل برابر کدام است؟ $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{512}$

❶ $\frac{1025}{512}$ ❷ $1/999$ ❸ 2 ❹ $\frac{1023}{512}$

گزینه ۴

با هدف استفاده از راهبرد حل مسأله‌ی ساده‌تر؛ حاصل مجموع زیر را حساب می‌کنیم.

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$$

اگر کسر $\frac{1}{8}$ را اضافه و کم کنیم (بی‌تاثیر در حاصل عبارت)، جمع به شیوه‌ی دومینویی! حساب می‌شود:

$$A=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\underbrace{\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{\frac{1}{4}}}_{\frac{1}{2}}-\frac{1}{8} \rightarrow A=1+1-\frac{1}{8} \Rightarrow A=2-\frac{1}{8}=\frac{15}{8}$$

در جمع مورد نظر هم کافی است کسر $\frac{1}{512}$ را اضافه و کم کنیم:

$$\underbrace{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{512}}_{=1}+\frac{1}{512}-\frac{1}{512}=1+1-\frac{1}{512}=\frac{1024-1}{512}=\frac{1023}{512}$$

نکته ۷

ضرب و تقسیم دو کسر:

هنگام ضرب، صورت‌ها در هم و مخرج‌ها نیز در هم ضرب می‌شوند. مانند:

$$\frac{7}{9}\times\frac{12}{5}=\frac{7\times12}{9\times5}=\frac{7\times4}{3\times5}=\frac{28}{15}$$

تقسیم:

علامت تقسیم تبدیل به ضرب شده، کسر دوم معکوس می‌شود و سپس ضرب را حساب می‌کنیم.

برای نمونه؛

$$\frac{7}{11}\div\frac{14}{33}=\frac{7}{11}\times\frac{33}{14}=\frac{1}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{3}{2}$$

توجه کنید:

وقتی عددی صحیح در یک کسر ضرب می‌شود، کافی است عدد را فقط در صورت ضرب کنید. (چرا؟!)

برای نمونه؛

$$15\times\frac{12}{5}=\frac{15\times12}{5}=3\times12=36$$

مهرداد یک ربات جهنده ساخته است. این ربات با دستور «**حرکت**» پرشی به طول $\frac{۲}{۳}$ به سمت راست و با فرمان «**عقب‌گرد**» پرشی به طول $\frac{۱}{۴}$ به سمت چپ انجام می‌دهد. مهرداد این ربات را در نقطه‌ی $(-۱\frac{۱}{۲})$ قرار داده و به طور متوالی ۴ بار دستور حرکت و ۳ بار دستور عقب‌گرد به آن می‌دهد. ربات در چه نقطه‌ای توقف می‌کند؟

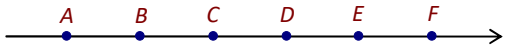
❶ $\frac{۷}{۱۲}$ ❷ $\frac{۵}{۱۲}$ ❸ $-\frac{۵}{۱۲}$ ❹ $-\frac{۷}{۱۲}$

گزینه ۲

۴ بار دستور حرکت: $۴\times\frac{۲}{۳}=\frac{۸}{۳}$ و ۳ بار دستور عقب‌گرد: $۳\times\frac{۱}{۴}=\frac{۳}{۴}$ است. با توجه به این‌که در دستور عقب‌گرد، پرش به سمت چپ انجام می‌شود:

$$-۱\frac{۱}{۲}+\frac{۸}{۳}-\frac{۳}{۴}=-\frac{۳}{۲}+\frac{۸}{۳}-\frac{۳}{۴}=\frac{-۱۸+۳۲-۹}{۱۲}=\frac{۵}{۱۲}$$

مطابق شکل نقاط A، B، C، D، E و F با فاصله‌های مساوی روی محور اعداد داده شده‌اند. اگر نقطه‌ی A نشان دهنده‌ی $-\frac{۱}{۳}$ و نقطه‌ی F نشان دهنده‌ی $\frac{۱}{۲}$ باشد، نقطه‌ی B کدام عدد را نشان می‌دهد؟



