

ترکیب: دانش شما + ممتوای بی نظیر تدریس ما



«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»





«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(مذف هزینه چاپ)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

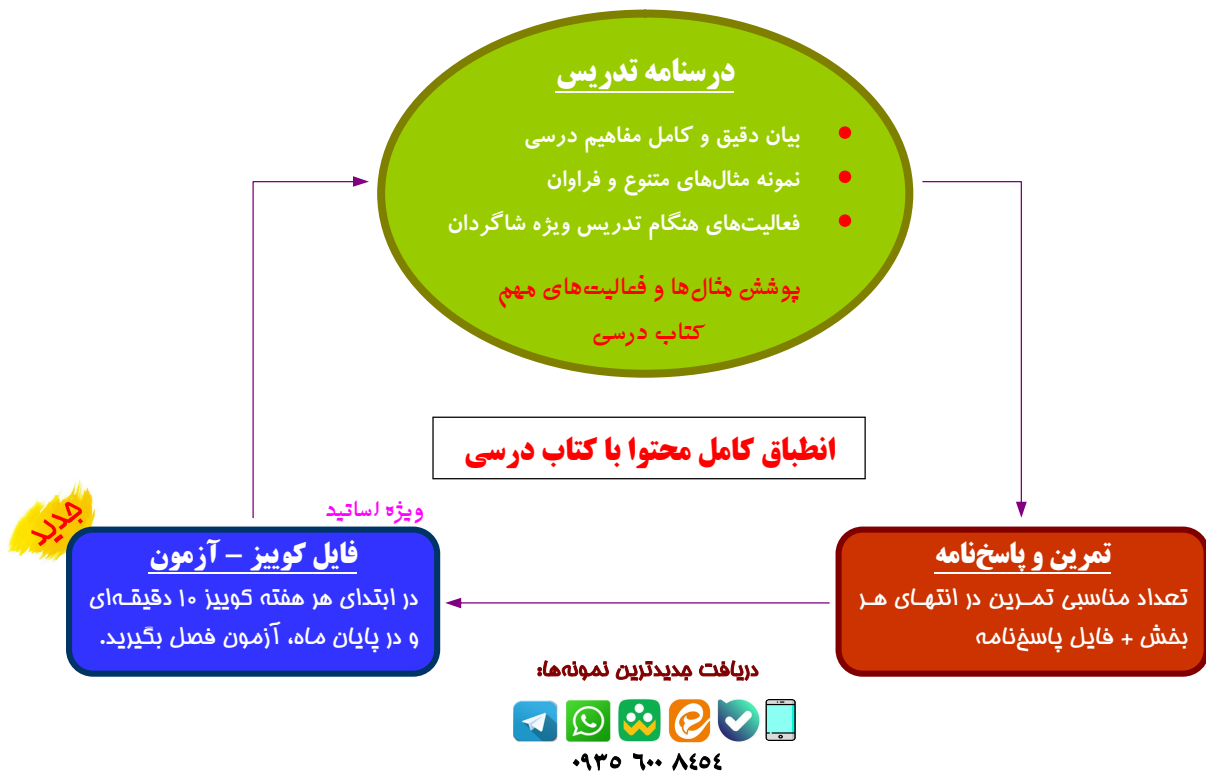
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

پلد نمونه از نتایج درفشان برخی از همکاران مجموعه درس آموزه: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

محتوای تشریحی و نهایی

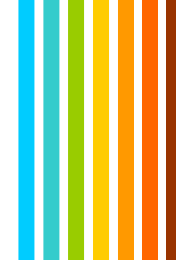


(خدمات منحصر به فرد گروه درس آموز)

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و ... روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.



مقدمات

۲

مفاهیم پایه‌ای هندسه، زوایا، ارتباط و خواص آن‌ها، مثلث و انواع آن، چند ضلعی‌ها



قضیه تالس و تشابه

۱۴۶

نسبت و تناسب، بیان حالات مختلف در قضیه تالس، مثلث‌های متشابه و کاربرد تشابه، قضیه فیثاغورس



ترسیم هندسی و استدلال

۱۷

ترسیم‌های هندسی، استدلال و استنتاج (در هندسه)، بیان و بررسی قضایای شرطی و دو شرطی



تجسم فضایی

۱۰۵

خط و صفحه در فضا، مفهوم تفکر تجسمی، بُرش، دوران برخی شکل‌های هندسی حول یک محور



هند ضلعی

۷۵

بیان مفهوم چند ضلعی، بررسی چهار ضلعی‌های مهم، مساحت و کاربرد، نقاط شبکه‌ای و مساحت



آموزش:

هندسه دهم

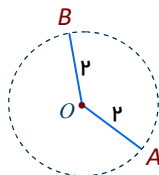


ترسیم هندسی و استدلال

صفحه	فهرست
۱۸	■ ترسیم‌های هندسی
۲۷	■ استدلال و استنتاج
۳۳	■ قضایای شرطی و دوشروطی
۴۲	■ پاسخ فعالیت‌های پای تخته



۱ روش‌های ترسیم



دایره‌ای به مرکز یک نقطه‌ی O و شعاع r سانتی‌متر در نظر بگیرید:

نقاط روی این شکل هندسی همگی دارای یک ویژگی مشترک هستند که هنگام رسم دایره مورد استفاده قرار می‌گیرد:

تمام نقاط دایره به فاصله‌ی r سانتی‌متر از نقطه‌ی O قرار دارند.

یعنی در شکل بالا:

اندازه‌ی شعاع‌های OA و OB و هر شعاع دیگری برابر r سانتی‌متر است.

توجه کنید:

۱) مجموعه نقاطی در صفحه (یا فضا) که همگی ویژگی مشترکی دارند را «مکان هندسی» گویند. بنابراین:

مکان هندسی نقاط صفحه به فاصله‌ی r از یک نقطه‌ی ثابت مانند O ، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r است. (چند مکان هندسی مهم در صفحه را در ادامه این فصل خواهیم دید.)

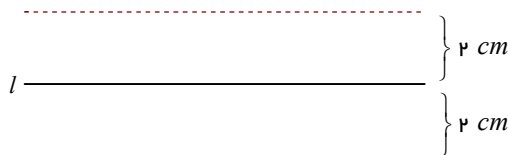
سؤال:

مکان هندسی با ویژگی بالا در فضا چه شکلی است؟

۲) طول یک پاره‌خط مانند AB دارای نماد \overline{AB} یا $|AB|$ است؛ البته برای سادگی، معمولاً طول را هم مانند نام آن با نماد AB نشان خواهیم داد.

