ترکیب: دانش شما + محتوای بی‌نظیر تدریس ما

درسنامه آپدیت

تمرین و پاسخنامه

کوییز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»



تدریس ریاضیات

ارائه‌ای از:

دکتر علیرضا نورالدینی

و تیم گروه آموزشی درس‌آموز

(دانش‌آموختگان دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

پیشنهاد ویژه:

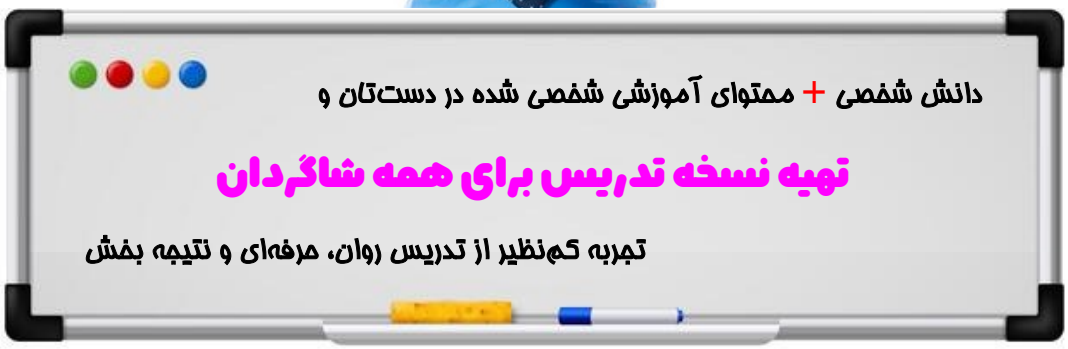


«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(حذف هزینه چاپ۱)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

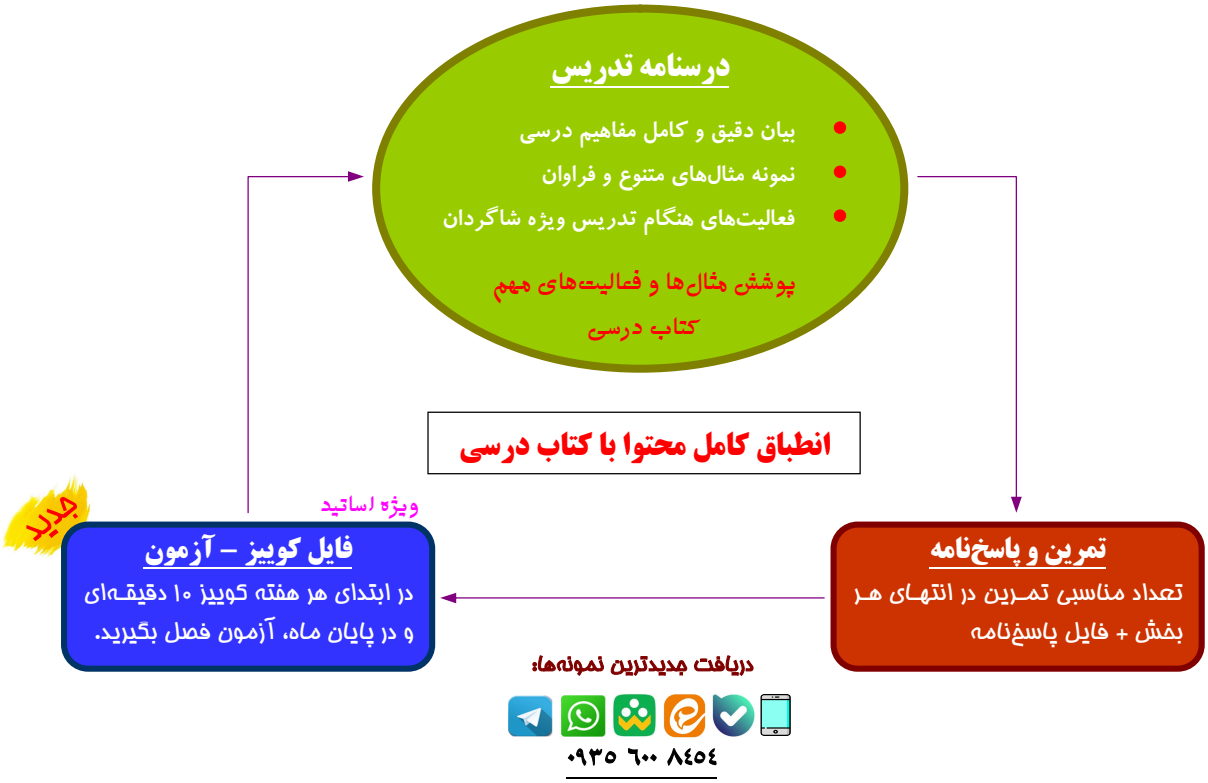
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