❶ $\frac{۱۱}{۳۰}$ ❷ $\frac{۱}{۶}$ ❸ $-\frac{۱}{۶}$ ❹ $-\frac{۳}{۱۰}$

گزینه ۳

فاصله‌ی A تا F برابر است با: $\frac{۱}{۲}-(-\frac{۱}{۳})=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}=\frac{۳+۲}{۶}=\frac{۵}{۶}$. طول هر قطعه‌ی کوچک:

$$\frac{۵}{۶}\div۵=\frac{۵}{۶}\times\frac{۱}{۵}=\frac{۱}{۶}$$

بنابراین:

$$B=A+\frac{۱}{۶}=-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶}=\frac{-۲+۱}{۶}=-\frac{۱}{۶}$$

یادآوری:

وقتی در صورت یا مخرج یک کسر یا در هر دو، عددهای کسری قرار دارد، می‌توانید آن را به صورت تقسیم نوشته یا قاعده‌ی «**دور در دور- نزدیک در نزدیک**» را به‌کار ببرید. مانند:

$$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱\times۱۲}{۳\times۵}=\frac{۱\times۴}{۱\times۵}=\frac{۴}{۵}$$

یا

$$\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۱۲}}=\frac{۱}{\underbrace{۳\div\frac{۵}{۱۲}}_{\frac{۱}{۳}\times\frac{۱۲}{۵}}}=\frac{۱}{۱}\times\frac{۴}{۵}=\frac{۴}{۵}$$

بعلاوه؛

موارد زیر پرکاربرد بوده و توجه به آن‌ها ضروری است: **(مهم و کاربردی)**

۱) اگر یکی از دو کسر عدد صحیح باشد، به آن مخرج یک داده و سپس دور در دور . . . کنید. مانند:

$$\frac{۱}{\frac{۳}{۵}}=\frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۵}{۱}}=\frac{۱\times۱}{۳\times۵}=\frac{۱}{۱۵}$$

۲) در صورت امکان، عددهای اول و سوم و همچنین دوم و چهارم را می‌توانید با هم ساده کنید. مانند:

$$\frac{\frac{۶}{۳۵}}{\frac{۱۲}{۴۹}}=\frac{\frac{۱}{۵}}{\frac{۲}{۷}}=\frac{۱\times۷}{۵\times۲}=\frac{۷}{۱۰}$$

۳) در کسرهای شلوغ، همواره مراقبت کنید خط کسری اصلی را با خط کسری فرعی موجود در صورت و مخرج اشتباه نگیرید. (مانند سؤال بعدی)

۴) اگر صورت یا مخرج خودشان شامل کسرهای ترکیبی گوناگون باشند، باید از جزئی‌ترین صورت یا مخرج شروع به محاسبات کرده تا صورت و مخرج کسر اصلی معلوم شوند.

برای نمونه؛

در محاسبه‌ی عبارت زیر، ابتدا لازم است قسمت $\frac{۳}{\frac{۲}{۵}}$ در صورت را محاسبه کنیم:

$$\frac{\frac{۳}{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۵}{-۲}}=?\qquad \frac{\frac{۳}{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۵}{-۲}}=\frac{\frac{۳}{\frac{۲}{۵}}}{\frac{۵}{-۲}}=\frac{۱۵}{\frac{۲}{-۲}}=\frac{۱۵}{\frac{-۲}{۱}}=-\frac{۱۵}{۴}$$

۵) صورت و مخرج کسر هر کدام مانند پرانتز عمل می‌کنند؛ یعنی: اگر در صورت یا مخرج یک عبارت محاسباتی وجود داشته باشد، باید ابتدا آن را ساده کرد. برای نمونه؛

$$\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۴+۱۲\div(-۶)}{-۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۴+(-۲)}{-۴}}=\frac{\frac{۳}{۲}}{\frac{۲}{-۴}}=\frac{-۱۲}{۴}=-۳$$

(رعایت موارد بالا را در پاسخ‌های چند تست بعد با دقت دنبال کنید.)

کدام عدد از بقیه بزرگ‌تر است؟

❶ $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}$

❷ $\frac{۱}{\frac{۲}{\frac{۳}{۴}}}$

❸ $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}$

❹ $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}$

گزینه ۱

هر چهار عدد را به صورت ساده تبدیل می‌کنیم. (خط کسرهای فرعی کوچک‌تر کشیده شده‌اند!)