یک مکان هندسی دیگر:

اگر l یک خط باشد، مجموعه نقاطی به فاصله‌ی r از l ، دو خط موازی به فاصله‌ی r در دو طرف آن است:



در حالت کلی:

هر ترسیم هندسی با توجه به خاصیت یا خواص مشترک نقاط آن انجام می‌شود. ببینید:



تکنیک رسم:

بسیاری مواقع در یک ترسیم هندسی، بعد از رسم بخشی از شکل، برای تکمیل آن باید نقطه‌ای را بیابیم که دارای دو ویژگی باشد. در این صورت:

- مجموعه نقاط مربوط به هر یک از ویژگی‌ها را رسم می‌کنیم.
- نقطه یا نقاطی که در هر دو مکان مشترک باشد، جواب مورد نظر را مشخص می‌کند.

نمونه‌ی بعد را ببینید:

مثال: خط l و نقطه‌ی A خارج آن در شکل روبه‌رو داده شده است.

l _____

نقطه‌ای روی l مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشد. آیا همیشه چنین نقطه‌ای وجود دارد؟

پاسخ

مثال: مثلثی به اضلاع ۲، ۳ و ۴ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ

مثال: آیا می‌توان مثلثی به طول اضلاع ۲، ۳ و ۶ سانتی‌متر رسم کرد؟ نتیجه‌ی پاسخ خود را بیان کنید.

پاسخ



نتیجه:

شرط آن که مثلثی به طول اضلاع a ، b و c وجود داشته باشد این است که هر سه نامساوی زیر برقرار باشد:

$$a < b + c \quad \text{و} \quad b < a + c \quad \text{و} \quad c < a + b$$

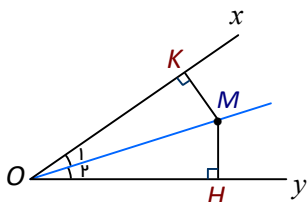
یعنی:

باید جمع طول‌های هر دو ضلع، از طول ضلع سوم بزرگ‌تر باشد.

در ادامه چند ترسیم هندسی دقیق و کامل بررسی می‌شوند؛ قبل از آن توجه کنید:

- برای رسم یک دایره، به مرکز آن و اندازه‌ی شعاع نیاز است و سپس توسط پرگار ترسیم انجام می‌شود.
- برای رسم یک پاره‌خط، نیم‌خط و یا خط به دو نقطه روی آن نیاز بوده و سپس رسم توسط خط‌کش انجام می‌شود.

در اولین مورد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی نیمساز یک زاویه را ببینید.



مثال: اگر نقطه‌ی M روی نیمساز یک زاویه باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو

ضلع آن زاویه برابر است. یعنی:

$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2 \Rightarrow MH = MK$$

برهان

نشان دهید عکس مثال بالا هم درست است؛ یعنی:

بای تخته!

۱. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو ضلع یک زاویه داشته باشد، در این صورت روی نیمساز آن زاویه قرار دارد.

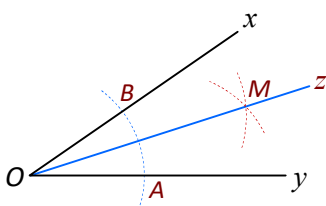




رسم نیمساز:

با استفاده از خط کش و پرگار، رسم نیمساز یک زاویه \widehat{xOy} طبق مراحل زیر انجام می‌شود:

- دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی دلخواهی باز کرده و به مرکز O یک کمان می‌زنیم تا ضلع‌های زاویه را در نقاط A و B قطع کند.
- اکنون به مراکز A و B و با شعاع دلخواهی دو کمان می‌زنیم به شرطی که یکدیگر را در نقطه‌ای چون M قطع کنند. سپس نیم خط Oz را از O و M عبور می‌دهیم:



توجه کنید:

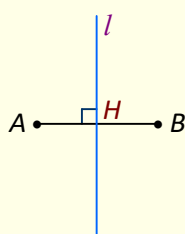
اگر پاره‌های AM و BM را رسم کنید، دو مثلث OAM و OBM طبق حالت (ضضض) هم‌نهشت خواهند شد و بنابراین:

$$\widehat{xOz} = \widehat{yOz} \Rightarrow \text{نیم‌خط } Oz \text{ نیمساز زاویه‌ی است}$$

ترسیم اصلی دیگر، عمود منصف یک پاره‌خط است؛ مفهوم دقیق آن را یادآوری می‌کنیم:

عمود منصف پاره‌خط:

یک پاره‌خط مانند AB در نظر بگیرید. عمود منصف این پاره‌خط، خطی مانند l با دو خاصیت زیر خواهد بود:



اولاً: خط l از وسط پاره‌خط عبور می‌کند:

$$AH = HB$$

ثانیاً: خط l بر پاره‌خط AB عمود است:

$$\hat{H} = 90^\circ$$

در نمونه‌ی بعد، تعیین خاصیت مشترک نقاط روی عمود منصف یک پاره‌خط را ببینید.

مثال: اگر نقطه‌ی M روی عمود منصف پاره‌خط AB باشد، نشان دهید فاصله‌ی M تا دو سر پاره‌خط برابر است.

یعنی:

$$MA = MB$$





نشان دهید برعکس مثال بالا هم درست است:

پای تخته!



۲. اگر نقطه‌ی M فاصله‌ی برابر تا دو سر پاره‌خط AB داشته باشد، M روی عمود منصف قرار دارد.

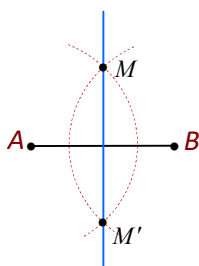
نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

عمود منصف وتر یک دایره از می‌گذرد.

پاسخ ✓

رسم عمود منصف:

با توجه به دو مورد بالا، برای رسم عمود منصف، دو نقطه به فاصله‌ی برابر تا A و B مشخص کرده و خط گذرا از آن دو رسم می‌شود:



▪ دهانه‌ی پرگار را بیشتر از نصف طول AB باز کرده، یک‌بار به مرکز A و یک‌بار به مرکز B کمان‌هایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقاط M و M' قطع کنند.

▪ فاصله‌های M و M' از نقاط A و B برابر شعاع دایره‌های یکسانی بوده و در نتیجه با هم برابرند، پس این دو نقطه روی عمود منصف قرار دارند. پس خط گذرا از این دو نقطه همان عمود منصف است.

مثال: ✨ یک لوزی با طول قطرهای ۵ و ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ ✓

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



نوبت شماست ...

پای تخته!



۳. یک لوزی با طول قطر کوچک ۴ سانتی‌متر و طول ضلع ۳ سانتی‌متر رسم کنید.

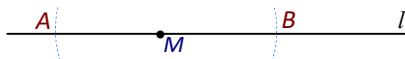
در ادامه چند ترسیم هندسی دیگر با استفاده از روش رسم عمود منصف بیان می‌شود.

رسم عمود بر خط:

خط l و نقطه‌ای چون M در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که بر l عمود باشد. این ترسیم در دو حالت انجام می‌شود:

مالت (۱): فرض کنید نقطه‌ی M روی خط l قرار داشته باشد.

