

ترکیب: دانش شما + ممتوای بی نظیر تدریس ما

تمرین و پاسفنامه

درسنامه آپدیت

کوئیز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»





«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(مذف هزینه چاپ)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

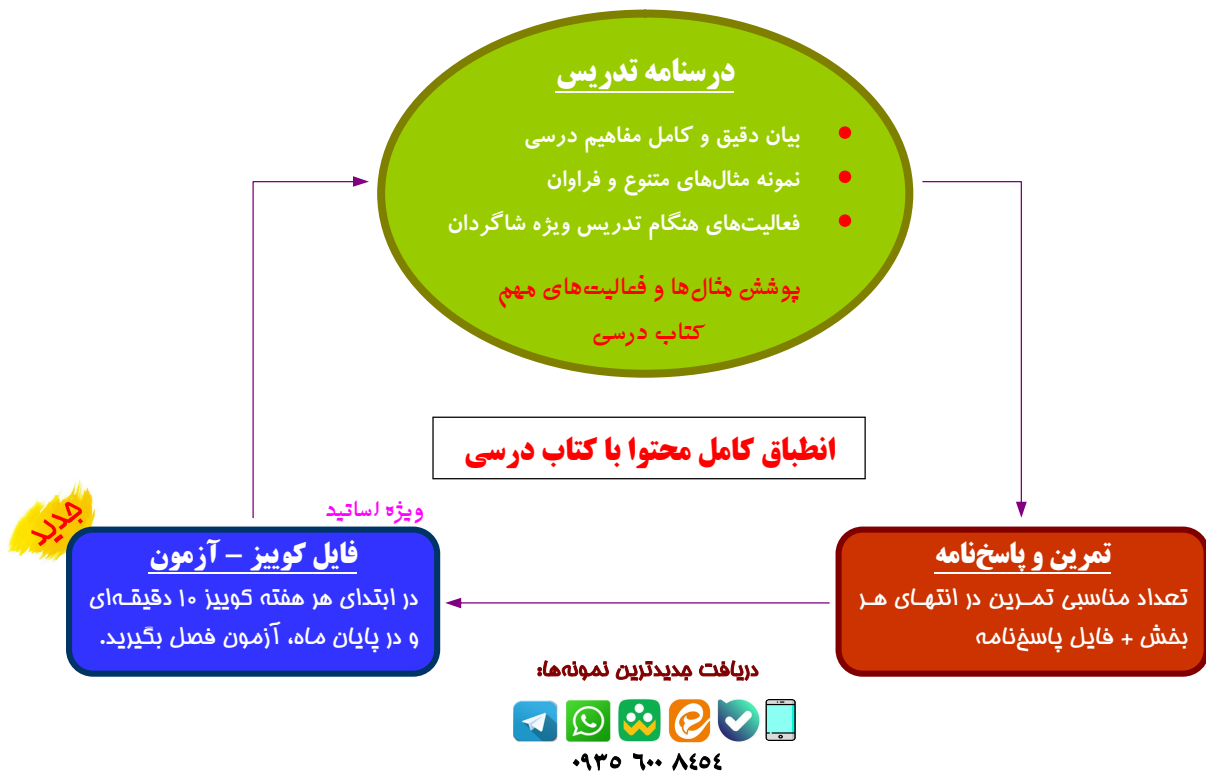
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

پلد نمونه از نتایج درفشان برخی از همکاران مجموعه درس آموزه: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

محتوای تشریحی و نهایی

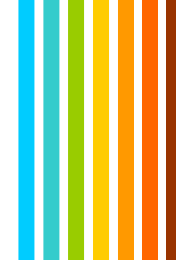


(خدمات منحصر به فرد گروه درس آموز)

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و ... روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.



۱

جبر و معادله

۲

مجموع جملات دنباله حسابی و هندسی، معادله درجه دوم، نمودار تابع درجه دو، معادلات گویا و اصم، قدر مطلق، هندسه-ی تحلیلی در صفحه

۳

تابع نمایی و لگاریتم

۸۸

تابع نمایی، لگاریتم و تابع لگاریتمی، خواص لگاریتم و حل معادلات لگاریتمی، کاربرد لگاریتم

۲

تابع

۵۳

مقدمات توابع، انواعی از تابع، توابع یک به یک و وارون‌پذیری توابع، جبر و ترکیب توابع

۵

مد و پیوستگی

۱۴۰

فرآیند میل کردن، محاسبه حد تابع، حدهای مبهم، پیوستگی توابع

۴

مثلثات

۱۱۳

واحدهای زاویه، روابط مثلثاتی، توابع مثلثاتی، بسط مثلثاتی مجموع و تفاضل دو زاویه





جبر و معادله

صفحه	فهرست
۳	مجموع عملات دنباله
۱۲	معادله‌ی درجه دوم
۲۱	نمودار تابع درجه دوم
۲۸	معادلات گویا و اصم
۳۴	قدر مطلق و خواص آن
۴۳	هندسه تملیلی



مجموع جملات دنباله

در این بخش، ابتدا دنباله‌های حسابی و هندسی را یادآوری کرده و سپس روش جمع تعداد مشخصی از جملات آن‌ها را خواهیم آورد. در دنباله‌ی مقابل:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

اگر تفاضل هر جمله از جمله‌ی بعد، یعنی:

$$a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots$$

همواره مقداری ثابت مانند d باشد، به آن «دنباله‌ی حسابی» یا دنباله‌ی عددی گفته و به عدد d «قدر نسبت» دنباله گفته می‌شود. برای نمونه:

$$-3, 2, 7, 12, \dots \Rightarrow \begin{cases} a_1 = -3 \\ d = 5 \end{cases}$$

بعلاوه:

در چنین دنباله‌ای:

■ جملات دنباله بر حسب جمله‌ی اول a (همان a_1) و قدر نسبت d قابل بیان هستند:

$$a, a+d, a+2d, \dots$$

در نتیجه:

جمله‌ی n ام (یا: جمله‌ی عمومی) دنباله‌ی حسابی بر حسب جمله‌ی اول و قدر نسبت عبارت است از:

$$a_n = a + (n-1)d$$

برای نمونه:

در دنباله‌ی $-3, 2, 7, 12, \dots$ جمله‌ی عمومی به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$a_n = -3 + (n-1)(5) \Rightarrow a_n = 5n - 8$$

■ شرط آن که سه عدد a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، این است که:

$$b - a = c - b \Rightarrow 2b = a + c$$

در این صورت، b را واسطه (میانگین) حسابی بین a و c گویند.

■ اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی عددی معلوم باشند، آنگاه:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی زیر، تعداد جملات را مشخص کنید.

$$102, 109, 116, \dots, 200$$





روش جمع تعدادی از جملات یک دنباله‌ی حسابی را با آوردن نمونه‌ای آموزش می‌دهیم.

مثال: مجموع عبارت زیر را حساب کنید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100$$

پاسخ

توجه:

تعمیم مثال قبل را در ذهن داشته باشید:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n \times (n+1)}{2}$$

جمع جملات متوالی دنباله‌ی حسابی، طبق ایده‌ی مثال قبل و به سادگی محاسبه می‌شود:

مجموع حسابی:

مجموع n جمله‌ی اول دنباله حسابی بر حسب جمله‌ی اول a ، قدرنسبت d و تعداد جملات n از رابطه‌ی زیر به دست می‌آید:

$$S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$$

توجه کنید:

جمع بالا باید از جمله‌ی اول a شروع شده و تا جمله‌ی n ام یعنی a_n ادامه داشته باشد:

$$S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

دلیل:

مشابه مثال قبل، مجموع را به دو صورت زیر هم می‌نویسیم:

$$S_n = a + \underbrace{a+d}_{a_2} + \dots + \underbrace{a+(n-2)d}_{a_{n-1}} + \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n}$$

$$S_n = \underbrace{a+(n-1)d}_{a_n} + \underbrace{a+(n-2)d}_{a_{n-1}} + \dots + \underbrace{a+d}_{a_2} + a$$

جملات دو طرف تساوی را همان‌طور که زیر هم قرار دارند، با هم جمع می‌کنیم:

$$2S_n = \underbrace{2a+(n-1)d}_{a_n} + \underbrace{2a+(n-1)d}_{a_{n-1}} + \dots + \underbrace{2a+(n-1)d}_{a_2} + \underbrace{2a+(n-1)d}_{a_1}$$

چون تعداد جملات یکسان و به شکل $2a+(n-1)d$ برابر n تا است، در نتیجه:

نمونه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$2S_n = n \times [2a + (n-1)d] \Rightarrow S_n = \frac{n \times [2a + (n-1)d]}{2}$$

برای نمونه؛

مجموع عددهای دو رقمی مضرب ۶، یعنی: $۹۶ + \dots + ۱۸ + ۱۲$ را حساب می‌کنیم: (سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳)
ابتدا تعیین تعداد جملات که مورد نیاز است:

$$\xrightarrow{a=12, d=6} 96 = 12 + (n-1) \times 6 \xrightarrow{\div 6} 16 = 2 + n - 1 \Rightarrow n = 15$$

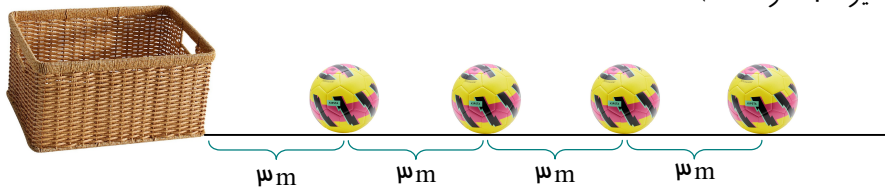
$$\text{بنابراین جواب: } S_{15} = \frac{15 \times [2(12) + (15-1) \times 6]}{2} = 15 \times 54 = 810$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی $\dots, 7, 3, -1$:

الف) مجموع دوازده جمله‌ی اول را حساب کنید.

ب) مجموع S_n را بر حسب n بیان کنید.

مثال: (از کتاب) در یک مسابقه تعداد زیادی توپ روی یک خط مستقیم و هر یک به فاصله ۳ متر از هم قرار دارند. (فاصله-ی توپ اول تا سبد نیز ۳ متر است).



دونده‌ای باید از کنار سبد شروع به دویدن کرده، توپ اول را برداشته، آن را تا سبد برده و داخل سبد بیندازد. سپس به طرف توپ بعدی رفته، آن را نیز برداشته، مانند قبل داخل سبد انداخته و این کار را ادامه دهد. اگر دونده در پایان ۹۱۸ متر دویده باشد، حساب کنید او جمعاً چند توپ داخل سبد انداخته است؟

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

در دنباله‌ی حسابی با جمله اول ۴ و قدرنسبت ۸، حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۴۰۰ بیشتر شود؟

پاسخ ✓

مثال: در دنباله‌ی حسابی $\dots, 7, 3, -1, \dots$ مجموع ده جمله‌ی دوم را بیابید.

پاسخ ✓

مثال: در جملات دو دنباله‌ی حسابی $\dots, 11, 8, 5, \dots$ و $\dots, 10, 6, 2, \dots$ تعدادی عدد دو رقمی مشترک وجود دارد. مجموع این اعداد را حساب کنید.

پاسخ ✓

روش دوم:

محاسبه‌ی مجموع جملات دنباله‌ی حسابی، وقتی قدرنسبت نامعلوم، ولی جمله‌ی آخر مشخص است، از رابطه‌ی زیر آسان‌تر قابل محاسبه است:

$$S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}$$

دلیل:

$$S_n = \frac{n \times [2a + (n-1)d]}{2} = \frac{n \times [a + \overbrace{a + (n-1)d}^{=a_n}]}{2} = \frac{n(a + a_n)}{2}$$

مثال: (مشابه کتاب)

مجموع همه‌ی عددهای طبیعی دو رقمی مضرب ۷ را به دست آورید.

پاسخ ✓

نمونه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

توجه ۱

فرمول S_n اطلاعات کاملی از دنباله در خود دارد. برای نمونه، ببینید:

مثال: در یک دنباله‌ی حسابی $S_n = n(2n+1)$ داده شده است. جملات اول، دوم و قدرنسبت را مشخص کرده و توسط آن‌ها جمله‌ی عمومی دنباله را تعیین کنید.