کسر ۱: $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{۱\times۴}{۲\times۳}=\frac{۲}{۳}$

کسر ۲: $\frac{۱}{\frac{۲}{\frac{۳}{۴}}}=\frac{۱}{\frac{۲}{\frac{۱}{\frac{۳}{۴}}}}=\frac{۱}{\frac{۸}{۳}}=\frac{\frac{۱}{۱}}{\frac{۸}{۳}}=\frac{۳}{۸}$

کسر ۳: $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۱}}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۳}{\frac{۲}{\frac{۴}{۱}}}=\frac{۳}{۸}$

کسر ۴: $\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۴}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۳}{۱}}=\frac{۱}{\frac{۶}{\frac{۴}{۱}}}=\frac{۱}{۲۴}$

واضح است که $\frac{۲}{۳}$ از بقیه بزرگ‌تر است.

اگر $۱+\frac{x}{۲}=\frac{۲}{۳}$ باشد، حاصل عبارت روبرو برابر کدام است؟ $\frac{x}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{x}{۲}}}$

1) $\frac{۴}{۱۵}$ 2) $-\frac{۴}{۱۵}$ 3) $-\frac{۲}{۱۵}$ 4) $\frac{۲}{۱۵}$

گزینه ۲

ابتدا مقدار x را از معادله معلوم می‌کنیم:

$$۱+\frac{x}{۲}=\frac{۲}{۳}\xrightarrow{\times۶}۶\times۱+۶\times\frac{x}{۲}=۶\times\frac{۲}{۳}\rightarrow۶+۳x=۴\rightarrow۳x=۴-۶=-۲\Rightarrow x=-\frac{۲}{۳}$$

اکنون کسر $-\frac{۲}{۳}$ را در عبارت خواسته شده جایگزین x می‌کنیم:

$$\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{-\frac{۲}{۳}}{۲}}}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۱}{۱+\frac{-۱}{۳}}}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۱}{\frac{۲}{۳}}}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{۱+\frac{۳}{۲}}=\frac{-\frac{۲}{۳}}{\frac{۵}{۲}}=-\frac{۴}{۱۵}$$

کدام عدد از بقیه کوچک‌تر است؟

1) $\frac{۲}{۲-\frac{۲}{۲-\frac{۲}{۳}}}$ 2) $\frac{۲+\frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳}-۲\frac{۲}{۳}}$ 3) $\frac{\frac{۲}{۳}}{۲-\frac{\frac{۲}{۳}}{۲+\frac{۲}{۳}}}$ 4) $\frac{-۲+\frac{۲}{۳}}{۲+\frac{۲}{۳}}$

گزینه ۲

با قدری دقت می‌بینید که کسرهای اول و سوم مثبت و کسرهای دوم و چهارم منفی هستند، پس فقط کافی است دو مقدار منفی را دقیق مشخص کنیم:

$$\frac{-۲+\frac{۲}{۳}}{۲+\frac{۲}{۳}}=\frac{-\frac{۴}{۳}}{\frac{۸}{۳}}=-\frac{۴}{۸}=-\frac{۱}{۲} \qquad \text{و} \qquad \frac{۲+\frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳}-۲\frac{۲}{۳}}=\frac{\frac{۸}{۳}}{-۲}=-\frac{۴}{۳}$$

اکنون با توجه به این‌که $\frac{۴}{۳}>\frac{۱}{۲}$ است، بنابراین $-\frac{۴}{۳}<-\frac{۱}{۲}$ می‌باشد.

اگر $A=۲+\frac{۲}{۳}\div\frac{۱}{۵}$ و $B=\frac{\frac{۳}{۲}-۱}{\frac{۴+۱۲\div(-۶)}{-۴-۱}}$ باشند، حاصل $A-B$ برابر کدام است؟