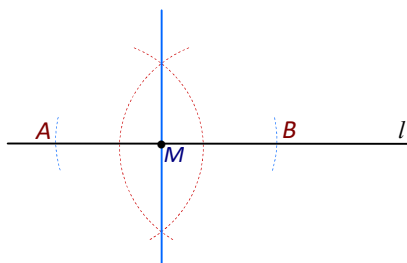
گام اول: توسط پرگار به مرکز M و شعاع دلخواهی کمان‌هایی می‌زنیم تا خط l را در دو طرف M در نقاط A و B قطع کند:



توجه کنید:

چون شعاع دو کمان یکسان است، داریم $MA = MB$ و بنابراین M وسط پاره‌خط AB است.

گام دوم: اکنون اگر به روش گفته شده، عمود منصف پاره‌خط AB را رسم کنیم، بر خط l عمود بوده و از نقطه‌ی M نیز عبور خواهد کرد:





حالت دیگر رسم خط عمود را به صورت مشابه بالا انجام دهید:

پای تخته!



۴. مالت (۲): فرض کنید نقطه‌ی M خارج روی خط l قرار داشته و با تکمیل گام‌های زیر، خطی گذرا از M بر l عمود کنید.

گام اول: دو نقطه مانند A و B روی خط l مشخص کنید به طوری که $MA = MB$ باشد.

گام دوم: عمود منصف AB را رسم کنید. چرا نقطه‌ی M روی این عمود منصف قرار دارد؟

توجه!

رسم خط عمود در حالت (۲) بالا، یک سؤال (نهایی- فرداد ۱۴۰۳) بوده است.

مثال: ✨ یک مستطیل به طول ۴ سانتی‌متر و اندازه‌ی قطر ۶ سانتی‌متر رسم کنید.

پاسخ ✓

کاربرد بعدی عمود منصف، رسم خطی موازی یک خط داده شده است.

رسم خط موازی: 📌

خط l و نقطه‌ای چون M در خارج آن در نظر بگیرید. می‌خواهیم خطی از M عبور دهیم که با l موازی باشد:

M .

l

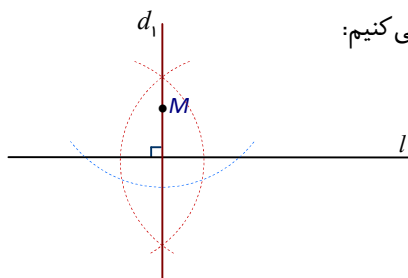
توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



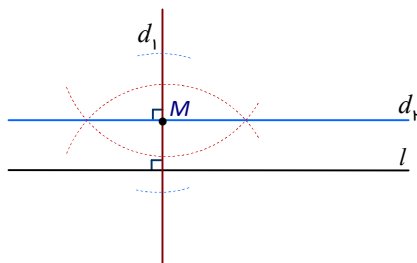
کام (۱):

طبق حالت (۲) از رسم خط عمود، از نقطه‌ی M خط d_1 را بر l عمود می‌کنیم:



کام (۲):

اکنون نقطه‌ی M روی خط d_1 قرار دارد. این بار طبق حالت (۱) از رسم خط عمود، خطی چون d_p از نقطه‌ی M بر خط d_1 عمود می‌کنیم:



نتیجه‌گیری:

خط d_p از نقطه‌ی M عبور کرده و داریم:

$$l \perp d_1 \quad \text{و} \quad d_p \perp d_1$$

بنابراین:

هر دو خط l و d_p بر خط d_1 عمود بوده و در نتیجه خودشان موازی‌اند. یعنی: $d_p \parallel l$ همان خط مورد نظر است.

پاسخ دهید (۱) ?

۱- با توجه به درسنامه، جاهای خالی را کامل کنید:

الف) هر نقطه که روی عمود منصف یک پاره‌خط باشد

و هر نقطه که روی عمود منصف

ب) هر نقطه که روی نیمساز یک زاویه باشد

و هر نقطه که روی نیمساز

۲- دو نقطه‌ی A و B به فاصله‌ی ۴ سانتی‌متر از هم قرار دارند. توسط ترسیم مناسب، نقاطی در صفحه را مشخص کنید که از A به فاصله‌ی ۳ و از B به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.

۳- نقطه‌ی M روی خط l قرار دارد. نقاطی را تعیین کنید که از نقطه‌ی M به فاصله‌ی ۳ سانتی‌متر و از خط l به فاصله‌ی ۲ سانتی‌متر باشند.



۴- چند لوزی به طول ضلع $\frac{2}{5}$ سانتی متر و قطر کوچک ۶ سانتی متر قابل رسم است؟

۵- جاهای خالی را در عبارت زیر طوری کامل کنید که مسأله:

الف) دو جواب داشته باشد. ب) یک جواب داشته باشد. پ) جواب نداشته باشد.

«نقاط A و B به فاصله‌ی ۷ سانتی متر از هم قرار دارند. نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از نقطه‌ی A برابر و از نقطه‌ی B برابر باشد.»

۶- در مثلث ABC می‌دانیم $AB = 2x - 1$ و $AC = 4x + 2$ و $BC = 7x$ است. حدود x را مشخص کنید.

۷- قطعه‌ای از یک دایره به صورت مقابل داده شده است. به کمک ترسیم، مرکز دایره‌ی مربوطه را دقیقاً مشخص کنید:



منتفب کتاب:

۱- فرض کنید می‌دانیم هر چهار ضلعی که قطرهایش منصف هم باشند، متوازی الاضلاع است. متوازی الاضلاعی رسم کنید که طول قطرهای آن ۴ و ۷ باشد. چند متوازی الاضلاع به طول قطرهای ۴ و ۷ می‌توان رسم کرد؟

۲- دو ضلع یک زاویه را در نظر بگیرید.

الف) نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن از هر ضلع زاویه‌ی مورد نظر ۲ واحد باشد.

ب) با استفاده از نقطه‌ای که در قسمت الف) یافته‌اید، نیمساز زاویه را رسم کنید.



استدلال و استنتاج

در احکام و مسائل هندسی همواره به استدلالی نیاز است که درستی یا نادرستی هر یک را نشان دهد (یعنی: اثبات کند). در این گونه موارد، معمولاً به دو صورت با مسأله برخورد می‌شود.

استدلال استقرایی:

در این روش با چندین مشاهده، یک نتیجه‌گیری کلی انجام می‌دهیم. یعنی:

استدلال استقرایی رسیدن از جزء به کل است.

برای نمونه؛

ممکن است با مشاهده‌ی اعداد اول: ۳، ۷، ۱۱، ۲۳، نتیجه بگیریم که اعداد اول همگی فرد هستند. (البته نتیجه نادرست است!)

نمونه‌ی دیگر:

مثال: به استدلال زیر توجه کنید:

- با حرارت دادن، پس از مدتی آب به بخار تبدیل می‌شود.
- با حرارت دادن یک تکه یخ، آن هم به بخار تبدیل می‌شود.