پاسخ ✓

روش فوری:

اگر فرمول مجموع جملات معلوم باشد، در هر دنباله‌ای می‌توان جمله‌ی عمومی را یک‌بارہ نیز مشخص کرد:

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$

البته همواره $a_1 = S_1$ است.

برای نمونه؛ پاسخ مثال قبل به روش فوری:

$$a_n = n(2n+1) - \frac{(n-1)(2(n-1)+1)}{(n-1)(2n-1)} = (2n^2 + n) - (2n^2 - 3n + 1) \Rightarrow a_n = 4n - 1$$

اکنون به یادآوری نوع دوم دنباله‌های خاص و برخی ویژگی‌های آن توجه کنید.

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

در دنباله‌ی روبه‌رو:

اگر نسبت هر جمله به جمله‌ی قبل مقدار ثابتی چون q باشد، به آن «**دنباله‌ی هندسی**» گفته و به q قدرنسبت گفته می‌شود. برای نمونه:

$$3, \frac{3}{2}, \frac{3}{4}, \dots \Rightarrow \begin{cases} a = -3 \\ \frac{3}{2} = \frac{3}{4} = \dots = \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2} \end{cases}$$

به عبارت دیگر:

هر جمله در قدرنسبت q ضرب می‌شود تا جمله‌ی بعدی به دست آید.

می‌بینید در دنباله‌ی بالا:

$$3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \dots$$

بعلاوه:

در چنین دنباله‌ای؛

■ جملات دنباله بر حسب جمله‌ی اول a و قدرنسبت q قابل بیان هستند:

$$a, aq, aq^2, aq^3, \dots$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

در کل،

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی هندسی چنین است:

$$a_n = aq^{n-1}$$

قدر نسبت از تقسیم هر دو جمله‌ی متوالی به دست می‌آید:

$$q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

یک نتیجه:

اگر سه عدد a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند، لازم است که:

$$\frac{b}{a} = \frac{c}{b} \Rightarrow b^2 = a \times c$$

در این صورت، b را واسطه (میانگین) هندسی بین a و c گویند.

اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$q^{n-m} = \frac{a_n}{a_m}$$

در ادامه، روش محاسبه‌ی مجموع جملات یک دنباله‌ی هندسی را خواهیم دید.

مثال: مجموع عددهای زیر از یک دنباله‌ی هندسی را حساب کنید:

$$1, 3, 9, 27, \dots, 729$$

پاسخ

با کاربرد روش حل مثال قبل، می‌توان فرمول‌های کلی زیر را به دست آورد:

مجموع هندسی:

مجموع n جمله‌ی اول یک «دنباله‌ی هندسی» از روابط زیر به دست می‌آید:

$$S_n = a \times \frac{1-q^n}{1-q} \quad (\text{یا: } S_n = \frac{a - a_n q}{1-q})$$

توجه کنید:

هرگاه تعداد جملات معلوم باشد از رابطه‌ی سمت راست و اگر جمله‌ی آخر معلوم باشد، بهتر است از رابطه‌ی سمت چپ استفاده شود.

مثال: مجموع یازده جمله‌ی اول از دنباله‌ی هندسی زیر را حساب کنید:

$$3, 6, 18, \dots$$

نمونه فرماید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ ✓

مثال: مجموع دوازده جمله‌ی اول یک دنباله‌ی هندسی صعودی ۹ برابر مجموع شش جمله‌ی اول آن است. قدرنسبت دنباله را مشخص کنید. (صعودی = افزایشی)

پاسخ ✓

مثال: (از کتاب) تصور کنید در خانه‌ی اول شطرنج یک دانه‌ی گندم، در خانه‌ی دوم دو دانه‌ی گندم و به همین صورت، در هر خانه، دو برابر خانه‌ی قبلی گندم قرار دهیم. اگر هر دانه گندم را یک گرم در نظر بگیریم:
الف) کل گندم‌های صفحه‌ی شطرنج چند گرم می‌شود؟

ب) نشان دهید کل گندم‌ها بیش از ۱۰۰۰ میلیارد تن خواهد شد. (توجه: صفحه‌ی شطرنج $8 \times 8 = 64$ خانه دارد!)

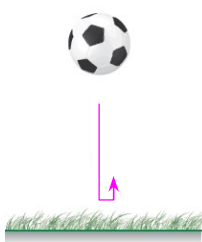
مثال: طول ضلع مربعی یک متر است. ابتدا نیمی از آن را رنگ می‌کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی‌مانده را و به همین ترتیب، در هر مرحله نیمی از مساحت باقی‌مانده رنگ می‌شود. پس از دست کم چند مرحله، حداقل ۹۹ درصد از سطح مربع رنگ شده است؟

پاسخ ✓



پاسخ دهید (۱) ?

- ۱- مجموع تمام عددهای فرد دو رقمی را حساب کنید.
- ۲- روی محیط یک دایره ۱۵ نقطه‌ی متمایز قرار داده‌ایم. تعداد کل وترهای حاصل از اتصال دو به دو این نقاط را به دو روش حساب کنید:
الف) مجموع جملات دنباله‌ی حسابی
ب) روش ترکیبیاتی از پایه‌ی دهم
- ۳- a عددی غیر صفر است؛ در دنباله‌ی ثابت a, a, a, \dots, a با تعداد n جمله:
الف) آیا این دنباله حسابی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، قدر نسبت و سپس مجموع جملات را حساب کنید.
ب) آیا این دنباله هندسی است؟ در صورت مثبت بودن جواب، قدر نسبت و سپس مجموع جملات را حساب کنید.
- ۴- در دنباله‌ی حسابی $1, 1, 1, 5, \dots$ لااقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۲۲۰ بیشتر شود؟
- ۵- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع دوازده جمله‌ی اول ۱۳۸ و جمله‌ی ششم برابر ۱۰ است. جمله‌ی اول آن را مشخص کنید.
- ۶- مجموع اعداد سه رقمی مضرب ۸ را حساب کنید.
- ۷- مجموع n جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \dots$ را حساب کنید.



