

## ترکیب: دانش شما + ممتوای بی نظیر تدریس ما

تمرین و پاسفنامه

درسنامه آپدیت

کوئیز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»





**«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»**

**(مذف هزینه چاپ)**



**کلاس ایده‌ال:**



**سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!**

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



**پیشنهادات ویژه چاپ:**

**چاپ کلاسی:** بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

**چاپ تک جلد:** بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

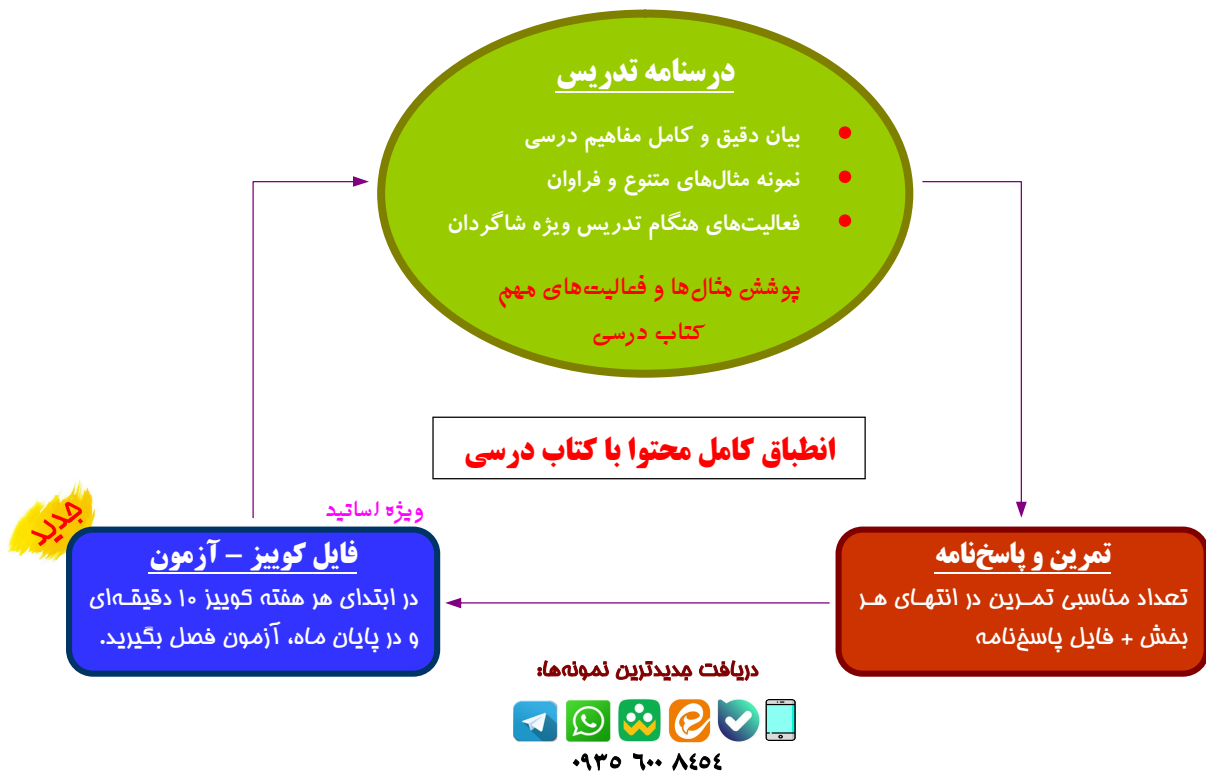
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

**(نسخه تدریس در دست شاگردان)**

پلد نمونه از نتایج درفشان برفی از همکاران مجموعه درس آموزه: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

## محتوای تشریحی و نهایی



**(خدمات منحصر به فرد گروه درس آموز)**

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و ... روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

**در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.**



۲

### مجموعه (۱)

۲۹

مفاهیم مقدماتی مجموعه‌ها، نمایش مجموعه، بررسی زیر مجموعه‌ها و برخی خواص آن‌ها

۱

### آشنایی با منطق ریاضی

۲

گزاره و جدول ارزش آن، گزاره‌نما، روش‌های ترکیب گزاره‌ها، بررسی هم‌ارزی گزاره‌ها، گزاره‌های سوری

۵

### امتثال (۲)

۷۰

مدل احتمال شرطی، محاسبه احتمال شرطی، قوانین ضرب احتمال، احتمال کل و قاعده‌ی بیز، استقلال پیشامدها

۴

### امتثال (۱)

۵۷

مبانی احتمال، اصول، قوانین و محاسبه‌ی احتمال، معرفی فضاهای غیر هم‌شانس و محاسبه احتمال در آن‌ها

۳

### مجموعه (۲)

۴۲

بررسی جبر مجموعه‌ها (اجتماع، اشتراک و تفاضل)، اتحادهای مجموعه‌ای و ضرب دکارتی مجموعه‌ها

۷

### آمار استنباطی

۱۱۰

نمونه‌گیری و گردآوری داده‌ها، برآورد نقطه‌ای پارامتر، برآورد بازه‌ای پارامتر و ضریب اطمینان

۶

### آمار توصیفی

۸۷

سازمان‌دهی داده‌ها در جدول، انواع نمودارهای آماری، بررسی شاخص‌های مرکزی و پراکندگی



آموزش:

# آمار و احتمال (یازدهم ریاضی)



## آشنایی با منطق ریاضی

صفحه	فهرست
۳	مفاهیم پایه
۹	ترکیب گزاره‌ها
۱۹	قوانین هم‌ارزی
۲۴	سورها



## 1 مفاهیم پایه

در مبحث منطق ریاضی، احکام ریاضی دقیق‌تر بیان شده، استدلال‌های مربوطه بیان می‌شود و همچنین اعتبار یک استدلال مشخص خواهد شد. مفهوم محوری این مبحث:

### گزاره:

یک جمله خبری است که دقیقاً «درست» یا «نادرست» است. گزاره‌ها را معمولاً با حروف  $p$ ،  $q$ ،  $r$  و ... نام گذاری می‌کنند. پس:

ارزش گزاره فقط یکی از دو حالت زیر است:

درست: **د**      نادرست: **ن**

(گاهی درستی و نادرستی گزاره را به ترتیب با  $T$  و  $F$  نشان می‌دهیم.)

چند نمونه از گزاره‌ها:

الف) تعداد ماه‌های سال ۱۲ است.

ب) تمام عددهای اول، فرد هستند.

پ) عدد  $1 + 2^{3^{4^5}}$  عددی اول است.

### توجه کنید:

۱) ممکن است ارزش گزاره در این لحظه قابل تعیین نبوده و تعیین آن به بررسی خاص نیاز داشته یا با گذشت زمان در آینده وضعیت آن مشخص گردد. (مانند مورد «پ» بالا)

۲) طبق تعریف، جملات از انواع زیر گزاره محسوب نمی‌شوند:

• جملاتی که در آن‌ها خبری وجود ندارد؛ مانند جملات عاطفی، سؤالی، امری و ...