❶ $۸\frac{۱}{۴}$ ❷ $۹\frac{۱}{۴}$ ❸ $۷\frac{۳}{۴}$ ❹ $۶\frac{۳}{۴}$

گزینه ۲

مقادیر A (با حل معادله) و B را مشخص می‌کنیم:

$$\frac{۲}{۳}A=۲+\frac{۲}{۳}\times۵ \rightarrow \frac{۲}{۳}A=۲+\frac{۱۰}{۳}=\frac{۱۶}{۳} \rightarrow A=\frac{\frac{۱۶}{۳}}{\frac{۲}{۳}}=۸$$

$$B=\frac{\frac{۳}{۲}-۱}{\frac{۴+۱۲\div(-۶)}{-۴-۱}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۴+(-۲)}{-۵}}=\frac{\frac{۱}{۲}}{\frac{۲}{-۵}}=-\frac{۵}{۴}$$

در نتیجه:

$$A-B=۸+\frac{۵}{۴}=۸+۱\frac{۱}{۴}=۹\frac{۱}{۴}$$

در پایان این بخش، محاسبه‌ی جمع و تفریق‌های تلسکوپی مرور می‌شود. کلید اصلی نکته‌ی زیر است:

نکته ۸

هرگاه مخرج یک کسر به صورت ضرب دو عدد بوده و همزمان صورت کسر اختلاف همان دو عدد باشد، آن کسر به صورت تفریق دو کسر تفکیک می‌شود که معمولاً در محاسبات مفید است.

برای نمونه:

$$\frac{۴}{۲۱}=\frac{۴}{۳\times۷}=\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴} \qquad \text{و} \qquad \frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۵\times۴}=\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۵}$$

بیان نمادین:

اگر $a<b$ باشد، در این صورت:

$$\frac{b-a}{b\times a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$ (در سمت راست، ابتدا کسر با مخرج کوچک‌تر نوشته می‌شود.)

دلیل:

با تفکیک کسر (یعنی: بر عکس مخرج مشترک) و سپس ساده کردن کسرها:

$$\frac{b-a}{b\times a}=\frac{b}{b\times a}-\frac{a}{b\times a}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$$

توجه کنید:

ممکن است در صورتِ کسر، به جای تفریق، جمع دو عدد موجود در مخرج قرار داشته باشد. در این صورت، تفکیک به صورت زیر انجام شده و گاهی مفید واقع می‌گردد:

$$\frac{b+a}{b\times a}=\frac{b}{b\times a}+\frac{a}{b\times a}\Rightarrow \boxed{\frac{b+a}{b\times a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

برای نمونه؛

کسر $\frac{10}{21}=\frac{3+7}{3\times 7}$ را می‌توان به صورت $\frac{1}{3}+\frac{1}{7}$ نوشت.

حاصل مجموع مقابل کدام است؟ $\frac{2}{3\times 5}+\frac{2}{5\times 7}+\frac{2}{7\times 9}+\cdots+\frac{2}{49\times 51}$

❶ $\frac{1}{3}$ ❷ $\frac{18}{51}$ ❸ $\frac{16}{51}$ ❹ $\frac{2}{3}$

گزینه ۳

شرایط تبدیل تمام کسرها طبق نکته‌ی قبل برقرار است:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{49}-\frac{1}{51}$$

جفت کسرهای قرینه با هم حذف شده و فقط اولین و آخرین کسر باقی می‌مانند:

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{51}=\frac{17-1}{51}=\frac{16}{51}$$

نکته ۹

در تکنیک بالا، اگر اختلاف دو عدد ضرب شده‌ی مخرج در صورت کسر وجود نداشت، خودمان با تغییر مناسب در صورت، شرایط را فراهم می‌کنیم!

برای نمونه؛

کسر $\frac{1}{15}=\frac{1}{3\times 5}$ را ابتدا به صورت $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3\times 5}$ نوشته و سپس خواهیم داشت:

$$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3\times5}=\frac{1}{2}\times(\frac{1}{3}-\frac{1}{5})$$

حاصل مجموع مقابل کدام است؟ $\frac{1}{1\times6}+\frac{1}{6\times11}+\frac{1}{11\times16}+\cdots+\frac{1}{46\times51}$

1) $\frac{40}{51}$ 2) $\frac{50}{51}$ 3) $\frac{20}{51}$ 4) $\frac{10}{51}$

گزینه ۴

اختلاف عددها در مخرج کسرها ۵ است و باید آن را در صورت‌ها ظاهر کنیم:

$$\frac{1}{1\times6}+\frac{1}{6\times11}+\frac{1}{11\times16}+\cdots+\frac{1}{46\times51}=\frac{1}{5}(\frac{5}{1\times6}+\frac{5}{6\times11}+\frac{5}{11\times16}+\cdots+\frac{5}{46\times51})$$