- ۸- تویی داریم که از هر ارتفاعی رها شود، پس از زمین خوردن به اندازه‌ی یک سوم ارتفاع قبلی خود بالا می‌رود. توپ را از زمین به هوا پرتاب کرده‌ایم تا به ارتفاع هشت متری برسد؛ این توپ پس از چهار بار برخورد با زمین چه مسافتی را طی می‌کند؟

- ۹- در یک دنباله‌ی هندسی، مجموع سه جمله‌ی اول ۱۳۶ و مجموع شش جمله‌ی اول آن ۱۵۳ می‌باشد. نسبت جمله‌ی اول به جمله‌ی پنجم را به دست آورید.

۱۰- حاصل عبارت $\frac{t^{11} + t^{10} + t^9 + \dots + t + 1}{t^9 + t^6 + t^3 + 1}$ را به ازای $t = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$ حساب کنید.

متن‌ب کتاب:

۱- در دنباله‌ی حسابی روبه‌رو: $5, 8, 11, \dots$

حداقل چند جمله را جمع کنیم تا حاصل از ۴۹۳ بیشتر شود؟

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۲- در بیست جمله‌ی اول یک دنباله‌ی حسابی، مجموع جملات شماره‌های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره‌های زوج ۱۵۰ است. جمله اول و قدر نسبت آن را مشخص کنید.

۳- جمله عمومی یک دنباله به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله را با هم جمع کنیم تا مجموع آن‌ها برابر ۲۵۵ شود؟

۴- برای عدد حقیقی a با شرط $a \neq 1$ و عدد طبیعی n حاصل عبارت زیر را به دست آورید:

$$1 + a + a^2 + \dots + a^{n-1}$$

با استفاده از جواب خود، تجزیه‌های زیر را نتیجه بگیرید:

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + \dots + a^2 + a + 1)$$

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$



چالش (ویژه علاقمندان)

مجموع $۸ + ۹۸ + ۹۹۸ + \dots + ۹۹ \dots ۹۸$ را بر حسب n محاسبه کنید. (عدد سمت راست n رقم دارد).



معادله درجه دوم

در این بخش، بررسی بیشتری مرتبط با جواب‌های معادله‌ی درجه دوم انجام خواهد شد. ابتدا، یادآوری چند روش سریع حل و همچنین روش کلی حل این نوع معادلات:

❖ **مثال:** معادلات زیر را طبق قاعده‌ی: $(x^2 = a \Rightarrow x = \pm\sqrt{a})$ حل کنید.

الف) $(2x+1)^2 - 9 = 0$

ب) $x^2 - 4x + 4 = 1$

❖ **مثال:** طبق روش سریع:

$P \times Q = 0 \Rightarrow P = 0$ یا $Q = 0$

و تجزیه‌ی چند جمله‌ای‌ها، هر یک از معادلات زیر را حل کنید.

الف) $x^2 - 3x = 0$

ب) $x^2 - x = 6$

پ) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

یادآوری روش کلی حل معادلات درجه‌ی دوم:

روش دلتا:

معادله‌ی درجه دوم پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ است و اعداد $a \neq 0$ ، b و c ضرایب معادله هستند. در این معادله، جواب‌ها بر حسب مقدار $\Delta = b^2 - 4ac$ تعیین می‌شوند:

▪ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمايز) دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

(معمولاً ریشه‌ها را α و β نام‌گذاری می‌کنیم.)

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



▪ اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دو ریشه‌ی مضاعف (برابر) دارد که عبارتند از:

$$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$$

▪ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله هیچ جوابی (حقیقی) ندارد.

✨ **مثال:** معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $4x^2 - x - 1 = 0$

ب) $3x^2 - x = -6$

✨ **مثال:** مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله $3 = (t-2)x^2 - x$:

الف) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

ب) جواب حقیقی نداشته باشد.

👉 **حالت‌هایی خاص: (مهم)**

در معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ ، به سه مورد زیر توجه داشته باشید:

▪ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند (یعنی: $ac < 0$)، آنگاه:

فود به فود دلتا مثبت بوده و معادله دو جواب متمایز خواهد داشت.

▪ اگر جمع ضرایب برابر صفر شود: (یعنی: $a + b + c = 0$)، آنگاه:

یکی از ریشه‌ها ۱ و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

▪ اگر $a - b + c = 0$ (یا: $b = a + c$) باشد، آنگاه:

یکی از ریشه‌ها -۱ و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای نمونه:

در معادله‌ی $3x^2 + 4x + 1 = 0$ ، شرط $b = a + c$ برقرار است. پس جواب‌ها فوری: -۱ و $-\frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ به دست خواهند آمد.

✨ **مثال:** طول و عرض مستطیلی به ترتیب $7x + 1$ و $x + 3$ است. اگر مساحت مستطیل ۳۲ واحد مربع باشد، مقدار x را

بیابید.



پاسخ ✓

یک قاعده‌ی کلی:

در معادله‌ی چند جمله‌ای با هر درجه‌ای:

اگر مجموع ضرایب صفر شود، یکی از ریشه‌ها عدد ۱ است.

این مطلب بدیهی، در تجزیه عبارات درجه‌ی سوم و حل معادلات بسیار مفید است.

نمونه:

مثال: معادله‌ی $x^3 - 3x^2 - 2x = -4$ را به روش تجزیه کردن حل کنید.

پاسخ ✓

تذکر مهم:

اطلاع از تمام ریشه‌ها، به تجزیه‌ی کامل چند جمله‌ای هم منجر می‌شود:

$$x^3 - 3x^2 - 2x + 4 = (x-1)(x-1-\sqrt{5})(x-1+\sqrt{5})$$

مثال: (از کتاب) مقدار k را چنان بیابید که یکی از صفرهای تابع $f(x) = x^3 + kx^2 - x - 2$ برابر -2 باشد. سپس صفرهای

دیگر تابع را به دست آورید. **توجه:** طبق تعریف، هر جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ یک صفر تابع محسوب می‌شود.