ممکن است شخصی با این مشاهدات نتیجه بگیرد:

هر شیء با حرارت دیدن، بعد از مدتی به بخار تبدیل می‌شود!

نتیجه‌ی حاصل شده صحیح نیست. یعنی استدلال استقرایی ممکن است نتایج نادرست حاصل کند.

توجه کنید:

طبق آنچه بیان شد، در مورد استفاده از استدلال استقرایی به دو مورد مهم اشاره می‌شود:

- احکام به‌دست آمده به این روش ممکن است نادرست باشند. لذا روش استقرایی قابل اطمینان نبوده و باید احکام به روش‌های دیگری به‌طور قطعی تایید یا رد شوند.
- با وجود این‌که روش استقرایی قابل اطمینان نیست، برای به‌دست آوردن فرضیه‌های علمی و حتی در برخی بررسی‌های علوم تجربی به عنوان تنها ابزار، از آن استفاده می‌شود.

در همین درس نیز:

در بخش پایانی **فصل (۳)**، کاربرد جالبی از استدلال استقرایی را در قضیه‌ی پیک خواهیم دید.



روش اصلی و قوی‌تر استدلال در ریاضیات را ببینید.

استدلال استنتاجی:

تایید قطعی یک حکم (درست) به این صورت است که:

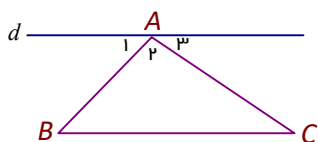
- بر اساس حقایق و احکام کلی از پیش قبول کرده و
- با استفاده از محاسبات و دلایل منطقی

درستی آن حکم خاص را نشان می‌دهیم؛ به این روش «استدلال استنتاجی» گویند. بنابراین:

استدلال استنتاجی رسیدن از کل به جزء است.

مثال: در فصل مقدماتی با استدلال استنتاجی نشان دادیم که مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

دلیل به صورت خلاصه:



از نقطه‌ی A خطی موازی BC رسم می‌کنیم. طبق خواص خطوط موازی و مورب:

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ \xrightarrow{\hat{A}_1 = \hat{B}, \hat{A}_2 = \hat{A}, \hat{A}_3 = \hat{C}} \hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^\circ$$

با استفاده از این حقیقت شناخته شده، نشان دهید:

مجموع زوایای داخلی هر چهارضلعی 360° است.

بعلاوه، در مورد مجموع زوایای داخلی n ضلعی چه می‌توان گفت؟ ($n \geq 3$)

پاسخ

توجه کنید:

در اثبات آورده شده در مثال بالا، از یک چهارضلعی دلخواه استفاده کرده و حکم را تایید کردیم. بنابراین، حکم در مورد هر چهارضلعی دلخواهی برقرار است. پس:

(همواره در اثبات‌ها باید مراقب باشید استنتاج خود را به حالت‌های خاص محدود نکنید.)

مثال: فرض کنید خط d از وسط پاره‌خط AB عبور کند. با استدلال استنتاجی نشان دهید فاصله‌ی نقاط A و B تا خط

d با هم برابر است.

پاسخ

**توجه کنید:**

در استدلال استنتاجی بالا، حقایق شناخته شده‌ی زیر را به کار بردیم:

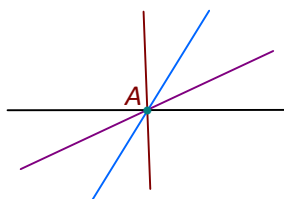
- برابری زوایای متقابل به رأس.
- هم‌نهشتی دو مثلث به حالت «وز».
- برابری اجزای متناظر در دو مثلث هم‌نهشت.

مثال: در مثلث داده شده ABC ، خطی مشخص کنید که فاصله‌ی رأس‌های مثلث از آن یکسان باشد. چند خط با این

شرط وجود دارد؟

پاسخ

در ادامه، یک مفهوم هندسی معرفی کرده و سپس نمونه‌های دیگری از استدلال استنتاجی را خواهیم دید.

خطوط هم‌رس:

چند خط که همگی در یک نقطه چون A مشترک باشند را «هم‌رس» گویند. بعلاوه، نقطه‌ی A را نقطه‌ی هم‌رسی این خط‌ها می‌نامیم.

مثال: نشان دهید نیمسازهای زوایای داخلی هر مثلث هم‌رس‌اند.

پاسخ

نتیجه:

با توجه به اثبات بالا، به دو مورد جالب دست می‌یابیم:

▪ نقطه‌ی هم‌رسی سه نیمساز زوایای داخلی، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که:

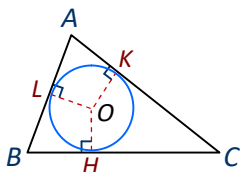
فاصله‌ی O تا سه ضلع مثلث با هم برابر است: $OH = OK = OL$.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OH باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از نقاط H ، K و L عبور خواهد کرد:

**توجه کنید:**

این دایره از داخل مثلث بر هر سه ضلع آن مماس است. (دایره‌ی محاطی مثلث)

با روشی کاملاً مشابه مثال قبل و با توجه به ویژگی عمود منصف، نشان دهید:

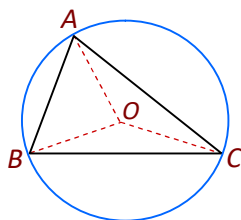
پای تخته!

۵. عمود منصف‌های اضلاع هر مثلث هم‌مرس‌اند.

**توجه کنید:**

فعالیت پای تخته قبل نیز، موارد مهم زیر را حاصل می‌کند:

- نقطه‌ی هم‌رسی سه عمود منصف اضلاع مثلث، نقطه‌ای چون O درون مثلث است با این خاصیت که: فاصله‌ی O تا سه رأس مثلث با هم برابر است: $OA = OB = OC$.
- طبق مورد قبل؛ اگر دهانه‌ی پرگار را به اندازه‌ی OA باز کرده و به مرکز O دایره‌ای رسم کنیم، این دایره از هر سه رأس مثلث عبور خواهد کرد. (دایره‌ی محیطی مثلث)





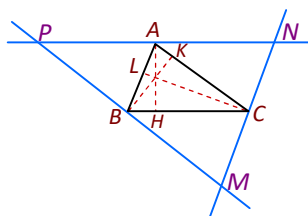
در فعالیت بعدی، به کمک شما خواهیم دید ارتفاع‌های هر مثلث نیز هم‌مرس‌اند.

بای تخته!



۶. با انجام گام‌های ساده‌ی زیر، نشان دهید ارتفاع‌های وارد بر اضلاع هر مثلث هم‌مرس‌اند.

گام ۱: مثلث ABC و ارتفاع‌های AH ، BK و CL را در آن در نظر بگیرید.



گام ۲: از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبه‌رو رسم کنید تا از برخورد آن‌ها مثلث MNP ایجاد شود.