اکنون مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{5}(\frac{1}{1}-\frac{1}{6}+\frac{1}{6}-\frac{1}{11}+\frac{1}{11}-\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{46}-\frac{1}{51})=\frac{1}{5}(1-\frac{1}{51})=\frac{1}{5}\times\frac{51-1}{51}=\frac{1}{5}\times\frac{50}{51}=\frac{10}{51}$$

حاصل مجموع مقابل کدام است؟ $\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}$

1) $\frac{n}{n+1}$ 2) $\frac{4n}{4n+1}$ 3) $\frac{4n}{4n-3}$ 4) $\frac{n}{4n+1}$

گزینه ۴

کاملاً مشابه سؤال قبل، ابتدا صورت‌ها را به عدد مناسب تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{1}{1\times5}+\frac{1}{5\times9}+\frac{1}{9\times13}+\cdots+\frac{1}{(4n+1)(4n-3)}=\frac{1}{4}(\frac{4}{1\times5}+\frac{4}{5\times9}+\frac{4}{9\times13}+\cdots+\frac{4}{(4n+1)(4n-3)})$$

تفکیک و ساده کردن:

$$\frac{1}{4}(\frac{1}{1}-\frac{1}{5}+\frac{1}{5}-\frac{1}{9}+\frac{1}{9}-\frac{1}{13}+\cdots+\frac{1}{4n-3}-\frac{1}{4n+1})=\frac{1}{4}(1-\frac{1}{4n+1})=\frac{1}{4}\times\frac{4n+1-1}{4n+1}=\frac{1}{4}\times\frac{4n}{4n+1}=\frac{n}{4n+1}$$

حاصل مجموع مقابل کدام است؟ $\frac{1}{646}+\frac{1}{126}+\frac{1}{70}+\frac{1}{30}$

1) $\frac{8}{57}$ 2) $\frac{4}{57}$ 3) $\frac{198}{323}$ 4) $\frac{16}{57}$

گزینه ۲

عبارت داده شده به صورت منظم: $\frac{1}{19\times34}+\cdots+\frac{1}{9\times14}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{5\times6}$ است. تفاوت این کسرها با سؤالات قبل در این است که اختلاف عددها در مخرج کسرها یکسان نیست؛ این مشکل با ضرب صورت و مخرج کسرها در عدد ۲ رفع می‌شود:

$$\frac{2}{38\times34}+\cdots+\frac{2}{18\times14}+\frac{2}{14\times10}+\frac{2}{10\times6}=\frac{1}{19\times34}+\cdots+\frac{1}{9\times14}+\frac{1}{7\times10}+\frac{1}{5\times6}$$

اختلاف عددهای مخرج ۴ است، آن را در صورت ساخته و سپس مانند قبل عمل می‌کنیم:

$$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{10\times6}+\frac{4}{14\times10}+\frac{4}{18\times14}+\cdots+\frac{4}{38\times34}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}+\frac{1}{10}-\frac{1}{14}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\cdots+\frac{1}{34}-\frac{1}{38}\right)$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{38}\right)=\frac{1}{2}\times\frac{19-3}{114}=\frac{1}{2}\times\frac{16}{114}=\frac{4}{57}$$

پاسخ دهید:

به نمایش کسر $\frac{۷}{۸}$ به صورت مجموع «چند عدد گویای متفاوت با صورت ۱» نگاه کنید:

$$\frac{۷}{۸}=\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۸}$$

در نمونه‌های زیر، روشی برای نوشتن کسرهای $\frac{۱}{۶}$ و $\frac{۷}{۱۲}$ به صورت بالا ارائه شده است:

$$\frac{۷}{۱۲}=\frac{۳+۴}{۱۲}=\frac{۳}{۱۲}+\frac{۴}{۱۲}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۳}$$

$$\frac{۱}{۶}=\frac{۶}{۳۶}=\frac{۱+۲+۳}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۲}{۳۶}+\frac{۳}{۳۶}=\frac{۱}{۳۶}+\frac{۱}{۱۸}+\frac{۱}{۱۲}$$

۱ تکنیک به‌کار رفته در بالا را توضیح داده و سپس آن را برای تبدیل کسرهای $\frac{۲}{۳۵}$ و $\frac{۴۳}{۴۸}$ و $\frac{۷۳}{۸۱}$ به‌کار ببرید.