چند نمونه از نتایج درخشان برخی از همکاران مجموعه درس‌آموز: (خرداد و تابستان ۱۴۰۴)

- **از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)**
- **از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ‌کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)**
- **از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)**
- **کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)**

محتوای تشریحی و نهایی



(خدمات منحصر به‌فرد گروه درس‌آموز)

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و . . . روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.

فهرست

۱

دایــره (۱) ۲

معرفی دایره و مفاهیم مقدماتی مربوط به آن، انواع زوایا و کمان ها در دایره و بررسی خواص آن‌ها

۲

دایــره (۲) ۲۱

بیان و بررسی چند رابطه طولی در دایره، بررسی چند ضلعی محاطی و برخی خواص آن، بررسی چند ضلعی محیطی و برخی خواص آن

۳

تبدیلات هندسی ۴۸

مفاهیم مربوطه و معرفی تبدیل هندسی، بررسی کامل تبدیلات: بازتاب، انتقال، دوران و تجانس

۴

کاربرد تبدیلات ۷۶

کاربردهایی ساده از بازتاب، کاربردهایی مهم از تبدیلات و بررسی چند حالت در مسأله کوتاه‌ترین مسیر

۵

روابط طولی در مثلث ۹۰

بررسی چند رابطه طولی: قضیه سینوس-ها، قضیه کسینوس‌ها، روابط طولی نیمساز، دستورات هِرون

آموزش:

هندسه یازدهم

۱

دایره (۱)

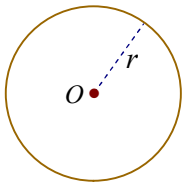
فهرست	صفحه
▪ مفاهیم پایه	۳
▪ زوایا و کمان‌ها	۸

۱ مفاهیم پایه

یادآوری یک شکل هندسی مهم:

دایره:

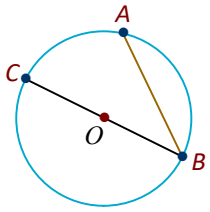
برای نقطه‌ی O و عدد مثبت r، مجموعه‌ی تمام نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها تا O برابر r باشد، دایره‌ی به مرکز O و شعاع r است. چنین دایره‌ای را با $C(O,r)$ نشان خواهیم داد.



دایره $C(O,r)$

چند مفهوم ساده‌ی مرتبط با دایره:

- هر پاره‌خط که مرکز را به نقاط دایره وصل کند، یک شعاع است؛ پس دایره بی‌شمار شعاع دارد که همگی برابر هستند. (مانند شعاع‌های OB و OC در شکل زیر)
- برای نقاط دلخواه A، B و C روی دایره؛



- ❖ پاره‌خط AB یک وتر در دایره نام دارد.
- ❖ وتری که از مرکز دایره عبور کند، بزرگ‌ترین اندازه‌ی ممکن را داشته، یک قطر دایره است. (مانند قطر BC)
- ❖ بخشی از دایره که بین نقاط A و B واقع شده است، کمان $\overset{\frown}{AB}$ نامیده می‌شود.

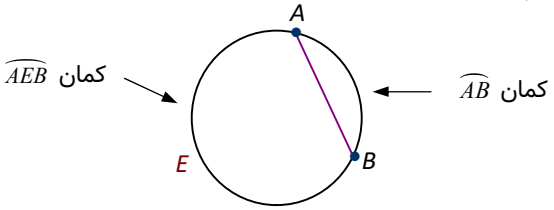
توجه کنید:

چنان‌که در شکل زیر هم می‌بینید، نقاط A و B دایره را به دو کمان تقسیم می‌کنند.

۱) هر وقت منظور کمان کوچک‌تر باشد، به سادگی آن را با نماد $\overset{\frown}{AB}$ مورد اشاره قرار می‌دهیم.

۲) اگر منظورمان کمان بزرگ‌تر باشد، معمولاً از یک نقطه‌ی کمکی برای نام‌گذاری استفاده می‌کنیم.