پاسخ ✓

توجه کنید:

برخی معادلات که حتی ممکن است درجه دوم نباشند، ظاهری شبیه معادلات درجه دوم دارند. این معادلات معمولاً با تغییر کوچکی تبدیل به درجه دوم شده و به آسانی حل می‌شوند. به چند نمونه توجه کنید:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: در معادله $(2x-1)^2 + 2(2x-1) - 3 = 0$ جوابها را مشخص کنید.

پاسخ ✓

مثال: معادله $(x^2-1) + (x^2-1) = 6$ را با روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ ✓

در ادامه، ارتباط بین جوابها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم را خواهیم دید.

تذکر:

هر وقت در مورد دو ریشه‌ی یک معادله‌ی درجه دوم بحث می‌شود، باید:

از منفی نبودن Δ مطمئن باشید و در صورت لزوم، آن را چک کنید.

روابط بین ریشه‌ها:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

○ مجموع ریشه‌ها: برابر است با: $\alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

○ حاصل ضرب ریشه‌ها: برابر است با: $\alpha\beta = \frac{c}{a}$

گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که از تساوی $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ به دست می‌آید.

دلیل:

کافی است جوابهای $\frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ و $\frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ را با هم جمع یا در هم ضرب کنید.

نمونه‌ها:

الف) این ادعا که در معادله $4x^2 - 3x - 7 = 0$ مجموع ریشه‌ها: $-\frac{3}{4}$ است، نادرست می‌باشد. زیرا:

$$-\frac{b}{a} = -\frac{-3}{4} = \frac{3}{4} \quad (\text{سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳})$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



ب) در معادله $2x^2 - 5x - 7 = 0$ که ریشه‌ها: -1 و $3/5$ و $-\frac{c}{a} = \frac{7}{2} = 3/5$ هستند، می‌بینید جمع ریشه‌ها $2/5$ و ضربشان $3/5 -$ است. از طرفی:

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = -\frac{-5}{2} = 2/5 \quad \text{و} \quad \alpha\beta = \frac{c}{a} = \frac{-7}{2} = -3/5$$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله $3x^2 + x + 2 = 0$ باشند:

الف) مقادیر $s = \alpha + \beta$ و $p = \alpha\beta$ را حساب کنید.

ب) حاصل $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ را به دست آورید.

پ) مقدار $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ را به دست آورید.

مثال: به ازای چه مقداری از m در معادله $x^2 - mx + 8 = 0$ ، یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟



عبارات خاص

با داشتن مقادیر: $\alpha + \beta = s$ و $\alpha\beta = p$ ، بعضی عبارتهای خاص بر حسب s و p به صورت زیر محاسبه می‌شوند:

جمع مجذورات:

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = s^2 - 2p$$

جمع معکوس‌ها:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{s}{p}$$

جمع معکوس مجذورات:

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}$$

جمع مکعبات:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = s^3 - 3ps$$

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله $x^2 - 5x + 1 = 0$ باشند، مقادیر $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ و $\frac{\alpha}{\beta+1} + \frac{\beta}{\alpha+1}$ را حساب کنید.



پاسخ ✓

مثال: مقدار m را طوری حساب کنید که مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ باشد.

پاسخ ✓

مثال: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، حاصل $|\sqrt{x'} - \sqrt{x''}|$ را حساب کنید.

پاسخ ✓

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 - 4x + 1 = 0$ باشند، مطلوب است محاسبه‌ی:

الف) $(\alpha^2 - 4\alpha + 5)(\beta^2 - 4\beta + 3)$

ب) $\beta(\alpha^3 - 4\alpha^2) + \alpha(2\beta^3 - 8\beta^2)$

تشکیل معادله‌ی درجه دوم را در ادامه خواهیم دید.

مثال: (از کتاب) اگر α و β ریشه‌های یک معادله‌ی درجه دوم باشند، آن معادله را مشخص کنید.

پاسخ ✓



طبق مثال قبل، با داشتن ریشه‌ها یا حتی فقط با داشتن جمع و ضرب آن‌ها، می‌توان معادله‌ی مربوطه را نوشت:

نوشتن معادله:

هرگاه **مجموع** ریشه‌ها s و **حاصل ضرب** ریشه‌ها p معلوم باشند، آن معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2 - sx + p = 0$$

برای نمونه؛

اگر جواب‌های معادله‌ای $2 - \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{3}$ باشند، چون:

$$s = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \quad \text{و} \quad p = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

این معادله به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادله‌ای که ریشه‌های آن عددهای $\frac{1}{p}$ و $3 -$ باشند را به دو روش بنویسید:

(الف) به روش مستقیم.

(ب) به روش فرمولی بالا.

مثال: معادله‌ای درجه دوم با رعایت دو شرط زیر بنویسید:

(الف) یکی از جواب‌های آن $1 - 2\sqrt{3}$ باشد.

(ب) ضرایب آن عددهای گویا باشند.



نوشتن معادلاتی با ریشه‌های مرتبط به هم را با بیان نمونه‌هایی بررسی می‌کنیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - x - 1 = 0$ دو واحد کوچک‌تر باشد.





روش کوتاه:

- در سؤالاتی مانند مورد قبل، برای پاسخ دهی سریع‌تر، طبق مراحل زیر عمل کنید:
- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y در نظر بگیرید.
 - با توجه به شرط داده شده بین ریشه‌ها، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.
 - از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y به دست آورده و در معادله‌ی اولیه جایگزین کنید.
 - معادله‌ی به دست آمده را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

نمونه؛ پاسخ مثال قبل به این روش:

باید $y = x - 2$ باشد؛ پس $x = y + 2$ بوده و در نتیجه:

$$4(y+2)^2 - (y+2) - 1 = 0 \rightarrow 4y^2 + 16y + 16 - y - 2 - 1 = 0 \Rightarrow 4y^2 + 15y + 13 = 0$$

که همان معادله‌ی $4x^2 + 15x + 13 = 0$ است.

نمونه‌ی دیگری ببینید:

مثال: معادله‌ی بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $0 = 1 - 3x - 2x^2$ یک واحد کمتر باشد.