۲ روی محور اعداد صحیح، چند عدد بین $-۱۳۸۶/۱$ و $۲۰۲۳/۴$ قرار دارد؟

❶ ۳۴۱۰ ❷ ۳۴۰۹ ❸ ۳۴۰۸ ❹ ۳۴۱۱

۳ حاصل عبارت $(۴۳-۵^۲\times۲)^۲-۸\div۲^۴-۱\times۳-۳\times(۸+۳^۲)$ برابر کدام است؟

❶ ۴۸/۵ ❷ ۳۳ ❸ $-۵/۵$ ❹ -۱۱

۴ حاصل مجموع $۱۷۹+۱۷۳+\cdots-۳۱-۳۷-۴۳-$ برابر کدام است؟

❶ ۲۴۵۹ ❷ ۲۵۸۴ ❸ ۲۴۶۲ ❹ ۲۵۲۲

۵ مجموع ۱۰۱ مضرب طبیعی متوالی از عدد ۳ برابر ۴۵۴۵۰ شده؛ عدد ۵۴اُم کدام است؟

❶ ۵۸۲ ❷ ۴۹۸ ❸ ۵۳۲ ❹ ۴۵۹

۶ کدام مورد درست نیست؟

❶ هر عدد طبیعی، یک عدد گویا هم هست.
❷ هر عدد صحیح، یک عدد گویا هم هست.
❸ هر عدد گویا، معکوس دارد.
❹ بین هر دو عدد صحیح، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

متن زیر را خوانده و به سه سؤال بعد از آن پاسخ دهید:

اگر a و b دو عدد باشند، حاصل $a\downarrow b$ برابر $a-\frac{b}{۲}$ و حاصل $a\uparrow b$ برابر $\frac{a}{۲}-b$ است. برای نمونه؛

$$۲\uparrow۴=\frac{۲}{۲}-۴=-۳ \quad \text{و} \quad ۲\downarrow۴=۲-\frac{۴}{۲}=۰$$

۷ عبارت $x+y$ با حاصل کدام گزینه برابر نیست؟

❶ $(۲x)\uparrow(-y)$ ❷ $(x)\downarrow(-۲y)$ ❸ $۲(x\downarrow(x-y))$ ❹ $۲(x\uparrow(x-y))$

۸ در مورد دو ادعای زیر چه می‌توان گفت؟

یکم: اگر $a\uparrow b=a\downarrow b$ باشد، a و b قرینه‌ی هم هستند.

دوم: اگر $a\uparrow b=b\uparrow a$ باشد، a و b با هم برابر هستند.

❶ هر دو ادعا درست هستند. ❷ هر دو ادعا نادرست هستند.

❸ فقط ادعای اول درست است. ❹ فقط ادعای دوم درست است.

۹ با پرانتز گذاری، حداکثر مقدار عبارت $۲\downarrow ۲\uparrow ۲\downarrow ۲$ کدام است؟

❶ $\frac{۳}{۲}$ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ $\frac{۷}{۲}$