مانند کمان $\overset{\frown}{AEB}$ در شکل زیر:



توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

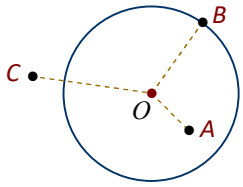
مثال: الف) از دو نقطه‌ی ثابت A و B چند دایره عبور می‌کند؟

ب) از سه نقطه‌ی ثابت A، B و C چند دایره عبور می‌کند؟

پاسخ

وضعیت نقطه و دایره:

چنان‌که در شکل مقابل هم دیده می‌شود، وضعیت نسبی یک نقطه نسبت به یک دایره، بستگی به فاصله‌ی آن تا مرکز دایره دارد:



- اگر $OA < r$ باشد، نقطه‌ی A داخل دایره قرار دارد.
- اگر $OB = r$ باشد، نقطه‌ی B روی دایره قرار دارد.
- اگر $OC > r$ باشد، نقطه‌ی C بیرون دایره قرار دارد.

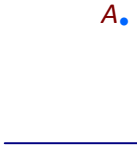
مثال: نقطه‌ی M خارج دایره‌ای به قطر ۸ قرار داشته و بیشترین فاصله‌ی آن تا نقاط دایره برابر ۱۱ است. کمترین فاصله‌ی M تا نقاط دایره را حساب کنید.

پاسخ

در ادامه، وضعیت نسبی یک خط نسبت به دایره را بررسی خواهیم کرد؛ برای این کار، به یک مفهوم و خاصیت مربوط به آن نیاز داریم. ببینید:

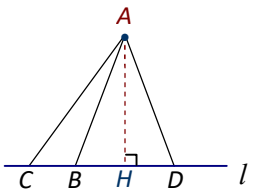
فاصله نقطه از خط:

یک خط l و نقطه‌ای مانند A خارج آن در نظر بگیرید:



توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

از نقطه‌ی A بی‌شمار پاره‌خط می‌توان به خط l وصل کرد که می‌دانیم فقط یکی از آن‌ها بر این خط عمود خواهد شد: (چرا؟!)



در مورد این شکل به دو مطلب توجه کنید:

- اولاً: طول پاره‌خط عمود از طول تمام پاره خط‌های دیگر کوچک‌تر است:

$AH < AB$ و $AH < AC$ و . . .

زیرا:

سایر پاره خط‌ها نقش وتر در یک مثلث قائم‌الزاویه را دارند که AH یکی از اضلاع قائمه در آن مثلث است.

- ثانیاً: طول AH را فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط l تعریف می‌کنیم. بنابراین:

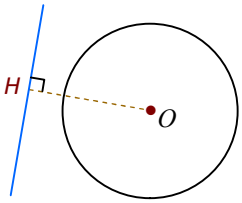
> فاصله‌ی یک نقطه تا خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه تا نقاط روی خط است.

اکنون سه حالت وضعیت نسبی خط و دایره به شعاع r را بر حسب فاصله‌ی مرکز تا خط، بیان می‌کنیم.

❖ حالت (۱):

جدا از هم: ممکن است خط و دایره نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند.

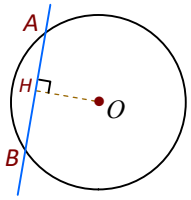
شرط: اگر $OH > r$ باشد، خط و دایره جدا از هم خواهند بود:



❖ حالت (۲):

متقاطع: ممکن است خط و دایره در دو نقطه مشترک باشند.

شرط: اگر $OH < r$ باشد، دقیقاً در دو نقطه متقاطع هستند:



توجه کنید:

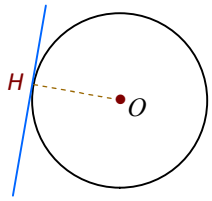
در این حالت، دایره از خط یک پاره‌خط جدا می‌کند، (وتر AB). بعلاوه، عمود OH، عمود منصف این وتر هم است. (بیان دقیق‌تر و اثبات، کمی پیش‌تر.)

آخرین حالت اهمیت ویژه‌ای دارد:

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

❖ **حالت (۳):**

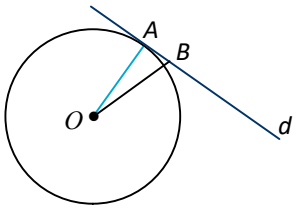
مماس: ممکن است خط و دایره دقیقاً در یک نقطه مشترک باشند.



توجه کنید:

شرط مماس بودن خط و دایره را در ادامه بیان و بررسی می‌کنیم.