**نمونه:** لطفاً در اتاق را ببندید.

• جملات خبری که درست یا نادرست بودن آن‌ها به نظر یا سلیقه‌ی اشخاص مختلف بستگی دارد.

**نمونه:** زبان فرانسه از زبان انگلیسی جذاب‌تر است.

• جملات خبری که تعیین درست یا نادرست بودن آن‌ها غیر ممکن باشد.

**نمونه:** ریاضی از شیمی دشوارتر است.

**مثال:** تعیین کنید کدام مورد زیر گزاره است و دلیل بیاورید.

الف) تهران پر جمعیت‌ترین شهر ایران است.

ب) رامسر زیباترین شهر کشورمان است.

پ) چه هوای آلوده‌ای!

### توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



**مثال:** تعیین کنید هر مورد زیر گزاره است یا خیر؛ ارزش هر گزاره را نیز مشخص کنید.

(الف) برخی از اعداد اول، زوج هستند.

(ب) هر معادله‌ی درجه دوم، دو ریشه حقیقی دارد.

(پ) آیا عدد ۹۱ اول است.

(ت) در انتخاب یک عدد طبیعی کمتر از ۱۰۰۰، احتمال انتخاب یک عدد اول زوج برابر ۰/۰۰۱ است.

یک روش ضروری و کاربردی ساخت گزاره‌ی جدید از یک گزاره‌ی موجود، به صورت زیر است.

### نقیض گزاره:

نقیض یک گزاره‌ی  $p$  را با نماد  $\sim p$  نوشته و آن را «نقیض  $p$ » یا «چنین نیست که  $p$ » می‌خوانیم. همیشه:

ارزش درستی  $\sim p$  دقیقاً برعکس ارزش درستی  $p$  است.

برای نمونه؛

گزاره «تبریز مرکز استان زنجان است.» را به همه‌ی روش‌های زیر می‌توان نقیض کرد:

- چنین نیست که تبریز مرکز استان زنجان است.
- تبریز مرکز استان زنجان نیست.

نمونه‌های دیگر:

(الف) نقیض گزاره‌ی « $۵$  عددی فرد است.» به صورت: « $۵$  عددی زوج است.» قابل بیان است؛ (چون زوج و فرد بودن دقیقاً نقطه‌ی مقابل هم هستند.)

(ب) نقیض گزاره‌ی « $\sqrt{۲}$  عدد حقیقی گنگ است.» به صورت: « $\sqrt{۲}$  عددی گنگ نیست.» قابل بیان است. ولی چون گنگ و گویا بودن مخالف هم هستند، نقیض را می‌توان به صورت: « $\sqrt{۲}$  عددی گویا است.» نیز نوشت.

### توجه کنید:

$a$  را یک عدد معلوم بگیرید. نقیض گزاره‌ی « $a$  عددی مثبت است.» به صورت: « $a$  عددی منفی است.» صحیح نیست.

**باید خلاف خبر را بیان کنید.**

می‌دانیم:

خلاف مثبت بودن این است که عدد برابر صفر یا منفی باشد. پس نقیض به همه‌ی صورت‌های زیر درست است:

- چنین نیست که  $a$  عددی مثبت است.

### توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



- عددی مثبت نیست.
- عددی منفی یا برابر صفر است.

روشی مفید برای نمایش گزاره‌ها، استفاده از یک جدول به صورت زیر است.

## جدول ارزش گزاره:

در چنین جدولی، تمام حالت‌هایی ممکن برای ارزش یک گزاره نمایش داده می‌شود. وقتی یک گزاره  $p$  داریم، ارزش آن دو حالت ممکن دارد که در یک جدول دو سطری به صورت زیر تشکیل می‌شود.

$p$
د
ن

برای نمونه؛

ارزش نقیض یک گزاره، یعنی  $\sim p$  را بر حسب ارزش  $p$  می‌توان در یک جدول نشان داد:

$p$	$\sim p$
د	ن
ن	د

چنان که می‌بینید:

در جدول، امکان مقایسه‌ی ارزش گزاره‌ها وجود دارد.

نمونه‌ی دیگری ببینید.

**مثال:** (از کتاب) با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها، ارزش درستی  $(\sim p)$  و  $p$  را مقایسه کنید.



(بررسی و کاربرد بیشتر جدول در بخش بعد - گزاره‌های مرکب - انجام خواهد شد.)

## توجه کنید:

به دلیل ارزش کاملاً یکسان دو گزاره‌ی  $p$  و  $(\sim \sim p)$ ، می‌نویسیم:  $(\sim \sim p) \equiv p$  و آن دو را «هم‌ارز» گوئیم. (بررسی کامل هم‌ارزی گزاره‌ها کمی پیش‌تر.)



مورد بعد ارتباط نزدیکی با مفهوم یک گزاره دارد:

### گزاره نما:

یک جمله‌ی خبری است که در آن یک یا چند متغیر داریم با شرط زیر:  
وقتی جای متغیرها مقدار قرار دهیم، به یک گزاره تبدیل می‌شود.

نمونه‌هایی ببینید:

- عبارت  $2x + 6 = 0$  یک گزاره‌نما با یک متغیر است که:  
برای مقدار  $x = -3$  ارزش درست «د» و برای سایر مقادیر ارزش نادرست «ن» دارد.
- عبارت  $x^2 + y^2 = 0$  یک گزاره‌نمای دو متغیره است.  
واضح است که برای مقادیر  $x = 0$  و  $y = 0$  ارزش درست «د» و برای سایر مقادیر ارزش نادرست «ن» دارد.

### توجه کنید:

هر چند گزاره‌نما خبر است، ولی گزاره محسوب نمی‌شود. (چرا؟)

### دامنه و جواب:

مجموعه‌ی  $D$  شامل تمام مقادیری که وقتی جای متغیر یک گزاره‌نما قرار گیرند، آن را به یک گزاره تبدیل می‌کنند، «دامنه» آن گزاره‌نما نامیده می‌شود. برای نمونه:

$$2x + 6 = 0: D = \mathbb{R}$$

چون در عبارت  $2x + 6 = 0$  هر عددی را می‌توان جای  $x$  قرار داد.

### بعلاوه:

مجموعه مقادیری از  $D$  که گزاره‌نما را به یک گزاره‌ی درست تبدیل می‌کند، «مجموعه جواب» نام داشته و آن را با  $S$  نشان می‌دهیم. پس:  $S \subseteq D$ . برای نمونه، در گزاره‌ی  $2x + 6 = 0$  داریم:

$$2x = -6 \rightarrow x = -3 \Rightarrow S = \{-3\}$$

**مثال:** چند مورد تعیین دامنه و مجموعه جواب گزاره‌نما ببینید:

**الف)** در گزاره‌نمای « $x$  مضرب ۷ است.» دامنه را می‌توانید  $D = \mathbb{N}$  یا  $D = \mathbb{Z}$  بگیرید.

- اگر دامنه باشد، مجموعه جواب  $S = \{\dots, -7, 0, 7, 14, 21, \dots\}$  و
- اگر دامنه را  $\mathbb{N}$  بگیریم، مجموعه جواب  $S = \{7, 14, 21, \dots\}$  خواهد بود.