۱۰ حاصل عبارت روبه‌رو برابر کدام است؟ $-۷-۳+۱+۵+\cdots+۴۹$

❶ ۲۹۵ ❷ ۳۱۵ ❸ ۳۷۵ ❹ ۳۵۵

۱۱ حاصل عبارت روبه‌رو برابر کدام است؟ $۵^۲+۶^۲+۷^۲+\cdots+۱۵^۲$

❶ ۹۴۰ ❷ ۱۲۴۰ ❸ ۱۲۱۰ ❹ ۱۱۴۰

۱۲ حاصل عبارت روبه‌رو برابر کدام است؟ $۳^۲+۶^۲+۹^۲+\cdots+۲۷^۲$

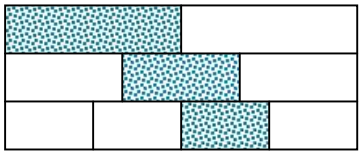
❶ ۲۵۶۵ ❷ ۱۶۵۵ ❸ ۲۳۱۰ ❹ ۳۲۱۰

۱۳ کدام مقایسه در مورد عددهای زیر صحیح است؟

$$a=۲۵^{۲۵}+۳۱۲۵^{۲۱}+۲\times۷^{۳۱}$$
$$b=\frac{۵^{۲۰۲۳}-۵^{۱۴۰۲}}{۲^{۱۴۰۲}-۲^{۲۰۲۳}}$$
$$c=۲۰۲۳^۲-۲۰۲۰\times۲۰۲۳+۲۰۲۳\times۳$$

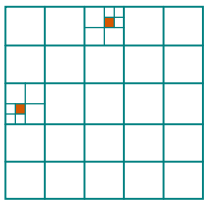
❶ $b<a<c$ ❷ $c<b<a$ ❸ $c<a<b$ ❹ $b<c<a$

۱۴ سه نوار هم‌اندازه مطابق شکل، به ۲ و ۳ و ۴ قسمت مساوی تقسیم شده‌اند. چه کسری از کل شکل رنگ شده است؟



❶ $\frac{۳}{۹}$ ❷ $\frac{۹}{۱۲}$ ❸ $\frac{۱۳}{۱۲}$ ❹ $\frac{۱۳}{۳۶}$

۱۵ چه کسری از کل شکل رنگ شده است؟



۱) $\frac{۱}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۱}{۱۰۰۰}$
۳) $\frac{۱}{۲۰۰}$ ۴) $\frac{۱}{۴۰۰}$

۱۶ مجموع صورت و مخرج عدد گویای مساوی با $\frac{۲}{۷}$ که اختلاف صورت و مخرج آن ۳۵ باشد، کدام است؟

۱) ۴۹ ۲) ۵۳ ۳) ۵۹ ۴) ۶۳

۱۷ قرینه‌ی a نسبت به $\frac{-۱}{۳}$ با قرینه‌ی $۳a$ نسبت به $\frac{۲}{۵}$ برابر است. حاصل $\frac{a}{a-۱}$ کدام است؟

۱) $\frac{-۴}{۱۱}$ ۲) $\frac{۱۱}{۴}$ ۳) $\frac{۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{-۱۱}{۴}$

۱۸ در مورد عددهای زیر، کدام مورد صحیح است؟

$$c=۱۴۰۳+\frac{۱}{۱۴۰۲+\frac{۱}{۱۴۰۱}} \qquad b=۱۴۰۳+\frac{۱}{۱۴۰۲+\frac{۱}{۱۴۰۱+\frac{۱}{۱۴۰۰}}} \qquad a=۱۴۰۲+\frac{۱}{۱۴۰۱}$$

۱) $b<c<a$ ۲) $b<a<c$ ۳) $c<b<a$ ۴) $a<c<b$

۱۹ کدام کسر از بقیه کوچک‌تر است؟

۱) $\frac{۱۵۱}{۱۵۰}$ ۲) $\frac{۱۴۹}{۱۴۸}$ ۳) $\frac{۱۴۸}{۱۴۷}$ ۴) $\frac{۱۴۷}{۱۴۶}$

۲۰ از تساوی روبه‌رو، مقدار n برابر کدام است؟ $\frac{۵}{۴}\times\frac{۶}{۵}\times\frac{۷}{۶}\times\cdots\times\frac{m}{n}=۳$

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

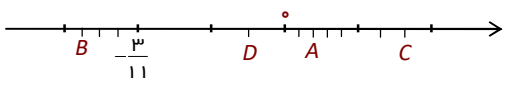
۲۱ از تساوی روبه‌رو، مقدار x برابر کدام است؟ $\frac{۱}{x}+\frac{۵}{۲x}+\frac{۷}{۴x}+\frac{۶}{۸x}=\frac{۳}{۲}$

۱) ۲/۵ ۲) ۳ ۳) ۳/۵ ۴) ۴

۲۲ کسر $\frac{۲\times۵\times۷\times۱۱+۷}{۳\times۵\times۷}$ به صورت ساده نشدنی برابر کدام است؟