مثال: فرض کنید خط d تنها در یک نقطه‌ی A با دایره مشترک، یعنی بر آن مماس باشد:



اکنون؛

اگر B نقطه‌ی دلخواهی غیر از A روی خط باشد. چون B بیرون دایره است، بنابراین $OA < OB$ خواهد بود.

یعنی:

A کمترین فاصله‌ی نقاط خط تا نقطه‌ی O را داشته و بنابراین $OA \perp d$ است.

برعکس؛

فرض کنید خط d بر شعاع OA از دایره عمود باشد. در این صورت، برای هر نقطه‌ی دلخواه دیگری چون B روی خط، خواهیم داشت: $OB > OA = r$ و بنابراین B بیرون دایره است. پس خط و دایره در یک نقطه مشترک بوده و مماس هستند.

نتیجه:

در مورد خط و دایره در صفحه می‌توان گفت:

خط و دایره در یک نقطه بر هم مماس هستند اگر و فقط اگر خط بر شعاع متصل به آن نقطه عمود باشد.

مثال: فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره تا یک نقطه‌ی A برابر ۹ و طول مماس رسم شده از این نقطه بر دایره برابر ۱۵ است. شعاع دایره را بیابید.

پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ دهید (۱)

۱- نقطه‌ی M خارج یک دایره قرار داشته و بیشترین و کمترین فاصله‌ی آن تا نقاط دایره به ترتیب ۱۰ و ۵ است. شعاع دایره را حساب کنید.

۲- فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی خط d تا دایره‌ی $C(O,۲x+۱)$ برابر $۷-۲x$ است. اگر خط و دایره نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند، حدود x را تعیین کنید.

۳- فرض کنید A نقطه‌ای روی دایره باشد. روش رسم خط مماس بر دایره در این نقطه را بیان کنید.

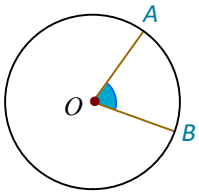
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲ زوایا و کمان‌ها

انواعی از زوایا مرتبط با یک دایره و کمان‌های آن را می‌توان در نظر گرفت. در این بخش، چند نوع مهم از آن‌ها بررسی می‌شود. اولین مورد:

زاویه مرکزی:

زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره قرار داشته باشد:



$\hat{O}$ یک زاویه‌ی مرکزی است.

بعلاوه:

اندازه‌ی کمان روبه‌روی یک زاویه‌ی مرکزی را برابر آن زاویه (با واحد درجه) در نظر می‌گیریم. پس اگر در شکل بالا، $\hat{O} = ۷۰^\circ$ باشد، در این صورت $\overset{\frown}{AB} = ۷۰^\circ$ خواهد بود.

مثال: نشان دهید اگر یک وتر برابر شعاع دایره باشد، اندازه‌ی کمان مربوط به آن ۶۰° است.

پاسخ

توجه کنید:

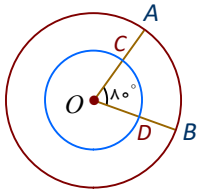
۱) در مورد یک کمان دایره، دو مفهوم «طول» و «اندازه»، مفاهیمی متفاوت هستند.

برای نمونه؛

در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ هر دو برابر $\hat{O}$ است:

$$\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD} = ۸۰^\circ$$

ولی طول‌های این دو کمان، با توجه به بزرگی و کوچکی دایره‌ها، برابر نیستند.



۲) اندازه‌ی کمان دور تا دور هر دایره ۳۶۰° و طول آن برابر محیط دایره ($P = ۲\pi r$) است. بنابراین تناسب زیر بین اندازه و طول هر کمان وجود دارد:

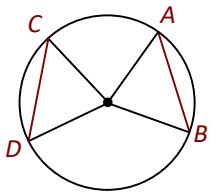
$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}} = \frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}$$

۳) با توجه به مورد قبل، به آسانی دیده می‌شود که در یک دایره، برابری اندازه‌های دو کمان، معادل برابری طول آن‌ها است.

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

بنابراین:

تساوی $\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$ در یک دایره، به هر یک از دو معنای «برابری اندازه‌ها» یا «برابری طول» کمان‌ها، صحیح است.



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴

در هر دایره، طول یک کمان، برابر با اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی مقابل به آن است. (**درست** ☐ - **نادرست** ☐)

جواب:

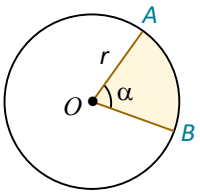
مثال: در یک دایره، طول کمان EF برابر ۸ و اندازه‌ی این کمان ۱۲۰° است. اندازه‌ی قطر دایره را بیابید.