**ب)** در گزاره‌نمای « $x^2 + 8x + 7 = 0$ »، چون هر عددی را می‌توان جای  $x$  قرار داد، به صورت معمول دامنه را  $\mathbb{R}$  می‌گیریم و با حل معادله، مجموعه جواب  $S = \{-1, -7\}$  حاصل می‌شود. ولی اگر دامنه را  $\mathbb{N}$  بگیریم، مجموعه جواب  $S = \emptyset$  است.

**مثال:** دامنه‌ی متغیر و مجموعه جواب گزاره‌نمای  $x^2 \geq 9$  را مشخص کنید.



پاسخ ✓

**مثال:** اگر دامنه‌ی متغیر گزاره‌های زیر، مجموعه‌ی اعداد طبیعی باشد، مجموعه جواب را تعیین کنید.

الف)  $n^2 - 8n + 15 < 0$

ب)  $n + \frac{1}{n} \leq 2$

**مثال:** (از کتاب) مجموعه جواب گزاره‌نمای زیر با دامنه‌ی  $D = \{1, 2, \dots, 6\}$  را مشخص کنید.

تاس را پرتاب می‌کنیم و  $P(\{x\}) = \frac{1}{6}$ .

پاسخ ✓

**مثال:** در گزاره‌نمای زیر، دامنه و مجموعه جواب را مشخص کنید.

«احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  در پرتاب یک تاس  $\frac{2}{3}$  است.»

پاسخ ✓

**پاسخ دهید (۱)** ?

۱- درستی یا نادرستی گزاره‌های زیر را مشخص کنید.

الف) گزاره جمله‌ای خبری است که ارزش درستی یا نادرستی آن باید بر ما مشخص باشد.

ب) مجموعه جواب معادله‌ی  $2x + 1 = 0$  با دامنه اعداد صحیح برابر تهی است.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۲- تعیین کنید کدام موارد گزاره هستند و ارزش هر یک را تعیین کنید.

الف) فصل ترکیبیات دشوارترین مبحث کتاب ریاضی دهم است.

ب) دنباله‌ی  $4, 4, 4, \dots$  هم حسابی و هم هندسی است.

پ) اختلاف دو عدد اول حداقل برابر ۲ است.

۳- نقیض گزاره «عدد ۲ اول است» به کدام صورت نمی‌تواند باشد؟

الف) عدد ۲ اول نیست. ب) چنین نیست که ۲ اول باشد. پ) عدد ۲ مرکب است.

۴- جمله‌ی احتمال وقوع پیشامد  $A$  برابر  $\frac{2}{5}$  است. «یک . . . . . است». (گزاره-گزاره‌نما)

۵- در گزاره‌نمای زیر، اگر  $A = \{ \quad \}$  باشد، یک گزاره‌ی درست خواهیم داشت.

در پرتاب یک تاس، احتمال رخ دادن پیشامد  $A$  برابر  $\frac{1}{3}$  است.

در کل، جای  $A$  چه پیشامدهایی می‌توان قرار داد که ارزش گزاره‌ی تشکیل شده درست شود؟

### منتفب کتاب:

۱- دامنه‌ی متغیر در گزاره‌نماهای زیر، مجموعه‌ی اعداد صحیح است. مجموعه جواب هر کدام را تعیین کنید:

الف)  $a$  یک واحد از مضرب ۵ بیشتر است. ب)  $x$  مربع کامل است.

پ)  $\frac{2x+1}{3} \leq -1$  ت)  $\{n(n+1) = 0 \mid n \in W\}$



۲ ترکیب گزاره‌ها

در ابتدا به معرفی چند مفهوم توجه کنید.

**گزاره ساده و مرکب:**

گزاره‌ی «ساده» فقط از یک خبر تشکیل می‌شود، مانند:

«عدد ۹۱ بزرگ‌ترین عدد اول دو رقمی است.»

در مقابل، انواع بسیار مهمی از گزاره‌ها با ترکیب دو یا چند گزاره‌ی ساده ساخته می‌شوند که به آن‌ها گزاره‌ی «مرکب» گفته می‌شود. نمونه‌ای ببینید:

«هوای اهواز در فصل تابستان گرم است و دمای شهر بیشتر روزها بالاتر از ۴۰ درجه سانتی‌گراد است.»

یک گزاره‌ی مرکب، بسته به درست یا نادرست بودن هر یک از گزاره‌های ساده‌ی تشکیل دهنده‌ی آن، درست یا نادرست خواهد شد. یک روش تعیین درستی آن، استفاده از جدول است که در بخش قبل معرفی شد.

**تعداد سطرهای جدول: (مهم)**

p
د
ن

وقتی یک گزاره‌ی ساده‌ی  $p$  داریم، ارزش آن دو حالت ممکن دارد که در یک جدول دو سطری به صورت روبه‌رو نمایش داده می‌شود.

وقتی گزاره مرکب از دو گزاره‌ی ساده تشکیل شده باشد، چون هر گزاره‌ی ساده دو حالت دارد، باید تعداد  $2 \times 2 = 2^2 = 4$  سطر در جدول در نظر گرفت تا تمام حالت‌های ممکن پوشش داده شوند.

**بعلاوه:**

p	q
د	د
د	ن
ن	د
ن	ن

- با رعایت مراحل زیر، نمایش در جدول به صورت منظم و استاندارد خواهد بود.
- در ستون اول، ابتدا نصف حالت‌ها «د» و نصف دیگر حالت‌ها «ن» قرار می‌گیرد.
- در ستون‌های بعدی، تعداد دوباره تعداد نصف می‌شود تا آخر.

اگر سه گزاره‌ی ساده‌ی  $p$ ،  $q$  و  $r$  با هم ترکیب شده باشند، باید  $2 \times 2 \times 2 = 2^3 = 8$  سطر در جدول در نظر بگیریم. جدول مربوطه با رعایت نظم گفته شده را ببینید:

p	q	r
د	د	د
د	د	ن
د	ن	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	د	ن
ن	ن	د
ن	ن	ن

(کاربرد جدول را در ادامه برای نمایش ارزش گزاره‌های مرکب می‌بینیم.)

واضح است که:

اگر تعداد  $n$  گزاره‌ی ساده داشته باشیم، تعداد سطرهای جدول  $2 \times 2 \times \dots \times 2 = 2^n$  خواهد بود.

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مفهوم هم‌ارزی، مانند آنچه در مورد  $p$  و  $(\sim p)$  دیدیم را دقیق‌تر معرفی می‌کنیم.

### گزاره‌های هم‌ارز:

وقتی دو گزاره‌ی ساده یا مرکب  $P$  و  $Q$ ، دارای ارزش یکسان باشند، گوئیم این دو گزاره هم‌ارز (منطقی) هستند. در این صورت می‌نویسیم:

$$P \equiv Q$$

توجه داشته باشید:

بر حسب جدول، هم‌ارزی  $P \equiv Q$  وقتی برقرار است که ستون‌های  $P$  و  $Q$  کاملاً یکسان باشند.