گام ۳: دلیلی بیاورید که نشان دهد AH بر PN ، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

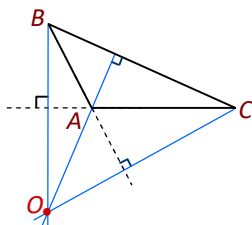
گام ۴: دلیلی بیاورید که نشان دهد چهار ضلعی‌های $ABCN$ و $ACBP$ متوازی‌الاضلاع هستند و نتیجه بگیرید که $AN = AP$ است و به صورت مشابه $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

گام ۵: از گام‌های ۳ و ۴ نتیجه بگیرید که ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP بوده و در نتیجه هم‌مرس هستند.

توجه کنید:

بر خلاف نقطه‌ی هم‌مرسی نیمسازهای مثلث که همیشه درون مثلث قرار دارد، نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌ها و عمود منصف‌های اضلاع ممکن است بیرون مثلث قرار گیرند.

نمونه:



در مثلث ABC مقابل (دارای یک زاویه‌ی باز)، دو ارتفاع بر امتداد ضلع مقابل عمود شده و فقط یکی از ارتفاع‌ها بر ضلع مربوطه (BC) عمود شده است. در نتیجه، نقطه‌ی هم‌مرسی O در بیرون مثلث قرار گرفته است.

در مثال بعد، خاصیتی از نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث آورده شده است.

مثال: مثلث دلخواه ABC را با شرط تند بودن زوایای داخلی رسم کرده و O را نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌های آن در نظر بگیرید. سپس نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث OAC را مشخص کنید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ

؟ پاسخ دهید (۲)

- ۱- نقطه‌ای درون مثلث مشخص کنید که از سه ضلع آن به یک فاصله باشد.
- ۲- نقطه‌ای مشخص کنید که از سه رأس مثلث به یک فاصله باشد. آیا این نقطه همیشه درون مثلث قرار دارد؟
- ۳- در کدام نوع مثلث، نقطه‌ی هم‌مرسی نیمسازها و ارتفاع‌ها بر هم منطبق است؟
- ۴- نقطه‌ی هم‌مرسی ارتفاع‌های مثلث به اضلاع ۶، ۸ و ۱۰ سانتی‌متر را دقیقاً مشخص کنید. نتیجه‌ی حل این تمرین چیست؟



فضای شرطی

در این بخش، روش بیان دقیق‌تر مفاهیم و احکام هندسی را می‌بینیم. در واقع با بیان احکام به صورت شرطی، با مطالب جدید و بسیار مهمی آشنا خواهیم شد.

گزاره:

- در ریاضیات، به هر ادعا یا خبر که یا «دقیقاً درست» و یا «دقیقاً نادرست» است، یک «**گزاره**» گویند.
- اگر گزاره فقط شامل یک خبر باشد، به آن یک گزاره‌ی «**ساده**» گوئیم.
 - اگر گزاره شامل دو یا چند خبر باشد، به آن گزاره‌ی «**مرکب**» گویند.

برای نمونه:

- عبارت «عدد ۷ سومین عدد اول است.» یک گزاره‌ی ساده است.
- عبارت «عدد ۷ چهارمین عدد اول و $\frac{۳}{۴}$ - عددی گنگ است.» یک گزاره‌ی مرکب است.

بعلاوه:

در برخورد با یک گزاره، باید یکی از دو مسیر زیر دنبال گردد:

الف) اگر گزاره درست باشد، باید آن را با استدلال استنتاجی ثابت کنیم که به این استدلال، «**برهان**» هم گفته می‌شود. مانند: همرس بودن ارتفاع‌ها یا نیمسازهای زوایای داخلی مثلث که در بخش قبل دیدیم. بویژه، در بین احکام درست، برخی از آن‌ها جایگاه خاصی دارند:

قضیه:

در هندسه، گزاره‌هایی مهم که کاربردهای زیادی داشته و برای آن‌ها برهان درستی آورده‌ایم، «**قضیه**» نامیده می‌شوند. بنابراین:

قضیه: گزاره‌ی کلی و مهمی است که همیشه درست باشد.

ب) هرگاه گزاره نادرست باشد، باید برای آن مثال نقض بیاوریم. (آشنایی با مثال نقض در انتهای فصل)

برای بیان واضح‌تر یک قضیه یا یک گزاره، با تعیین فرض و حکم، آن را به صورت استاندارد زیر می‌نویسیم:

گزاره‌ی شرطی:

می‌توان یک گزاره را به صورت زیر بیان کرد که در این صورت به آن «**گزاره شرطی**» گویند:

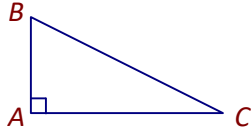
اگر فرض، آنگاه حکم

**بویژه:**

اگر یک قضیه را به صورت شرطی بیان کنیم، به آن «**قضیه شرطی**» گفته می‌شود.

برای نمونه:

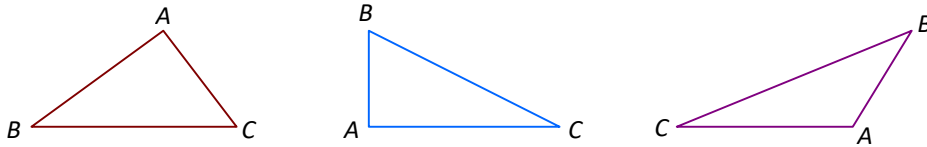
قضیه فیثاغورس به صورت شرطی چنین است:



اگر مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، آنگاه $BC^2 = AB^2 + AC^2$ است.

مورد بعدی، بیان و اثبات یک قضیه‌ی شرطی است که از مشاهدات چندباره‌ی زیر حاصل شده است.

در تمام مثلث‌های رسم شده، ضلع و زاویه‌ی بزرگ‌تر مثلث روبه‌روی هم قرار دارند. (\hat{A} زاویه و BC ضلع بزرگ‌تر است).

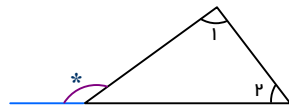


بنابراین، حکم قضیه به روش استقرایی نوشته شده؛ ولی برای تایید قطعی آن از استدلال استنتاجی استفاده خواهیم کرد.

یادآوری:

دو خاصیت مورد نیاز در مثلث‌ها:

- در مثلث متساوی‌الساقین، زوایای پای ساق‌ها (مجاور قاعده) با هم برابرند.
- در هر مثلث، هر زاویه‌ی خارجی برابر است با مجموع دو زاویه‌ی داخلی غیر مجاور.



$$* = \hat{1} + \hat{2}$$

یعنی:

قضیه:

«مثلثی با دو ضلع نابرابر در نظر بگیرید. در این صورت زاویه‌ی مقابل به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه مقابل به ضلع کوچک‌تر.» این قضیه را به صورت شرطی نوشته و ثابت کنید.

پاسخ



برای بیان یک تکنیک مهم اثبات، به مفهوم زیر نیاز داریم.