پاسخ

مفهوم زیر و اطلاعات ساده‌ای از آن را در ذهن داشته باشید.

قطاع دایره:

قطعه‌ی OAB در زیر، بُرشی از دایره است که توسط دو شعاع OA و OB ایجاد شده؛ آن را یک «**قِطاع**» گوئیم.



در واقع:

هر قطاع به دو شعاع و یک کمان از دایره محدود (محصور) است.

بعلاوه؛

محیط و مساحت قطاع دارای زاویه‌ی α درجه، در دایره به شعاع r را می‌توان با نوشتن تناسب بین آن و کل دایره تعیین کرد. اگر طول کمان $\overset{\frown}{AB}$ را l بگیریم:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰}=\frac{l}{۲\pi r} \rightarrow l=\frac{\alpha}{۳۶۰}\times ۲\pi r \Rightarrow l=\frac{\pi r\alpha}{۱۸۰}$$

پس:

محیط قطاع فوق برابر $r+r+l=۲r+\frac{\pi r\alpha}{۱۸۰}$ است. مساحت هم به صورت مشابه قابل محاسبه است:

$$\frac{\alpha}{۳۶۰}=\frac{S}{\pi r^۲} \Rightarrow S=\frac{\pi r^۲\alpha}{۳۶۰}$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

برخی خواص وترهای دایره را می‌توان با استفاده از زوایای مرکزی بیان و بررسی کرد.

مثال: دو کمان با اندازه‌های برابر در دایره در نظر بگیرید. نشان دهید وترهای متناظر نیز برابرند.

پاسخ

توجه کنید:

عکس ادعای مثال قبل هم به راحتی نشان داده می‌شود: ($\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD} \Rightarrow AB=CD$). بنابراین می‌توان نوشت:

$$AB=CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}$$

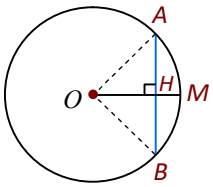
به بیان دیگر:

در هر دایره: «دو وتر برابرند اگر و فقط اگر اندازه‌های کمان‌های متناظر آن‌ها برابر باشند.»

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در شکل زیر، شعاع OM بر وتر AB عمود شده است. نشان دهید:

OM وتر AB و همچنین کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نصف کرده است.



پاسخ

توجه کنید: (مهم)

عکس ادعاهای مثال قبل هم به صورت زیر درست است:

۱) اگر شعاع OM وتر AB را نصف کند، بر این وتر عمود هم هست و کمان $\overset{\frown}{AB}$ را هم نصف می‌کند.

دلیل:

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲) اگر شعاع OM کمان $\overset{\frown}{AB}$ را نصف کند، وتر مربوطه، یعنی AB را هم نصف کرده و بر آن عمود خواهد شد.

دلیل:

نتیجه:

در تمام حالت‌های بالا، شعاع OM نیمساز زاویه‌ی مرکزی $A\hat{O}B$ نیز هست.

مثال: در دایره‌ی $C(O,۵)$، طول وتر EF برابر $\sqrt{۵۰}$ است. طول کمان EF را حساب کنید.

پاسخ

مثال: با استفاده از آن‌چه تاکنون دیده‌ایم، نشان دهید در هر دایره:

الف) اگر طول‌های دو وتر برابر باشند، فاصله‌ی مرکز دایره تا آن‌ها برابر است.

ب) عکس قسمت قبل را نوشته و درستی آن را نشان دهید.

پ) گزاره‌ی دو شرطی متناظر با دو قسمت قبل را بیان کنید.

پاسخ

توجه کنید:

وقتی طول‌های دو وتر برابر نباشد، فاصله مرکز دایره تا آن‌ها نیز یکسان نخواهد شد. جزئیات دقیق را در تمرینات انتهای این بخش خواهیم دید.

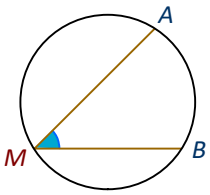
نوع دیگری از زوایا در دایره:

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

زاویه محاطی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار داشته و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند.

در شکل مقابل:



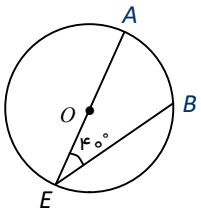
$A\hat{M}B$ یک زاویه‌ی محاطی است.