هم‌ارزی  $p \equiv (\sim p)$  را قبلاً توسط جدول دیده‌ایم.

در ادامه، موضوع اصلی این بخش، یعنی بیان چند روش برای ترکیب گزاره‌ها بیان و بررسی می‌شود.

### ترکیب فصلی:

وقتی بین دو گزاره‌ی  $p$  و  $q$  حرف ربط «یا» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:  $p \vee q$  نوشته شده و به صورت « $p$  یا  $q$ » خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «**ترکیب فصلی**» و نماد  $\vee$  را «**فامل**» گویند.

(علائمی چون  $\vee$  که برای ترکیب گزاره‌ها به کار می‌روند را «**آدات ربط**» گویند.)

### بعلاوه:

ترکیب فصلی فقط وقتی نادرست است که هر دوی  $p$  و  $q$  نادرست باشند؛ در غیر این صورت همواره درست است.

### توجه:

(چون  $p \vee q$  توسط دو گزاره‌ی ساده  $p$  و  $q$  ساخته شده، جدول ارزش آن

$$4 = 2^2 \text{ سطر یا حالت دارد.})$$

برای نمونه؛ به بررسی ارزش گزاره‌های زیر توجه کنید:

الف)  $\sqrt{2}$  عددی گویا است یا ۹ عددی اول است.

این گزاره نادرست است، زیرا هر دو گزاره‌ی « $\sqrt{2}$  عددی گویا است» و «۹ عددی اول است» نادرست هستند.

ب) ۳ عددی زوج است یا ۹ عددی فرد است.

این گزاره درست است.

چون گزاره «۹ عددی فرد است» درست می‌باشد.

**مثال:** جدول ارزش گزاره‌ی  $p \vee p$  را رسم می‌کنیم.

چون این گزاره فقط از یک گزاره‌ی ساده‌ی  $p$  ساخته شده، تعداد ۲ (دو سطر) در جدول قرار می‌گیرد.

### توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

p	q	$p \vee q$
د	د	د
د	ن	د
ن	د	د
ن	ن	ن



چنان که می بینید:

p	p	$p \vee p$
د	د	د
ن	ن	ن

ارزش گزاره مرکب  $p \vee p$  با ارزش  $p$  یکسان است.

(یعنی: هم‌ارزی  $p \vee p \equiv p$  برقرار است.)

**مثال:** جدول ارزش گزاره  $p \vee \sim q$  و حالت نادرست بودن آن را تعیین کنید.

پاسخ

روش دیگری برای ترکیب گزاره‌ها به صورت زیر است.

### ترکیب عطفی:

وقتی بین دو گزاره  $p$  و  $q$  رابط «و» قرار گیرد، گزاره‌ی حاصل به صورت:

$p \wedge q$  نوشته شده و به صورت « $p$  و  $q$ » خوانده می‌شود.

این نوع ترکیب را «ترکیب عطفی» و نماد  $\wedge$  را «عاطف» گویند.

### بعلاوه:

چنان که انتظار داریم و در جدول زیر هم دیده می‌شود، ترکیب عطفی فقط وقتی درست است که هر دوی  $p$  و  $q$  درست باشند؛ در غیر این صورت، دارای ارزش «ن» است.

p	q	$p \wedge q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	ن

برای نمونه؛

جدول ارزش درستی گزاره  $p \wedge \sim p$  به صورت روبه‌رو است:

p	$\sim p$	$p \wedge \sim p$
د	ن	ن
ن	د	ن

### توجه:

چنان که می بینید، یک گزاره و نقیض آن هیچ‌گاه نمی‌توانند هر دو درست باشند! (یعنی: **تناقض**)

**مثال:** (از کتاب) مقادیر  $x$  و  $y$  را طوری تعیین کنید که تساوی  $(2x - y)^2 + (x - 1)^2 = 0$  برقرار باشد.

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



**مثال:** با تشکیل جدول، هم‌ارزی  $(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$  را نشان دهید.



مطلب بعدی هنگام نقیض کردن گزاره‌های مرکب کاربرد فراوان دارد.

### قوانین دمورگان:

چنان‌که در مثال قبل دیدیم، هم‌ارزی  $(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$  برقرار است. به صورت مشابه می‌توان نشان داد که:

$$\sim (p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$$

بنابراین:

طبق قوانین دمورگان، هنگام نقیض کردن ترکیب فصلی یا عطفی؛

هر یک از گزاره‌ها نقیض شده و رابط‌های  $\wedge$  و  $\vee$  به هم تبدیل می‌شوند.

برای نمونه؛

نقیض گزاره‌های زیر را طبق نکته‌ی قبل می‌نویسیم:

الف) ۵ عددی زوج است و  $\pi$  عددی گنگ است.

۵ عددی فرد است یا  $\pi$  عددی گویا است.

ب) ماه به دور خورشید می‌گردد یا زمستان هوا گرم است.

ماه به دور خورشید نمی‌گردد و زمستان هوا گرم نیست.

روش مهمی برای ترکیب گزاره‌ها که در بیان احکام ریاضی کاربرد زیادی دارد:

### ترکیب شرطی:

با داشتن دو گزاره‌ی  $p$  و  $q$ ، گزاره‌ی شرطی به صورت:

$p \Rightarrow q$  نوشته شده و به صورت «اگر  $p$ ، آنگاه  $q$ » خوانده می‌شود.

در ترکیب شرطی  $p \Rightarrow q$ ، به  $p$  «مقدم» (فرض) و به  $q$  «پیرو» (حکم) گفته می‌شود.



**بعلاوه:**

مطابق جدول، ترکیب شرطی فقط وقتی نادرست است که  $p$  درست، ولی  $q$  نادرست باشد. ارزش  $p \Rightarrow q$  در سایر حالتها درست است.

p	q	$p \Rightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	د
ن	ن	د

**در نتیجه:**

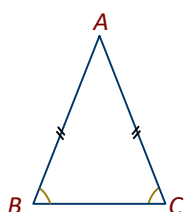
استنتاج  $p \Rightarrow q$  هنگامی صحیح است که:

درست بودن  $p$ ، حتماً درستی  $q$  را نتیجه دهد.

به همین دلیل:

قضایای ریاضی که استنتاجهای درستی هستند را می‌توانیم به صورت شرطی بیان کنیم. (یعنی: با درستی فرض، حکم قطعاً درست خواهد بود.) نمونه‌هایی ببینید:

الف) اگر مثلث متساوی‌الساقین باشد، زوایای پای ساقها برابرند.  
به صورت نمادین:



$$\triangle ABC : AB = AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

ب) بر عهده‌ی دانش‌آموز:

قضیه‌ی فیثاغورس را مانند بالا به صورت زبانی و همچنین نمادین بنویسید.

**مثال:** ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

اگر  $\sqrt{2} = -1$  زوج باشد، آنگاه  $\sqrt{2} = -1$  است.