نقیض گزاره:

هر گاه در یک گزاره، خبر (حکم) آن را کاملاً برعکس کنیم، نقیض گزاره به دست می آید.

توجه کنید:

با نقیض کردن یک گزاره، حکم دقیقاً برعکس می شود. بنابراین:
اگر گزاره درست باشد، نقیض آن نادرست و اگر گزاره نادرست باشد، نقیض آن درست خواهد بود.

برای نمونه، یک گزاره و نقیض آن را ببینید:

- **گزاره:** امروز هوا گرم است.
 - **نقیض:** چنین نیست که امروز هوا گرم است.
- البته می توان می توان نقیض را به صورت ساده تر زیر هم بیان کرد:
امروز هوا گرم نیست!

✨ **مثال:** نقیض هر گزاره را بنویسید.

الف) a عددی مثبت است.

ب) مجموع زوایای داخلی هر مثلث 180° است.

پ) $1^2 < (-1)^2$. سپس ارزش گزاره و نقیض آن را مقایسه کنید.

بیان روش دیگری برای استدلال:

گاهی ارائه استدلال استنتاجی به صورت عادی مشکل یا غیرممکن است. در این مواقع، معمولاً روش اثبات غیر مستقیم به صورت زیر، کمک بسیار زیادی می کند:

**بُرهان خُلف:**

- برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:
- حکم مورد نظر را نادرست در نظر می‌گیریم؛ یعنی: فرض می‌کنیم نقیض آن درست باشد. به این فرض جدید، «فرض خُلف» هم می‌گویند.
 - با توجه به فرض مرحله‌ی قبل و آوردن دلایلی مناسب، به یک تناقض با فرض آن قضیه یا مسأله و یا حقایق شناخته شده می‌رسیم.

نتیجه می‌گیریم:

حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

مثال: فرض و حکم ادعای زیر را مشخص کرده و آن را ثابت کنید.

از یک نقطه غیر واقع بر خط، نمی‌توان بیش از یک عمود بر آن رسم کرد.

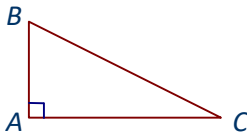
پاسخ

مثال: نشان دهید هر مثلث حداکثر یک زاویه‌ی باز دارد.

پاسخ

در هندسه، بررسی عکس (برعکس) قضیه‌ها هم انجام می‌شود و معمولاً مفید است بدانیم آیا عکس آن‌ها هم صحیح است؟

برای نمونه؛ در قضیه‌ی فیثاغورس می‌دانیم:



اگر $\hat{A} = 90^\circ$ باشد، آنگاه $BC^2 = AB^2 + AC^2$ است.

علاقه‌مندیم بدانیم:

در صورتی که در مثلث دلفواه ABC تساوی $BC^2 = AB^2 + AC^2$ برقرار باشد، آیا قطعاً $\hat{A} = 90^\circ$ است؟

(جهت اطلاع بدانید که این حکم درست است.)

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



بیان دقیق موضوع بالا و بررسی چند نمونه:

عکس قضیه‌ی شرطی:

برای نوشتن عکس یک گزاره یا قضیه‌ی شرطی، جای (نقش) فرض و حکم را عوض می‌کنیم.

یعنی:

اگر **مکم**، آنگاه **فرض**

توجه کنید:

عکس یک قضیه شرطی ممکن است یک قضیه نباشد، یعنی ممکن است ادعایی نادرست شود!

مثال: اولاً حکم زیر را به صورت شرطی نوشته و تعیین کنید درست است یا نادرست؟

در مثلث قائم‌الزاویه، وتر بزرگ‌ترین ضلع است.

ثانیاً: عکس این حکم به صورت شرطی نوشته و مشخص کنید درست یا نادرست است.

پاسخ

نوبت شماست . . .

پای تخته!

۷. عکس گزاره‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و توسط برهان خلف ثابت کنید:
در هر مثلث، زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از زاویه‌ی روبه‌رو به ضلع کوچک‌تر.



توجه ۱

فعالیت بالا، یک سؤال (نهایی - فرداد ۱۴۰۳) بوده است.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



قضیه‌هایی که عکس آن‌ها هم درست است، در ریاضیات اهمیت فراوانی دارند.

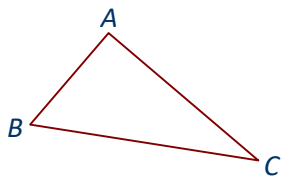
قضیه‌ی دوشرطی:

هر گاه عکس یک قضیه شرطی همواره درست باشد، آن قضیه را می‌توان به صورت دوشرطی بیان کرد:

فرض اگر و فقط اگر م

نمونه‌ها:

(۱) کمی پیش‌تر قضیه‌ای در مورد اندازه‌ی زاویه‌ها و ضلع‌های روبه‌روی آن‌ها در مثلث بیان کردیم و دیدیم که عکس آن هم درست است. بیان دو شرطی آن چنین است:

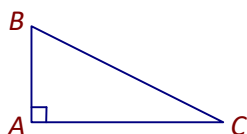


در مثلث ABC ، $AC > AB$ است اگر و فقط اگر $\hat{B} > \hat{C}$.

می‌توانید آن را به صورت نمادین بنویسید:

$$AC > AB \Leftrightarrow \hat{B} > \hat{C}$$

(۲) چون عکس قضیه‌ی فیثاغورس صحیح است، می‌توان آن را به صورت دو شرطی بیان کرد:



مثلث ABC قائم‌الزاویه است اگر و فقط اگر $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

یا به صورت نمادین:

$$\hat{A} = 90^\circ \Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$$

مثال: در یک مثلث، دو ضلع با هم برابرند اگر و تنها اگر ارتفاع‌های نظیر آن‌ها با هم برابر باشند.



در پایان این فصل، اثبات نادرست بودن احکام آورده شده که معمولاً کار نسبتاً ساده‌ای است.

مثال نقض:

اگر یک حکم نادرست باشد، کافی است یک مثال بیاوریم که نادرست بودن آن را نشان دهد. به چنین مثالی «**مثال**

نقض» گفته می‌شود.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



✨ **مثال:** برای موارد زیر مثال نقض آورده و آن‌ها را رد کنید.

الف) اگر $x^2 > 4$ باشد، در این صورت $x > 2$ است.

ب) نقطه‌ی هم‌رسی ارتفاع‌های مثلث همیشه درون آن قرار می‌گیرد.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

آیا گزاره‌ی زیر درست است؟ چرا؟

هر دو مثلث که مساحت‌های برابر داشته باشند، هم‌نهشت هستند.

پاسخ ✓

با دقت، نمونه‌ی بعد را پاسخ دهید:

پای تخته!

۸. برای حکم کلی زیر مثال نقض بیاورید:

هر چهارضلعی که دو ضلع موازی و دو ضلع برابر داشته باشد، متوازی الاضلاع است.