ضمناً:

(در شکل بالا، کمان $\overset{\frown}{AB}$ «کمان روبه‌روی این زاویه‌ی محاطی» محسوب می‌شود.)

بررسی ارتباط بین اندازه‌های زاویه‌ی محاطی و کمان روبه‌رو:

مثال: در شکل زیر، اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{AB}$ را بیابید.



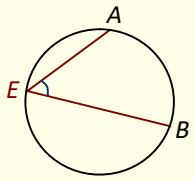
پاسخ

بیان کلی خاصیت مشاهده شده در مثال قبل:

قضیه:

اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌رو به آن است.

یعنی در شکل مقابل:



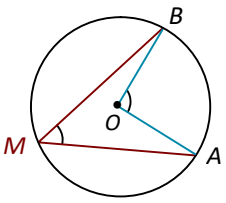
$$\hat{E} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

برهان

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

نتیجه‌ی فوری:

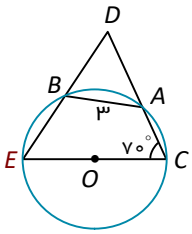
اگر یک زاویه‌ی محاطی و یک زاویه‌ی مرکزی، هر دو رو به یک کمان باشند، زاویه‌ی مرکزی دو برابر زاویه‌ی محاطی است:



$$\hat{O} = ۲\hat{M}$$

دلیل:

مثال: در شکل روبه‌رو، شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{E}$ را حساب کنید.

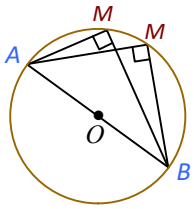


پاسخ

برخی نتایج:

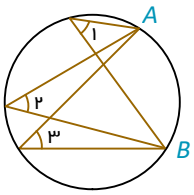
طبق نکته‌ی قبل چند مورد زیر برقرار هستند:

- زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر همیشه قائمه است:



$$\hat{M} = = \frac{۱۸۰}{۲} = ۹۰^\circ$$

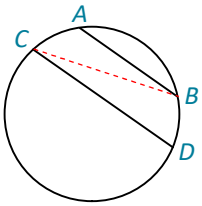
- تمام زوایای محاطی رو به یک کمان مشترک، با هم برابر هستند:



$$\hat{۱} = \hat{۲} = \hat{۳} = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

کاربرد دیگری از زوایای محاطی:

مثال: اگر دو وتر در دایره موازی باشند، کمان‌های محصور بین آن‌ها برابرند:



$$AB \,||\, CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC} = \overset{\frown}{BD}$$

دلیل:

اگر وتر BC را رسم کنید، داریم:

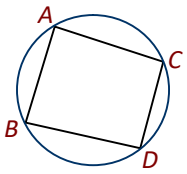
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

$$AB||CD \Rightarrow \hat{C}=\hat{B} \rightarrow \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{BD}=\frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$$

واضح است که عکس نتیجه گیری‌های بالا هم برقرار است. بنابراین:

$$AB||CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

مثال: در شکل زیر، وترهای AB و CD موازی هستند. اگر $\overset{\frown}{AC}=۸۰^\circ$ و تفاضل اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ برابر ۱۰۰° باشد، اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{CD}$ را بیابید.



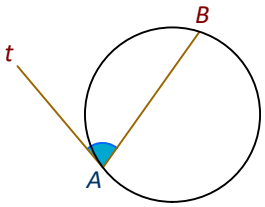
پاسخ

نوع سوم از زوایا در دایره:

زاویه ظلّی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار داشته، یک ضلع آن وتر و ضلع دیگر آن بر دایره مماس باشد:

در شکل مقابل:



$B\hat{A}t$ یک زاویه‌ی ظلی است.

و:

کمان $\overset{\frown}{AB}$ «کمان روبه‌روی این زاویه‌ی ظلی» محسوب می‌شود.

اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی، مشابه اندازه‌ی زوایایی محاطی محاسبه می‌شود.

قضیه:

اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر نصف اندازه‌ی کمان روبه‌رو به آن است.