پاسخ دهید (۲)

۱- یکی از ریشه‌های معادله‌ی $0 = 4x^2 - mx - 7$ عدد -1 است. ریشه‌ی دیگر را یک بار به روش دلتا و یک بار با استفاده از روابط بین ریشه‌ها حساب کنید.

۲- محیط یک مستطیل 33 سانتی‌متر و مساحت آن 65 سانتی‌متر مربع است. طول و عرض مستطیل را بیابید.

۳- در معادله‌ی درجه دوم $0 = x^2 - 4x + 1$ حاصل عبارت $(x_1^2 - 4x_1 + 2)(x_2^2 - 4x_2 + 4)$ را حساب کنید؟ x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.

۴- ریشه‌های معادله‌ی $2 = 4x^2 + 7x^2$ را حساب کنید.

۵- ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $0 = 7x^2 + 18(x^2 + x) - 18(x^2 + x) + 7x^2$ را مشخص کنید.

۶- ریشه‌های معادله‌ی $0 = 4 - 5|x - 1| + (x - 1)^2$ را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۷- در معادله‌ی درجه دوم $4x^2 - 5x + 1 = 0$ ، حاصل عبارت $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}$ را بدون محاسبه‌ی ریشه‌ها حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند).

۸- مقدار m را طوری تعیین کنید که معادله‌ی $x^2 + (m^3 - m)x + 3m + 1 = 0$ دو ریشه‌ی حقیقی قرینه داشته باشد. مسئله چند جواب دارد؟

۹- در معادله‌ی $2x^2 - mx + 5m = 0$ مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های معادله عکس و قرینه‌ی هم باشند؟

منتفب کتاب:

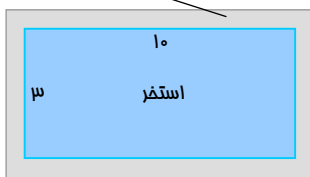
۱- صفرهای تابع $f(x) = 2x^3 + x^2 + 3x$ را مشخص کنید.

۲- معادله‌ی زیر را حل کنید.

$$\left(\frac{x^2}{3} - 2\right)^2 - 7\left(\frac{x^2}{3} - 2\right) + 6 = 0$$

۳- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که یکی از ریشه‌های آن دو برابر دیگری باشد. (مسئله چند جواب دارد؟)

آبراه بتونی



۴- یک استخر مستطیل شکل به ابعاد طول ۱۰ و عرض ۳ متر داریم که طبق شکل یک آبراه بتنی در اطرافش است. اگر این آبراه دارای پهنای یکسان و مساحت ۱۴ متر مربع باشد، پهنای آن را حساب کنید.

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

عددهای متمایز a و b جواب‌های معادله‌ی درجه دوم $(m+2)x^2 - 2nx + 9m = 3n$ بوده و $a, 3, b$ یک دنباله‌ی هندسی است. کمترین مقدار صحیح قابل قبول برای m را بیابید.



نمودار تابع درجه دو

در این بخش نمودار تابع درجه‌ی دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ و برخی ویژگی‌های آن بررسی می‌شود.

صفرهای تابع:

در مورد یک تابع مانند $y = f(x)$:

هر جواب معادله‌ی $f(x) = 0$ را یک «صفر» برای این تابع گویند.

توجه کنید:

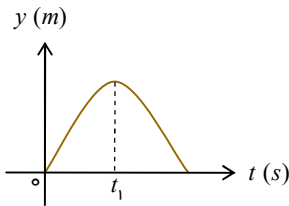
در صفرهای تابع، عرض نمودار برابر صفر است. یعنی: آن‌ها نقاط برخورد نمودار با محور طول‌ها هستند.

بویژه:

صفرهای تابع $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، همان ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ هستند.

مثال: اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $30 \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب شود، ضابطه‌ی مکان (ارتفاع) آن بر حسب زمان (t) به

صورت $y = -5t^2 + 30t$ و نمودار مکان- زمان به صورت روبه‌رو است:



الف) نقاط برخورد نمودار با محور افقی را تعیین کنید. آن‌ها چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) نقطه‌ی به طول t_1 چه معنایی دارد؟

یادآوری:

نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ همیشه یک «سه‌می» با مشخصات زیر است:

- نمودار برای $a > 0$ دارای می‌نیم و برای $a < 0$ دارای ماکزیمم است. به نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیم «رأس» سه‌می گفته می‌شود.



- طول رأس $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن با جایگزینی طول در ضابطه یا از رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود.

$$y = -\frac{\Delta}{4a} \quad (\Delta = b^2 - 4ac)$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



توجه کنید:

چون طول رأس $-\frac{b}{2a}$ بوده و خط عمودی گذرا از رأس، محور تقارن نمودار است، در نتیجه:

خط عمودی به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی را مشخص می‌کند.

مثال: در تابع $y = x(2-x) + 4x - 1$ موارد زیر را پاسخ دهید:

الف) نمودار تابع دارای می‌نیم است یا ماکزیمم؟

ب) طول نقطه‌ی می‌نیم یا ماکزیمم و سپس عرض آن را به دست آورید.

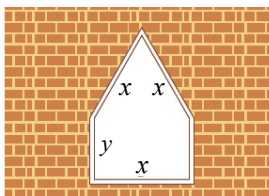
پ) معادله‌ی محور تقارن نمودار را بنویسید.

مثال: تابع $y = x^2 + mx - 3$ نسبت به خط $x = 1$ متقارن است. نقطه یا نقاط برخورد منحنی با محور طول را بیابید.



توجه داشته باشید:

عرض رأس سهمی $(-\frac{\Delta}{4a})$ ، بیشترین یا کمترین مقدار عبارت درجه دوم است!



مثال: یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث متساوی-الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری

بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.