پاسخ ✓

**مثال:** با استفاده از جدول، نشان دهید گزاره‌ی  $p \Rightarrow (p \vee q)$  همواره درست است.

پاسخ ✓

حالت ویژه‌ای از ترکیب شرطی:

**قانون انتقای مقدم:**

چنان‌که در جدول ارزش  $p \Rightarrow q$  می‌بینید:  
اگر  $p$  نادرست باشد، بدون توجه به ارزش  $q$ ، ارزش گزاره‌ی  $p \Rightarrow q$  درست است.  
این خاصیت را «**قانون انتقای مقدم**» گویند.

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



**یعنی:**

اگر با یک فرض غلط، هر نتیجه‌ی درست یا نادرست را بپذیرید، استنتاج شما در کل صحیح بوده است. برای نمونه:

استنتاج‌های زیر هر دو درستند:

- اگر  $۲ -$  عددی مثبت باشد، آنگاه تمام داوطلبان کنکور رتبه‌ی یک خواهند شد.
- اگر اصفهان مرکز استان فارس باشد، آنگاه ایران یک کشور اروپایی است.

**مثال:** ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

اگر  $۸$  فرد باشد، آنگاه  $۱/۹۹۹ \dots = \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \sqrt{۲ + \dots}}}$  است.

**پاسخ** ✓

توسط مورد بعدی، ترکیب شرطی به فصلی تبدیل می‌شود.

**هم‌ارزی شرطی:**

هم‌ارزی مهمی برای گزاره‌های شرطی با کاربرد فراوان به صورت زیر است:

$$p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

**نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳**

هم‌ارزی  $p \Rightarrow q \equiv \sim p \vee q$  را با جدول نشان دهید.

**پاسخ** ✓

**مثال:** جاهای خالی را به صورت مناسب کامل کنید:

الف) «اگر .....، آنگاه  $۱ - ۲^۵$  عددی اول نیست.» گزاره‌ای نادرست است.

ب) نقیض گزاره‌ی «اگر  $a^۲$  مضرب  $۵$  باشد، آنگاه  $a$  مضرب  $۵$  است.» عبارت است از .....

**پاسخ** ✓



مثال: الف) توسط جدول ارزش گزاره‌ها، نشان دهید:

نقیض گزاره‌ی شرطی  $p \Rightarrow q$  به صورت  $p \wedge \sim q$  است؛ یعنی:  $\sim(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \sim q$ .

ب) هم‌ارزی قسمت قبل را بدون استفاده از جدول ثابت کنید.

پاسخ ✓

قبل از معرفی آخرین روش ترکیب گزاره‌ها، مورد بعد را ببینید.

مثال: با تشکیل جدول، ارزش گزاره‌ی مرکب  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  را تعیین کنید. چه هنگام این گزاره درست است؟

درستی این گزاره چه چیزی را نشان می‌دهد؟

پاسخ ✓

با توجه به مثال قبل، روش دیگری برای ترکیب گزاره‌ها بیان می‌شود:

### ترکیب دو شرطی:

گزاره‌ی دوشروطی را با  $p \Leftrightarrow q$  نشان داده و هم‌ارز  $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$  بگیرید. بعلاوه:

$p \Leftrightarrow q$  را به صورت «اگر و تنها اگر  $q$ » یا «اگر  $p$  آنگاه  $q$  و برعکس» بخوانید.

در واقع:

هر دوی  $p$  و  $q$  باید یکدیگر را نتیجه دهند تا ترکیب دوشروطی درست باشد.

### طبق آن چه گفتیم:

ترکیب دو شرطی وقتی درست است که  $p$  و  $q$  ارزش یکسان داشته باشند. (هر دو درست یا هر دو نادرست باشند).

p	q	$p \Leftrightarrow q$
د	د	د
د	ن	ن
ن	د	ن
ن	ن	د

مثال: ارزش هر گزاره را مشخص کنید.

الف) ۷ مربع کامل است اگر و تنها اگر ۵ عدد اول باشد.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

ب)  $10 > 15 \Leftrightarrow -10 > -15$

**تذکر مجدد:**

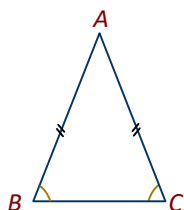
طبق مفهوم و جدول ترکیب دو شرطی، درستی عبارت  $p \Leftrightarrow q$  به این معنی است که:

$p$  و  $q$  هر کدام درستی دیگری را نتیجه می‌دهد.

دقیق‌تر:

درستی  $p \Leftrightarrow q$  یعنی: هر دوی گزاره‌های  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  درست هستند. (و برعکس) به همین دلیل:

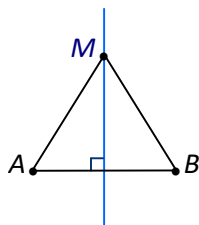
قضایای ریاضی که عکسشان هم درست باشد، به صورت دو شرطی بیان می‌شوند. نمونه‌هایی ببینید:  
 الف) مثلث متساوی‌الساقین است، اگر و تنها اگر زوایای پای ساق‌ها برابر باشند.  
 به صورت نمادین:



$$\triangle ABC : AB = AC \Leftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$$

ب) **طبق ممتوای هندسه ا:**

نقطه‌ی  $M$  روی عمود منصف یک پاره‌خط قرار دارد، اگر و فقط اگر فاصله‌ی  $M$  تا دو سر پاره‌خط برابر باشد.  
 به صورت نمادین:



$$M \text{ روی عمود منصف } AB \Leftrightarrow MA = MB \text{ است.}$$

**مثال:** با تشکیل جدول، نشان دهید نقیض ترکیب دو شرطی  $p \Leftrightarrow q$  با  $p \Leftrightarrow q \sim$  هم‌ارز است. یعنی:

$$\sim(p \Leftrightarrow q) \equiv \sim p \Leftrightarrow q$$

**پاسخ**

**توجه:**

در کل، هم‌ارزی‌های  $p \Leftrightarrow \sim q \equiv \sim p \Leftrightarrow q \equiv \sim(p \Leftrightarrow q)$  صحیح است.

**مثال:** فرض کنید گزاره‌ی  $(p \Leftrightarrow \sim q) \Rightarrow (q \vee r)$  نادرست باشد.

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



الف) ارزش هر کدام از  $p$ ،  $q$  و  $r$  را مشخص کنید.

ب) نشان دهید گزاره  $r \wedge p \sim$  نادرست و گزاره  $(p \sim q) \Rightarrow r$  درست است.

**پاسخ دهید (۲)**

۱- جاهای خالی را با کلمات و عبارات مناسب پر کنید.

الف) ترکیب شرطی زمانی نادرست است که .....

ب) ارزش گزاره « $2$  عددی گویا نیست و  $\pi$  عددی گنگ است.» برابر .....

۲- جدول زیر را کامل کنید.

گزاره $p$	گزاره $q$	ارزش $p$	ارزش $q$	ارزش $p \vee q$	ارزش $p \wedge q$
هر دنباله یا حسابی است یا هندسی	$\sin 30^\circ = \frac{1}{2}$				
.....	$x=1$ تابع نیست	ن			
$\sqrt[5]{-32} = -2$	.....		ن		
.....	.....	ن	ن		
$\sqrt{x}-1$ چندجمله ای است.	.....			د	

۳- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید.