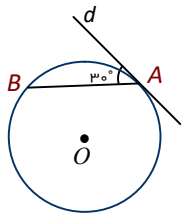
یعنی در شکل قبل:

$$B\hat{A}t=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

برهان

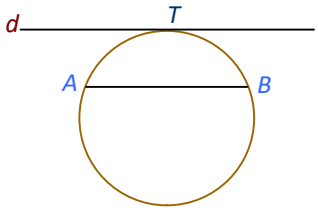
مثال: در شکل مقابل، خط d بر دایره مماس بوده و $AB = ۵$ است. شعاع دایره را حساب کنید.



پاسخ

نتیجه:

اگر خطی مماس بر دایره، موازی یک وتر باشد، دو کمان محصور بین خط و وتر برابرند و برعکس:



$$AB \parallel d \Leftrightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TB}$$

دلیل:

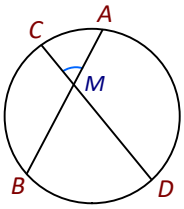
اگر وتر AT را رسم کنید، می‌توان دید:

$$AB \parallel d \Leftrightarrow \hat{A} = \hat{T} \Leftrightarrow \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{TB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT} \Leftrightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TB}$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

در ادامه، دو حالت در محاسبه‌ی اندازه زوایای حاصل از برخورد وترهای دایره بررسی می‌گردد.

مثال: (حالت ۱)

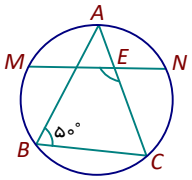


در شکل مقابل، دو وتر یکدیگر را داخل دایره قطع کرده‌اند. نشان دهید زاویه‌ی بین آن دو، برابر میانگین اندازه‌های کمان روبه‌رو به آن و کمان رو به زاویه‌ی متقابل بـه رأس با آن است. یعنی:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

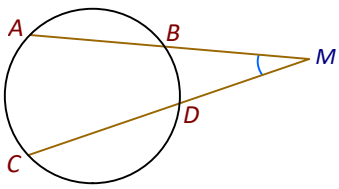
پاسخ

مثال: در شکل زیر، A وسط کمان MN است. اندازه‌ی $M\hat{E}C$ چند درجه است؟



پاسخ

مثال: (حالت ۲)



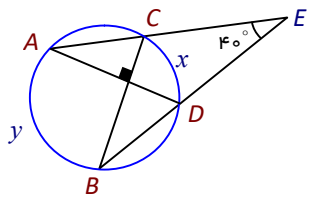
در شکل مقابل، امتدادهای دو وتر یکدیگر را خارج دایره قطع کرده‌انـد. نـشان دهید زاویه‌ی بین آن دو، برابر نصف اختلاف کمان‌های روبه‌رو به آن است. یعنی:

$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

پاسخ

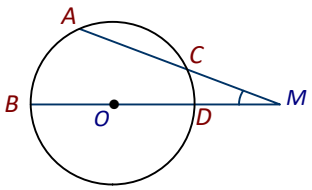
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

مثال: در شکل مقابل مقادیر x و y را حساب کنید.



پاسخ

مثال: طبق شکل زیر، در دایره‌ی $C(O,۳)$ امتدادهای وتر AC و قطر BD در نقطه‌ی M متقاطع هستند. اگر $\hat{M}=۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC}=۸۰^\circ$ باشد، طول کمان AB را حساب کنید.



پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ دهید (۲)

۱- جاهای خالی را با کلمات مناسب کامل کنید.

الف) ناحیه‌ای از درون و روی دایره که به دو شعاع و آن دایره محدود است را . . . . . می‌نامیم.

ب) اندازه هر زاویه ظلی برابر است با . . . . . اندازه کمان روبه‌رو به آن زاویه. **(نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)**

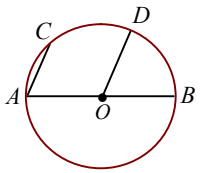
پ) اگر زاویه مرکزی قطاعی از دایره $C(O,R)$ بر حسب درجه α باشد، مساحت قطاع برابر . . . . . است.

۲- اگر نقاط وسط وتر AB و کمان $\overset{\frown}{AB}$ را داشته باشیم، چگونه می‌توانیم قطر عمود بر این وتر را رسم کنیم؟

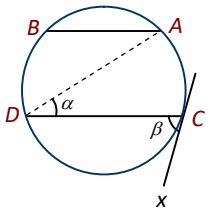
۳- در دایره‌ی $C(O,r)$، $AB=۲۰$ و $\overset{\frown}{AB}=۶۰^\circ$ است. فاصله‌ی O را از وتر AB بیابید.