یادآوری:

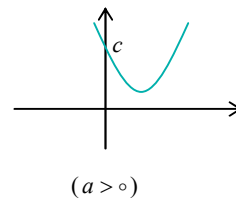
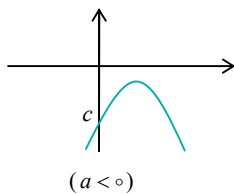
وضعیت نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ در دستگاه مختصات و ارتباط آن با ضرایب a ، b و c : واضح است که:

سهمی مربوطه همواره محور y را به عرض c قطع می‌کند:

$$x = 0 \Rightarrow y = c$$

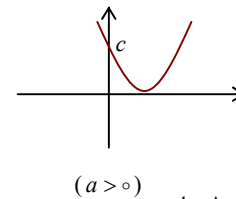
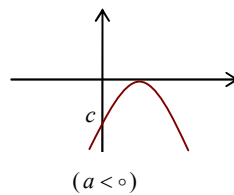
❖ اگر $\Delta < 0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. به‌طور دقیق:

- اگر $a > 0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند.
- اگر $a < 0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.

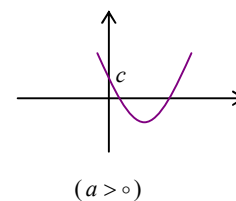
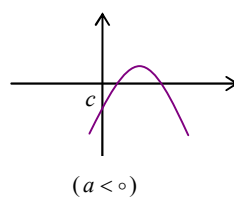


❖ اگر $\Delta = 0$ باشد، نمودار بر محور طول‌ها مماس است. به‌طور دقیق:

- اگر $a > 0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.
- اگر $a < 0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.



❖ اگر $\Delta > 0$ باشد، محور طول‌ها را در دو نقطه (ریشه‌های معادله‌ی $y = 0$)، x_1 و x_2 قطع می‌کند.



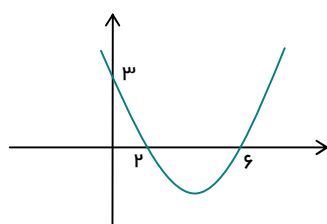
توجه کنید:

در هر حالت، علامت b را با توجه به طول رأس، یعنی: $-\frac{b}{2a}$ یا جمع ریشه‌ها، یعنی: $-\frac{b}{a}$ می‌توان تشخیص داد.

✨ **مثال:** (از کتاب الف) نشان دهید اگر α و β صفرهای تابع درجه دوم $y = ax^2 + bx + c$ باشند، در این صورت:

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta)$$

(ب) ضابطه‌ی سهمی نمودار مقابل را بنویسید.



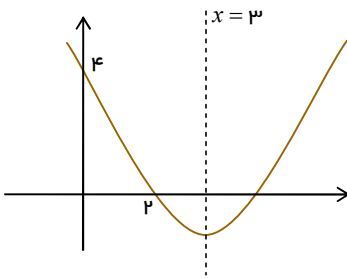
توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



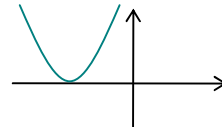
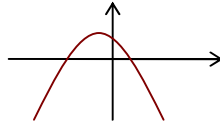
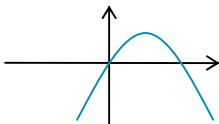
پاسخ ✓

مثال ✨ (تمرین کتاب) ضابطه‌ی جبری سهمی مقابل را بنویسید.



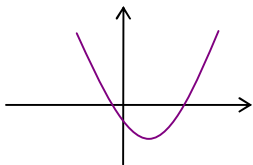
پاسخ ✓

مثال ✨ نمودارهای زیر مربوط به توابع به فرم $y = ax^2 + bx + c$ است. در هر کدام علامت عدد abc را مشخص کنید.



پاسخ ✓

مثال ✨ در تابع $y = ax^2 + bx + c$ با نمودار روبه‌رو، علامت تمام مقادیر a, b, c, Δ, s و p را مشخص کنید.



پاسخ ✓



گاهی حل معادلات به روش جبری دشوار یا حتی غیرممکن است، روش هندسی ممکن است سودمند باشد.

روش هندسی:

یک معادله‌ی داده شده را سعی می‌کنیم به صورت $f(x) = g(x)$ بنویسیم با این شرط که:

نمودارهای f و g نسبتاً ساده قابل رسم باشند.

در این صورت:

- نمودارهای f و g را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم.
- نقاط تقاطع نمودارها در صورت وجود، جواب‌های تقریبی معادله و بویژه تعداد جواب‌ها را مشخص خواهد کرد.

حالت خاص:

می‌دانیم جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ ، نقاط برخورد نمودار $y = f(x)$ با محور طول ($y = 0$) هستند.

مثال: (از کتاب) معادله‌ی $|x| = x^2 - 2x$ را به روش هندسی حل کنید.



(نمونه‌های دیگری از حل هندسی معادلات، بعد از آشنایی بیشتر با رسم نمودار، در ادامه آورده شده است.)

پاسخ دهید (۳)

۱- صفرهای تابع درجه چهارم $y = x^4 - 5x^2 + 4$ را مشخص کنید.

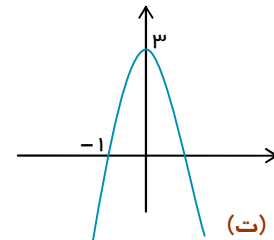
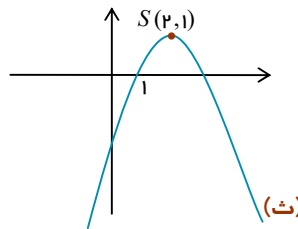
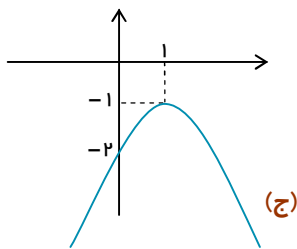
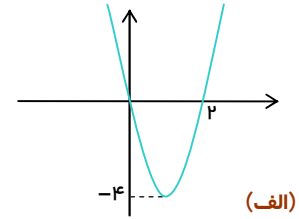
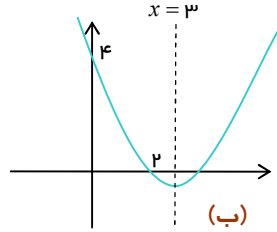
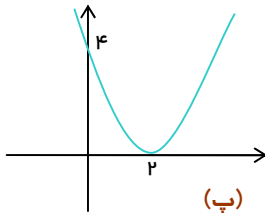
۲- اگر منحنی تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با چه طول مثبتی قطع می‌کند؟

۳- اگر عبارت $(a-1)x^2 + (a-1)x + 1$ به‌ازای هر مقدار x منفی باشد، محدوده‌ی a را مشخص کنید.