الف) گزاره « $(-1) - 8 = 9 \Rightarrow -3 < -1$ » درست است.

ب) گزاره «اگر  $n^2$  مضرب  $2$  باشد، آنگاه  $n$  مضرب  $2$  است.» نادرست است.

۴- ارزش گزاره‌های مرکب زیر را تعیین کنید.

الف)  $(\frac{1}{p} \neq 0/5) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$

ب)  $(\cos 0 = -1) \Leftrightarrow (\tan \frac{\pi}{6} = \sqrt{3})$



۵- اگر  $p$  گزاره‌ای درست،  $q$  نادرست و  $r$  گزاره‌ای دلخواه باشد، ارزش گزاره‌ی:  $[(p \Leftrightarrow q) \Rightarrow r] \vee q$   همواره درست است.  همواره نادرست است.  هم‌ارز با  $r$  است.  هم‌ارز با  $q$  است.

۶- معادله‌ی  $(x+2)^2 + (2y-3x)^2 = 0$  را تبدیل به یک گزاره‌ی مرکب کرده و سپس آن را حل کنید.

### منتخب کتاب:

۱- ارزش هر گزاره‌ی مرکب را تعیین کنید:

- الف)  $(\frac{1}{2} \neq \frac{3}{6}) \vee (1 \in \{2, 3, 4\})$       ب)  $(2 < 3) \wedge (4 + 3 = 10)$
- پ) اگر  $a \in \{b\}$  آنگاه  $a = b$  و برعکس.      ت) اگر ۴ فرد باشد، آنگاه ۴ مربع کامل نیست.
- ث)  $2 > 3 \Leftrightarrow -2 < -3$

۲- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید.

- الف) ابوالوفای بوزجانی، ریاضی‌دان ایرانی است.      ب)  $a \in \{b, c, d\}$
- پ) ۲ عددی زوج است یا عدد  $\pi$  گویاست.      ت) اگر ۳ زوج باشد، آنگاه ۲ فرد است.
- ث) خورشید به دور زمین می‌چرخد و سنندج مرکز استان کردستان است.



قوانین هم‌ارزی

در این بخش، هم‌ارزی گزاره‌ها را دقیق‌تر بررسی می‌کنیم.

**دو حالت خاص:**

برخی گزاره‌ها در تمام حالت منطقی درست هستند، مانند:

$$p \vee \sim p \quad \text{و} \quad p \Rightarrow p$$

چنین گزاره‌ای را هم‌ارز با **T** قرار می‌دهیم. پس داریم:  $p \vee \sim p \equiv T$

به صورت مشابه:

اگر گزاره‌ای مانند  $p \wedge \sim p$  در تمام حالت منطقی نادرست باشد، آن را هم‌ارز با **F** می‌نویسیم:  $p \wedge \sim p \equiv F$   
بنابراین:

**T معرف یک گزاره‌ی همیشه درست و F معرف گزاره‌ی همیشه نادرست است.**

نمونه‌ی دیگر:

گزاره‌ی  $p \Rightarrow (p \vee q)$  همیشه درست (یعنی: هم‌ارز با **T**) است، زیرا اگر  $p$  درست باشد،  $p \vee q$  نیز درست خواهد بود؛ بنابراین ارزش گزاره‌ی شرطی همواره درست است.

**مثال:** با تشکیل جدول، درستی هم‌ارزی  $q \equiv T \Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \wedge (q \vee p)]$  را نشان دهید.

پاسخ

**مثال:** بدون تشکیل جدول، تعیین کنید هر یک از گزاره‌های مرکب زیر، با چه گزاره‌ی ساده‌ای هم‌ارز است و برای آن دلیل

ذکر کنید.

الف)  $p \vee \sim p$       ب)  $p \wedge \sim p$       پ)  $p \vee (p \wedge q)$       ت)  $p \wedge (p \vee q)$

پاسخ

**مثال:** برای درستی هم‌ارزی زیر (بدون تشکیل جدول) دلیل بیاورید.

$$(p \vee \sim p) \Rightarrow (q \wedge \sim q) \equiv F$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ ✓

**مثال:** اگر ارزش گزاره‌ی  $(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (p \wedge \sim p)$  درست باشد، نشان دهید ارزش گزاره‌ی  $p \vee q \sim$  نادرست است.

پاسخ ✓

### توجه کنید:

ترکیب گزاره‌های با ارزش **T** و **F** با یک گزاره‌ی دلخواه  $p$  قابل ساده شدن است. برای نمونه‌های زیر دلیل ذکر کنید.

$$p \vee T \equiv T \quad \text{و} \quad p \vee F \equiv p \quad \text{و} \quad p \wedge T \equiv p \quad \text{و} \quad p \wedge F \equiv F \quad \text{و} \quad p \Rightarrow T \equiv T \quad \text{و} \quad p \Rightarrow F \equiv p$$

در موارد مشابه، جای  $p$  دو حالت ممکن «د» و «ن» را قرار داده و ساده شده‌ی گزاره را تشخیص دهید.

**مثال:** با استفاده از خواص هم‌ارزی (بدون استفاده از جدول) نشان دهید:  $(p \Leftrightarrow F) \equiv \sim p$ .

پاسخ ✓

هم‌ارزی دیگری برای گزاره‌های شرطی با کاربردی مفید وجود دارد.

### قانون عکس نقیض:

منظور از «عکس نقیض» گزاره‌ی شرطی  $p \Rightarrow q$  این است که گزاره‌ها جابجا شده و هر دو نقیض شوند:

$$\sim q \Rightarrow \sim p$$

### بعلاوه؛

هم‌ارزی مهم زیر به نام «**قانون عکس نقیض**» برقرار است:

$$(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$$

برای نمونه:

هم‌ارز گزاره‌ی «اگر ۲ عددی اول باشد، آنگاه عدد ۴ زوج است.» چنین خواهد بود:

اگر عدد ۴ فرد باشد، آنگاه عدد ۲ اول نیست.

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



دلیل هم‌ارزی فوق با رسم جدول دیده می‌شود:

p	q	$p \Rightarrow q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim q \Rightarrow \sim p$
د	د	د	ن	ن	د
د	ن	ن	ن	د	ن
ن	د	د	د	ن	د
ن	ن	د	د	د	د

**توجه کنید:**

عکس گزاره‌ی شرطی  $p \Rightarrow q$ ، به صورت  $q \Rightarrow p$  است و بعلاوه: درست یا نادرست بودن  $p \Rightarrow q$  و  $q \Rightarrow p$  ربطی به هم ندارند.

**مثال:** عکس نقیض گزاره‌ی «اگر  $x > 1$  باشد، آنگاه  $x^2 \leq 1$  است.» را بنویسید.



کاربردی از هم‌ارزی  $(p \Rightarrow q) \equiv (\sim q \Rightarrow \sim p)$  را ببینید.

**مثال:** (از کتاب) ثابت کنید اگر  $a$  عدد صحیح و  $a^2$  فرد باشد، آنگاه  $a$  فرد است.



در ادامه، سه خاصیت هم‌ارزی مربوط به ترکیب فصلی و عطفی ببینید.