۴- دو دایره‌ی هم مرکز $C(O,۱۷)$ و $C'(O,۱۰)$ داده شده‌اند. یک خط قاطع در دایره‌ی C' وتری به طول ۱۲ ایجاد کرده است. دایره‌ی C از این خط وتر را جدا کرده؛ طول این وتر را حساب کنید.

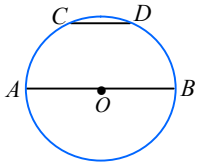
۵- در شکل زیر AB یک قطر دایره است، $CA||OD$ و $\overset{\frown}{AC}=۵۰^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{O}B$ را حساب کنید.



۶- در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره، $AB||CD$، زاویه‌ی $\beta=۲\alpha$ و Cx مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟

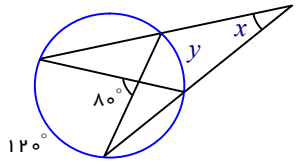


۷- در دایره‌ی $C(O,۴)$ زیر، $AB||CD$ و $\overset{\frown}{CD}=۴۵^\circ$ است. طول کمان DB را حساب کنید.

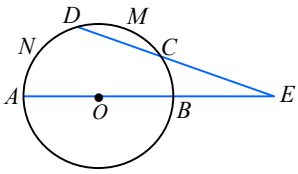


توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۸- با توجه به شکل، مقدار x را محاسبه کنید. **(نهایی؛ خرداد ۱۴۰۴)**

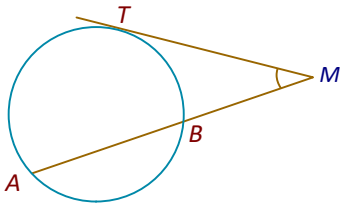


۹- در شکل زیر O مرکز دایره، کمان $DMC = ۳۰^\circ$ و $\hat{E} = ۳۰^\circ$. اندازه‌ی کمان AND را بیابید.



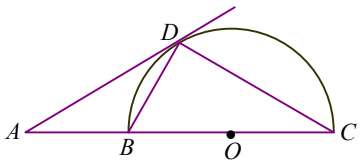
۱۰- با تکنیکی مشابه آن‌چه برای اثبات اندازه‌ی زوایای محاطی و ظلی به‌کار گرفتیم، نشان دهید:

اگر امتداد یک وتر، خطی مماس بر دایره را قطع کند، زاویه‌ی حاصل از برخوردشان برابر است با:

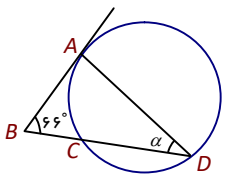


$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AT} - \overset{\frown}{BT}}{۲}$$

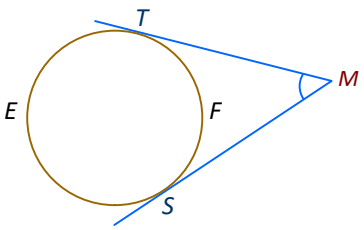
۱۱- در شکل زیر، AD بر نیم‌دایره مماس است و $AB = BD$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{C}B$ چند درجه است؟



۱۲- در شکل زیر، AB بر دایره مماس بوده و $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AC}$ است. مقدار α را حساب کنید.



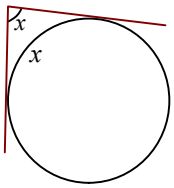
۱۳- نشان دهید اگر دو خط مماس بر دایره، یکدیگر را قطع کنند، زاویه‌ی حاصل از برخوردشان برابر است با:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{TES} - \overset{\frown}{TFS}}{۲}$$

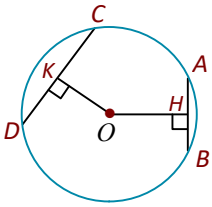
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۱۴- در شکل زیر، مقدار x (بر حسب درجه) را حساب کنید.



۱۵- خاصیت زیر از وترهای نابرابر در دایره‌ها را نشان دهید:

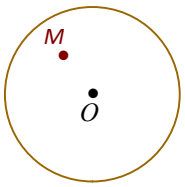
اگر دو وتر نابرابر باشند، وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس:



$$AB < CD \Leftrightarrow OH > OK$$

۱۶- نقطه‌ی دلخواه M داخل یک دایره در نظر بگیرید.

الف) بزرگ‌ترین وتر گذرا از M چیست؟



ب) با توجه به تمرین قبل، نشان دهید:

کوچک‌ترین وتر گذرنده از M، وتری است که بر قطر گذرا از M عمود است.

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