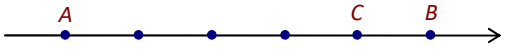
۱) $\frac{۳۱}{۲۱}$ ۲) $\frac{۲۹}{۳}$ ۳) $\frac{۳۱}{۷}$ ۴) $\frac{۳۷}{۵}$

۲۳ طبق شکل روبه‌رو، حاصل $-\frac{A}{۳}-۲B+\frac{C}{۲}-D$ کدام است؟



۱) $\frac{۲۲۰}{۲۰۱}$ ۲) $\frac{۲۰۱}{۲۲۰}$ ۳) $\frac{۲۱۰}{۲۲۱}$ ۴) $\frac{۲۲۱}{۲۱۰}$

۲۴ مطابق شکل زیر، نقطه‌ی A نشان دهنده‌ی عدد $\frac{۲}{۷}$ و نقطه‌ی B نشان دهنده‌ی عدد $\frac{۱}{۳}$ است. اگر فاصله‌ی بین این دو عدد به پنج قسمت مساوی تقسیم شده باشد، نقطه‌ی C کدام عدد را نشان می‌دهد؟



❶ $\frac{۲}{۱۵}$ ❷ $\frac{۳۲}{۱۰۵}$
❸ $\frac{۳۴}{۱۰۵}$ ❹ $\frac{۴}{۱۵}$

۲۵ اگر داشته باشیم: $A=\frac{۱}{۲\times۶}+\frac{۱}{۶\times۱۰}+\frac{۱}{۱۰\times۱۴}+\cdots+\frac{۱}{۳۸\times۴۲}$، در این صورت مقدار $۴۲A$ برابر کدام است؟

❶ ۵ ❷ $\frac{۲۱}{۴}$ ❸ $\frac{۴۱}{۴}$ ❹ ۲۰

۲۶ حاصل عبارت زیر برابر کدام است؟

$$\frac{۲}{۵۱}+\frac{۲}{۴۷\times۵۱}+\frac{۲}{۴۳\times۴۷}+\cdots+\frac{۲}{۷\times۱۱}$$

❶ $\frac{۱۲}{۱۱۹}$ ❷ $\frac{۴۴}{۳۵۷}$ ❸ $\frac{۱۲}{۳۵۷}$ ❹ $\frac{۱}{۵۱}$

۲۷ عبارت زیر برابر کدام گزینه است؟

$$\frac{۱}{۱\times۲}-\frac{۱}{۳\times۴}+\frac{۱}{۵\times۶}-\frac{۱}{۷\times۸}+\cdots+\frac{۱}{۹۹\times۱۰۰}$$

❶ $\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\cdots-\frac{۱}{۹۹}+\frac{۱}{۱۰۰}$
❷ $\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\cdots+\frac{۱}{۹۹}+\frac{۱}{۱۰۰}$
❸ $\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\cdots-\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۰}$
❹ $\frac{۱}{۱}-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}\cdots+\frac{۱}{۹۹}-\frac{۱}{۱۰۰}$

۲۸ حاصل عبارت زیر برابر کدام است؟

$$\frac{۲+۴}{۲\times۳\times۴}+\frac{۴+۶}{۴\times۵\times۶}+\frac{۶+۸}{۶\times۷\times۸}+\cdots+\frac{۱۶+۱۸}{۱۶\times۱۷\times۱۸}$$

❶ $\frac{۴}{۹}$ ❷ $\frac{۷}{۱۸}$ ❸ $\frac{۵}{۱۸}$ ❹ $\frac{۵}{۹}$

۲۹ در مورد حاصل جمع $A=\frac{۱}{۱}+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۱۰۲۴}$ کدام گزینه صحیح است؟

❶ عددی کمتر از ۵ است.
❷ عددی بین ۵ تا ۱۰ است.
❸ عددی بین ۱۰ تا ۱۵ است.
❹ عددی بیشتر از ۱۵ است.

۳۰ حاصل عبارت $\frac{۱}{۴} \div \left[\frac{۱-(-\frac{۲}{۳})}{۱-\frac{۲}{۳}}\right]$ چند برابر عدد ۱۰۰ است؟

❶ $\frac{۱}{۲۰}$ ❷ ۵ ❸ $\frac{۳}{۵}$ ❹ $\frac{۱}{۵}$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