**خواص جابجایی:**

$$p \vee q \equiv q \vee p \quad \text{و} \quad p \wedge q \equiv q \wedge p$$

**خواص شرکت پذیری:**

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \quad \text{و} \quad p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$$

**در نتیجه:**

وقتی همه ترکیب‌ها  $\vee$  یا  $\wedge$  باشد، می‌توانید پرانتزها را حذف کرده و حتی گزاره‌ها را جابجا کنید.

$$p \vee (q \vee r) \equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee q \vee r$$

**خواص توزیع پذیری:**

کاملاً شبیه توزیع پذیری ضرب اعداد نسبت به جمع:  $a \times (b + c) = a \times b + a \times c$ ، هر دوی ترکیب‌های فصلی و عطفی

نسبت به هم توزیع می‌شوند:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r) \quad \text{و} \quad p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



دلیل هر سه مورد بالا با جدول قابل بیان است. یک مورد را می‌آوریم:

$$p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$$

p	q	r	$q \wedge r$	$p \vee (q \wedge r)$	$p \vee q$	$p \vee r$	$(p \vee q) \wedge (p \vee r)$
د	د	د	د	د	د	د	د
د	د	ن	ن	د	د	د	د
د	ن	د	ن	د	د	د	د
د	ن	ن	ن	د	د	د	د
ن	د	د	د	د	د	د	د
ن	د	ن	ن	ن	د	ن	ن
ن	ن	د	ن	ن	ن	د	ن
ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن	ن

**تذکر:**

چنان‌که تاکنون دیده‌ایم، می‌توان از قوانین گفته شده، برای تشخیص یا اثبات هم‌ارزی گزاره‌ها به روش کوتاه‌تر (به جای رسم جدول) استفاده کرد. در ادامه چند نمونه‌ی دیگر ببینید.

**مثال:** نشان دهید گزاره‌ی  $(p \Rightarrow \sim q) \sim (p \wedge q)$  با گزاره‌ی  $p \wedge q$  هم‌ارز است.

**پاسخ**

**مثال:** نشان دهید هم‌ارزی  $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$  برقرار است.

**پاسخ**

**مثال:** نقیض گزاره‌ی  $(p \Rightarrow q) \Rightarrow q$  را به صورت ساده بنویسید.

**پاسخ**

**پاسخ دهید (۳)**

۱- اگر  $p$  یک گزاره دلخواه و  $F$  یک گزاره‌ی همواره نادرست باشد، آنگاه: (نهایی- فرورد ۱۴۰۳)

$$p \vee F \equiv \dots$$

۲- عکس نقیض گزاره زیر را بنویسید و آن را ارزش گذاری کنید:

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



«اگر عدد ۳ - فرد باشد، آنگاه ۷ یک مقسوم علیه اول عدد ۲۱ است.»

۳- با استفاده از جدول ارزش گزاره‌ها نشان دهید:

$$\sim(p \leftrightarrow q) \equiv \sim p \leftrightarrow q$$

۴- طرف دوم هم‌ارزی‌های زیر را بنویسید:

الف)  $\sim(p \Rightarrow q) \equiv \dots\dots\dots$

ب)  $p \Rightarrow (p \vee q) \equiv \dots\dots\dots$

پ)  $p \wedge \sim[p \vee (p \wedge \sim q)] \equiv \dots\dots\dots$

۵- ارزش گزاره‌ی زیر را مشخص کنید.

$$p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$$

۶- بدون استفاده از جدول هم‌ارزی زیر را ثابت کنید

$$(p \Rightarrow r) \vee (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$$

۷- نقیض گزاره‌ی  $(p \vee q) \wedge \sim p$  را بنویسید.

**متنّب کتاب:**

۱- با استفاده از جدول ارزش‌ها نشان دهید:

الف) $p \wedge T \equiv p$	ب) $p \Rightarrow p \equiv T$
پ) $p \wedge (q \vee p) \equiv p$	ت) $p \vee (q \wedge p) \equiv p$
ث) $p \Rightarrow (q \Rightarrow r) \equiv (p \wedge q) \Rightarrow r$	

۲- ثابت کنید هرگاه  $n$  عددی صحیح و  $n^3$  مضرب ۳ باشد، آنگاه  $n$  نیز مضرب ۳ است.



سورها

در بیان احکام یا ادعاهای مختلف توسط گزاره نماها، گاهی آن ادعا در مورد تمام اعضاء مطرح می‌شود. برای نمونه:

- همه‌ی مثلث‌های متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین هم هستند.
- همه‌ی عددهایی که بر ۶ بخش‌پذیرند، بر ۲ و ۳ هم بخش‌پذیر هستند.

برای بیان عبارات بالا، از «سور» زیر استفاده می‌شود.

**سور عمومی:**

نماد این سور « $\forall$ » بوده و آن را «به ازای هر» یا «برای همه» می‌خوانیم. برای نمونه، عبارت:

$$\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0$$

خوانده می‌شود: «به ازای هر  $x$  عضو  $\mathbb{R}$  داریم:  $x^2 > 0$  که البته گزاره‌ای نادرست است. (چرا؟)»

**توجه کنید:**

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور عمومی فقط وقتی درست است که:

گزاره‌نما، برای هر عضو از دامنه‌ی متغیر، به یک حکم صحیح تبدیل شود.

برای نمونه:

درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف)  $\forall x \in P; x$  عددی فرد است. ( $P$  مجموعه اعداد اول)

نادرست است؛ زیرا عدد ۲ عضو  $P$  بوده و عددی فرد نیست.

ب)  $\forall x \in \mathbb{R}; \tan x \cdot \cot x = 1$

نادرست است؛ زیرا برای عددهای په صورت:  $x = \frac{k\pi}{2}$ ، تانژانت یا کتانژانت تعریف نشده بوده و تساوی معنی ندارد.

پ)  $\forall x \in \mathbb{Z}; x^2 + 1 \in \mathbb{N}$

درست است؛ زیرا  $x^2 \geq 0$  بوده و در نتیجه  $x^2 + 1 \geq 1$  همواره عددی طبیعی خواهد بود.

**مثال:** ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کنید.

$$\forall x \in \mathbb{R}; \frac{x^2 - 1}{x - 1} = x + 1$$

پاسخ



گاهی یک حکم برای برخی اعضای دامنه مطرح می‌شود، مانند:  
برخی عددهایی که بر ۳ بخش‌پذیرند، بر ۶ هم بخش‌پذیر هستند.

در چنین حالت‌هایی از سور دیگری استفاده می‌شود:

### سور وجودی:

نماد این سور « $\exists$ » بوده و «به ازای بعضی» یا «وجود دارد» خوانده می‌شود. نمونه:

$$\exists x \in \mathbb{N}; x^2 = x$$

خوانده می‌شود: «به ازای بعضی مقادیر  $x$  عضو  $\mathbb{N}$  داریم:  $x^2 = x$  که ادعایی درست است. (چرا؟)»

### توجه کنید:

گزاره‌ی ساخته شده توسط سور وجودی فقط وقتی درست است که:

گزاره‌نما، لااقل برای یک عضو از دامنه‌ی متغیر، به یک حکم صحیح تبدیل شود.