مطلب پایانی:

هرگاه در جستجوی مثال نقض برای رد یک حکم کلی موفق نشویم؛

نمی‌توانیم درستی حکم را نتیجه بگیریم.

زیرا ممکن است اطلاعات ما محدود باشد. بنابراین تایید حکم فقط از طریق استدلال استنتاجی قطعی خواهد بود.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ دهید (۳)



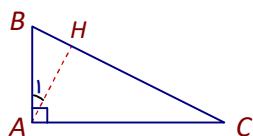
- ۱- مشخص کنید کدام مورد درست و کدام نادرست است. برای موارد نادرست مثال نقض بیاورید.
- هر مثلث متساوی الساقین یک مثلث متساوی الاضلاع است.
 - هر مثلث متساوی الاضلاع یک مثلث متساوی الساقین است.
 - هر لوزی یک متوازی الاضلاع است.
 - توان سوم هر عدد بزرگتر از توان دوم آن عدد است.
 - جذر یک عدد از خود آن عدد کوچکتر است.

۲- برای دو مجموعه A و B ، یا $A \subseteq B$ یا $B \subseteq A$ است. (درست □ - نادرست □)

۳- نقیض هر مورد را به صورت روان بنویسید:

- عدد a بزرگتر از عدد b است.
- عدد ۱۳ زوج است.
- تساوی $x - ۳ = ۵$ برقرار است.

۴- در شکل مقابل مثلث ABC قائم الزاویه و $\hat{C} \neq \hat{A}$ است.



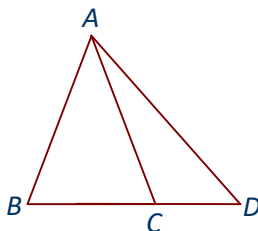
توسط برهان خلف نشان دهید AH نمی‌تواند ارتفاع مثلث باشد.

۵- ثابت کنید: اگر یکی از میانه‌های مثلث، نیمساز زاویه‌ی متناظر خود باشد، آن مثلث متساوی الساقین است.

۶- قضیه‌ی زیر را به صورت شرطی نوشته و سپس عکس آن را هم به صورت شرطی بنویسید. آیا این قضیه دوشرطی محسوب می‌شود؟ چرا؟

هر دو زاویه‌ی قائمه مکمل هستند.

۷- در شکل زیر $AB = AC$ است و نقطه‌ی D بیرون مثلث ABC قرار دارد. ثابت کنید: $AB < AD$.



۸- کدام مورد را می‌توان به صورت یک قضیه‌ی دوشرطی بیان کرد؟ در صورت امکان به صورت دوشرطی بنویسید:

- هر مثلث با دو ضلع برابر، دو زاویه‌ی برابر دارد.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



- هر مربع یک مستطیل است.
- نقطه‌ی هم‌رسی نیمسازها درون مثلث قرار دارد.

منتفب کتاب:

۱- گزاره‌های زیر را اثبات یا رد کنید:

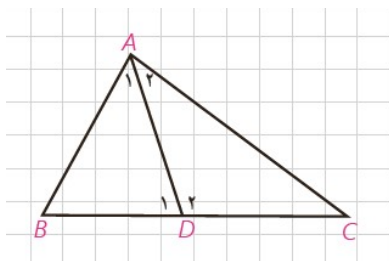
- الف) در هر مثلث، اندازه‌ی بزرگ‌ترین زاویه، از ۴ برابر اندازه‌ی کوچک‌ترین زاویه، کوچک‌تر است.
ب) در هر مثلث، هر ارتفاع از هر کدام از سه ضلع مثلث کوچک‌تر است.

۲- می‌دانیم از یک نقطه خارج از یک خط، فقط یک خط به موازات آن می‌توان رسم کرد. حال با برهان خلف ثابت کنید: خطی که یکی از دو خط موازی را قطع کند، دیگری را نیز قطع می‌کند.

۳- عکس هر یک از قضایای زیر را بنویسید و سپس آن‌ها را به صورت یک قضیه دو شرطی بیان کنید.

- الف) در هر مثلث، اگر دو ضلع برابر باشند، دو زاویه روبه‌رو به آن‌ها نیز برابرند.
ب) اگر یک چهار ضلعی لوزی باشد، قطرهایش عمود منصف یکدیگرند.
پ) اگر دو دایره شعاع‌های برابر داشته باشند، آنگاه مساحت‌های برابر نیز دارند.

۴- فرض کنیم ABC مثلثی دلخواه و AD نیمساز زاویه‌ی A باشد. دلایل هر یک از نتایج زیر را بنویسید و نتیجه‌ی نهایی را که در پایان آمده است، کامل کنید.



الف) $\hat{D}_1 > \hat{A}_1$ ، زیرا.....

ب) $\hat{D}_2 > \hat{A}_2$ ، زیرا.....

پ) $AC > DC$ ، زیرا.....

ت) با روندی مشابه سه قسمت قبل نشان دهید: $AB > BD$.

ث) حال نشان دهید: $AB + AC > BC$.

نتیجه:

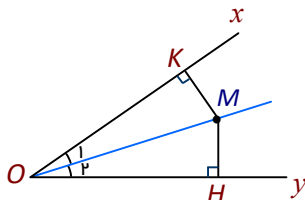
در هر مثلث، مجموع اندازه‌های هر دو ضلع از اندازه‌ی، است.



پاسخنامه

فعالیت‌های پای تخته فصل اول

۱- فرض کنید $MH = MK$ باشد.



در این صورت دو مثلث قائم الزاویه به حالت وتر و یک ضلع هم‌نهشت خواهند بود:

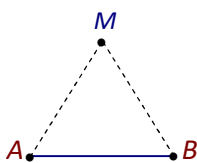
$$\left. \begin{array}{l} OM = OM \\ MH = MK \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \triangle OMH \cong \triangle OMK$$

از این هم‌نهشتی برابری اجزای نظیر نتیجه می‌شود؛ از جمله:

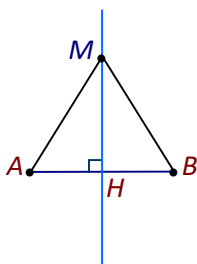
$$\hat{O}_1 = \hat{O}_2$$

یعنی: نقطه‌ی M روی نیمساز زاویه قرار دارد.

۲- فرض کنید بدانیم $MA = MB$ است.



از نقطه‌ی M خطی بر AB عمود می‌کنیم و می‌بینیم دو مثلث قائم‌الزاویه‌ی $\triangle MAH$ و $\triangle MBH$ هم‌نهشت هستند:

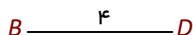


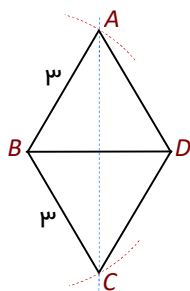
$$\left. \begin{array}{l} MH = MH \\ MA = MB \end{array} \right\} \xrightarrow{\text{(وض)}} \triangle MAH \cong \triangle MBH$$

بنابراین تمام اجزای نظیر در دو مثلث با هم برابر هستند؛ از جمله $AH = HB$ است و بنابراین خط گذرا از M و H عمود منصف بوده و M روی آن قرار دارد.

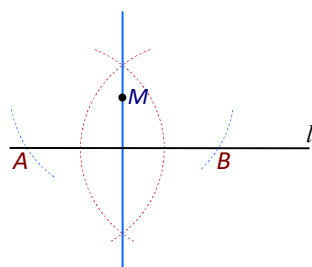
۳- با توجه به این خاصیت که «قطرهای لوزی عمود منصف یکدیگر هستند»، ترسیم را انجام می‌دهیم:

• پاره‌خط BD را به طول ۴ سانتی‌متر در نظر بگیرید.





• M



• طبق روش جزوه، عمود منصف این پاره‌خط را توسط پرگار و خط‌کش رسم می‌کنیم.

• چون طول اضلاع لوزی ۳ سانتی‌متر است، به مرکز B و شعاع ۳ کمان‌هایی می‌زنیم تا عمود منصف را در نقاط A و C قطع کند.
در پایان نقاط را با خط‌کش به هم وصل کرده تا لوزی رسم شود.

۴- فرض کنید نقطه‌ی M خارج خط l داده شده است.

گام ۱: به مرکز M و شعاعی بیشتر از فاصله‌ی نقطه تا خط، کمانی می‌زنیم تا خط را در دو نقطه‌ی A و B قطع کند.

گام ۲: اکنون کافی است عمود منصف AB رسم شود.

توجه کنید: چون A و B روی دایره به مرکز M قرار دارند،

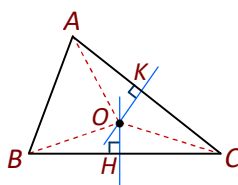
$MA = MB$ است و در نتیجه طبق خاصیت اصلی عمود منصف، نقطه‌ی

M روی این عمود منصف قرار دارد.

پس: عمود منصف رسم شده همان خط مورد نظر است که از M

گذشته و بر خط عمود شده است.

۵- مثلث دلخواه ABC را در نظر گرفته، عمود منصف‌های دو ضلع AC و BC را رسم کرده، نقطه‌ی تقاطع آن‌ها را O می‌نامیم و این نقطه را به سه رأس مثلث وصل می‌کنیم:



اکنون توجه کنید:

• چون O روی عمود منصف AC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OA = OC$$

• به صورت مشابه، چون O روی عمود منصف BC قرار دارد، طبق خاصیت عمود منصف داریم:

$$OB = OC$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که: $OA = OB$. یعنی فاصله‌ی O تا دو سر پاره‌خط AB به یک اندازه است و بنابراین:

نقطه‌ی O روی عمود منصف AB نیز قرار داشته و سه عمود منصف در نقطه‌ی O هم‌رس هستند.



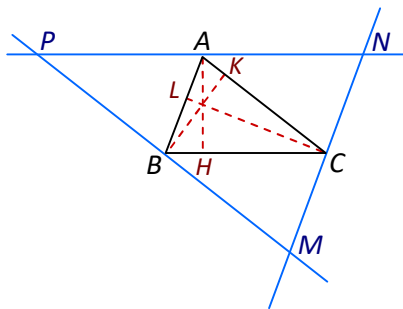
۶- به هر یک از گام‌ها توجه کنید:

گام ۱:

مثلث ABC و سه ارتفاع آن را رسم می‌کنیم.

گام ۲:

از هر رأس مثلث، خطی موازی ضلع روبه‌رو رسم کرده تا مثلث MNP ایجاد شود.



گام ۳:

بسیار ساده: چون PN با BC موازی است و AH بر BC عمود است، پس AH بر PN نیز عمود خواهد بود. با استدلال مشابه، BK بر PM و CL بر MN عمود هستند.

گام ۴:

بسیار ساده: چون BA موازی و AN موازی هستند، چهار ضلعی‌های $ABCN$ متوازی الاضلاع است. پس طبق خواص متوازی الاضلاع (جزوه شماره صفر) ضلع‌های روبه‌رو برابرند:

$$BC = AN$$

با استدلال مشابه چهارضلعی $ACBP$ متوازی الاضلاع است و در نتیجه:

$$BC = AP$$

با مقایسه‌ی دو تساوی اخیر نتیجه می‌گیریم که $AN = AP$ است. به صورت کاملاً مشابه، تساوی‌های $BM = BP$ و $CM = CN$ نیز درست هستند.

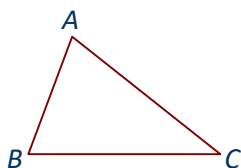
گام ۵:

از گام‌های ۳ و ۴، AH هم بر PN عمود است و هم آن را نصف کرده است و لذا AH عمود منصف PN است. به صورت مشابه، BK عمود منصف PM و CL عمود منصف MN است. یعنی: ارتفاع‌های مثلث ABC همان عمود منصف‌های مثلث MNP هستند و چون عمود منصف‌ها هم‌مرس‌اند، پس ارتفاع‌های مثلث ABC هم‌مرس هستند.

۷- بیان ساده‌ی عکس حکم چنین است:

در یک مثلث، ضلع رو به زاویه‌ی بزرگ‌تر، بزرگ‌تر است از ضلع رو به زاویه‌ی کوچک‌تر. به صورت شرطی و با استفاده از شکل:

اگر در مثلث ABC مقابل $\hat{B} > \hat{C}$ باشد، آنگاه $AC > AB$ است.

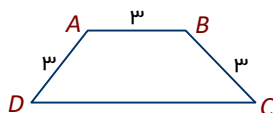


**پرهان خلف:**

حکم $AC > AB$ را نادرست در نظر می‌گیریم، بنابراین دو حالت می‌تواند رخ دهد:
 $AC = AB$ و $AC < AB$ که نشان می‌دهیم هیچ کدام ممکن نیستند:

- **حالت ۱:** اگر $AC = AB$ باشد، مثلث ABC متساوی الساقین بوده و در نتیجه طبق خواص این نوع مثلث $\hat{B} = \hat{C}$ است. این مطلب با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.
- **حالت ۲:** اگر $AC < AB$ باشد، طبق مثال در درس باید زاویه‌ی روبه‌رو به AB از زاویه‌ی روبه‌رو به AC بزرگ‌تر باشد، یعنی: $\hat{C} > \hat{B}$. این مطلب نیز با فرض تناقض دارد و رد می‌شود.
 پس در هر صورت فرض خلف باطل و حکم اثبات می‌شود.

۸- کافی است یک دوزنقه‌ی متساوی الساقین در نظر بگیرید که اندازه‌ی ساق‌ها برابر قاعده‌ی کوچک باشد:



در این چهارضلعی $AD = BC$ و $AB \parallel DC$ است، ولی این شکل متوازی الاضلاع نیست.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