برای نمونه؛ درستی یا نادرستی چند مورد را بررسی می‌کنیم:

الف)  $\exists x \in \mathbb{N}; |x| - 1 < 0$

نادرست است، زیرا:

گزاره‌نما معادل  $|x| < 1$  است و چون هیچ عدد طبیعی در آن صادق نیست، مجموعه جواب تهی بوده و گزاره‌ی سوری صحیح نیست.

ب)  $\exists x \in \mathbb{Z}; |x| - 1 < 0$

درست است، زیرا:

عدد  $x = 0$  عضو  $\mathbb{Z}$  در گزاره‌نمای  $|x| < 1$  صدق می‌کند.

### نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

گزاره‌ی زیر را با استفاده از نماد سورها ( $\exists$  یا  $\forall$ ) نوشته و سپس ارزش آن را با ذکر دلیل مشخص کنید.

«هر عدد طبیعی از مربع خودش کوچک‌تر است.»

پاسخ

**مثال:** ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید. ( $x \in \mathbb{R}$ )

الف)  $\exists x; x^2 + x + 1 < 0$

ب)  $\exists x; \frac{1}{x-1} = 0$

### توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$p) \forall x \in \{x \mid 0 < x \leq 1, x \in \mathbb{R}\}; x^2 \leq x$$

**مثال:** گزاره‌ی  $\exists x \in \mathbb{N}; \sim(x \in P \wedge x \in E)$  را به فارسی روان بیان کنید.  $P$  مجموعه‌ی اعداد اول و  $E$  مجموعه‌ی اعداد زوج است.

پاسخ

اکنون روش نقیض کردن گزاره‌های سوری را می‌آوریم. واضح است که، نقیض: «درست بودن همیشگی یک ادعا» این است که: «آن ادعا لاقلاً یک‌بار نادرست شود.» و به عبارت دیگر:

### لاقل یک‌بار نقیض آن ادعا درست باشد.

بنابراین:

#### ❖ نقیض سور عمومی

اگر  $P(x)$  یک گزاره‌نما در مورد متغیر  $x$  باشد:

$$\sim(\forall x; P(x)) \equiv \exists x; \sim P(x)$$

به صورت مشابه:

#### ❖ نقیض سور وجودی

خلاف ادعای: « $P(x)$  حداقل برای یک  $x$  درست است.» این است که  $P(x)$  همیشه نادرست باشد؛ به عبارت دیگر، « $\sim P(x)$  همیشه درست است.» بنابراین:

$$\sim(\exists x; P(x)) \equiv \forall x; \sim P(x)$$

نمونه‌هایی ببینید:

- نقیض گزاره‌ی «تمام انسان‌ها فناپذیرند.» با نقیض کردن سور عمومی به صورت زیر بیان می‌شود:  
لاقل یک انسان هست که فناپذیر نباشد. (فناناپذیر باشد).
- نقیض گزاره‌ی «حداقل یک عدد اول زوج وجود دارد.» با نقیض کردن سور وجودی به صورت زیر بیان می‌شود:  
هر عدد اول فرد است.

**مثال:** نقیض گزاره‌ی زیر را نوشته و ارزش گزاره‌ی اولیه و نقیض را مشخص کنید.

$$\forall y \in \mathbb{R}; |y| + 1 \neq 0$$

پاسخ



**مثال:** ابتدا ارزش گزاره‌ی زیر را مشخص کنید و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\exists x \in \mathbb{N}; \frac{3+x}{4} = 0$$

پاسخ ✓

**مثال:** نقیض گزاره‌ی  $(\exists x \in \mathbb{R}; 3x > 2) \vee (\forall x \in \mathbb{R}; x^2 > 0)$  را بنویسید.

پاسخ ✓

### پاسخ دهید (۴) ?

۱- گزاره‌های زیر را با استفاده از نمادهای سوری نوشته و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.  
الف) حاصل جمع هر عدد طبیعی با معکوسش بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.  
ب) به ازای بعضی از مقادیر حقیقی  $x$  داریم:  $x^3 = x$ .

۲- جای خالی را با عبارت مناسب کامل کنید.

$$\sim(\exists x \in \mathbb{R}; \sim p(x)) \equiv \dots\dots\dots$$

۳- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کرده و نقیض هر یک را بنویسید:

الف)  $\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$

ب)  $\exists x \in (-\infty, 0); x - \frac{1}{x} \leq -2$

۴- اگر گزاره‌ی زیر صحیح باشد، برای  $A$  چه جواب‌هایی وجود دارد؟

$$\forall x \in A; x^2 \leq 2x$$

۵- ارزش گزاره‌ی زیر را تعیین کرده و سپس نقیض آن را بنویسید.

$$\forall m \in P; m = 2k \quad (k \in \mathbb{N})$$

۶- نقیض گزاره‌های زیر را بنویسید. (در قسمت «ب»، ارزش گزاره‌ی نقیض را مشخص کنید).

الف)  $\forall x \in \mathbb{R}; (x^2 \neq x) \vee (x^2 = 7)$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



ب)  $\exists x \in \mathbb{R}; (x < 0) \wedge (x^2 \leq 1)$

۷- نقیض گزاره‌ی زیر را نوشته و ارزش گزاره‌ی اولیه و نقیض را مشخص کنید.

$$\exists y \in \mathbb{Q}'; y^2 \in \mathbb{Q}$$

۸- ارزش گزاره زیر را بیابید و سپس نقیض آن را بنویسید:

$$(\forall x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} \leq -2) \Rightarrow (\exists x \in \mathbb{N}; x^2 + x = 0)$$

### منتخب کتاب:

۱- گزاره‌های زیر را با استفاده از سورها نوشته و ارزش هر یک را با ذکر دلیل مشخص کنید.

الف) هر عدد طبیعی زوج یا فرد است.

ب) همه‌ی اعداد اول فرد هستند.

پ) عدد صحیح مثبتی مانند  $x$  وجود دارد به طوری که  $1 - 2x > 5$ .

ت) حاصل جمع هر عدد حقیقی ناصفر با معکوس آن، بزرگ‌تر یا مساوی ۲ است.

۲- هرگاه  $A = \{x \in \mathbb{Z} \mid 0 < x \leq 5\}$  دامنه‌ی متغیر باشد، ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کنید.

ب)  $\forall x \in A; x + 1 \geq 6$

الف)  $\exists x \in A; x + 3 \leq 4$

۳- ارزش گزاره‌های سوری زیر را تعیین کرده و سپس نقیض هر یک را بنویسید.

ب)  $\forall n \in \mathbb{N}; (2^n + 1) \in P$

الف)  $\exists x \in \mathbb{R}; \frac{x-3}{5} = 0$

پ)  $\forall x \in (-\infty, 0); x + \frac{1}{x} \leq -2$

## لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
<b>جزوه جامع کنکور تجربی</b>	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
<b>جزوه جامع کنکور ریاضی</b>	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

## ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴  
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