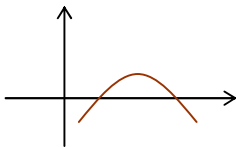
۴- بیشترین مقدار تابع $f(x) = \frac{-x^2}{p} + 20x$ را بیابید.



۵- معادله‌ی سهمی‌های زیر را بنویسید:

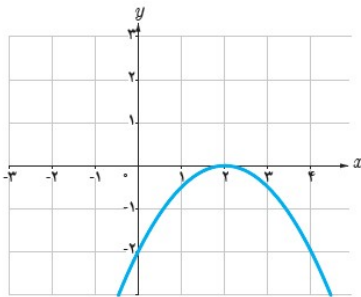


۶- نمودار تابع $y = ax^2 + 8x - 4$ به شکل مقابل است. برای a چند مقدار صحیح وجود دارد؟

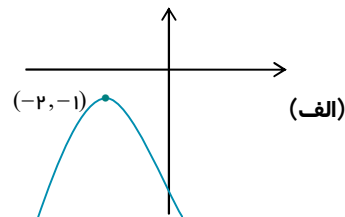
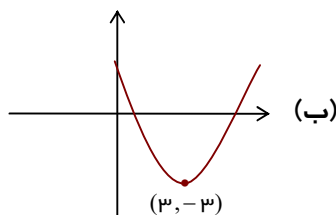


ملفب کتاب:

۱- در شکل روبه‌رو نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ داده شده است. صفرهای تابع $P(x)$ و ضابطه آن را مشخص کنید.



۲- در موارد زیر، نمودار سهمی $P(x) = ax^2 + bx + c$ با شرط $|a| = 1$ و مختصات رأس هم داده شده است. صفرهای تابع را در صورت وجود مشخص کرده و ضابطه‌ی تابع را بنویسید.



۳- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله‌ی $|x-1| = x^2 - x - 1$ را با استفاده از روش هندسی به دست آورید.

نوبه فرمایید:

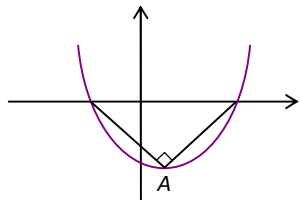
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

در شکل مقابل نمودار سهمی $y = x^2 + 2mx - m^2$ داده شده است. مقدار m را تعیین کنید. (A رأس سهمی است.)





۴

معادلات گویا و اسم

معادله‌ای که بر حسب عبارت‌های گویا، (یعنی: عبارت کسری با صورت و مخرج چندجمله‌ای) باشد را یک «معادله‌ی گویا» گوئیم. مانند:

$$\frac{x}{x^2 + 14x} = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+4}$$

بعد از حل چنین معادلاتی، فقط عددهای موجود در دامنه می‌توانند جوابی قابل قبول باشند:

دامنه:

در یک عبارت گویا، دامنه شامل تمام عددهای حقیقی، به جز ریشه‌های مخرج است:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

توجه کنید:

اگر در یک معادله چند کسر گویا داشته باشیم، باید ریشه‌های تمام آن‌ها از \mathbb{R} برداشته شود. برای نمونه:

$$\text{دامنه‌ی معادله‌ی } \frac{x}{x^2 + 2x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-2} \text{ را مشخص می‌کنیم.}$$

ریشه‌های هر سه مخرج:

$$x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases} \quad \text{و} \quad x = 0 \quad \text{و} \quad x - 2 = 0 \Rightarrow x = 2$$

پس دامنه برابر است با:

$$D = \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$$

مستطیل طلایی:

اگر در یک مستطیل به طول l و عرض w داشته باشیم:

$$\frac{l}{w} = \frac{l+w}{l} \quad (\text{نسبت طول به عرض برابر نصف نسبت محیط به طول است!})$$

گوئیم: «مستطیل، طلایی است» یا «در مستطیل، نسبت طلایی برقرار است».

مثال: (از کتاب) در یک سالن ورزشی مستطیل شکل، محیط برابر ۱۴۴ متر و در آن نسبت طلایی برقرار است. طول و عرض سالن را مشخص کنید.

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



حل معادلات گویا:

در حالت کلی، طبق مراحل زیر عمل می‌شود:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و سپس آن را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله‌ای که به دست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که در دامنه قرار داشته باشند.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب، کافی است جایگذاری آن در تمام مخرج‌ها، هیچ کدام از آن‌ها را صفر نکند.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ

توجه کنید:

منظور از محلول آب نمک ۵ درصدی، یعنی نسبت جرم نمک به جرم آب برابر $\frac{5}{100}$ است!

مثال: (از کتاب) در یک مغازه‌ی ماهی‌های تزئینی، ماهی‌های آب‌شور در محلول‌های آب نمک ۷ درصدی نگهداری می‌شوند. یک کارگر مبتدی ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی ساخته است. فرض کنیم فقط ۵ کیلوگرم نمک در دسترس باشد و کارگر ناچار است همان را به محلول بیفزاید. در این شرایط، او باید چند کیلوگرم از محلول را تبخیر کند تا به محلول ۷ درصدی برسد؟

پاسخ



توجه کنید:

وقتی بتوان یک کار را در x ساعت انجام داد، در هر ساعت $\frac{1}{x}$ از آن کار انجام خواهد شد!

مثال: اگر دو ماشین چمن‌زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این‌که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ

مطلب بعدی در برخی سؤالات نسبتاً قوی و گاهی برای حل سریع مورد نیاز است:

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a + \frac{1}{a}$ ، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مطلب مهم زیر وجود دارند:

▪ اگر a مثبت باشد، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \geq 2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = 2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = 1$ باشد.

▪ اگر a منفی باشد، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \leq -2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = -2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = -1$ باشد.

مثال: معادله‌ی $\frac{x^2 - 2}{2x + 1} = 2 - \frac{2x + 1}{x^2 - 2}$ را حل کنید.

پاسخ

اکنون روش حل معادلات اصم (رادیکالی) مانند نمونه‌های زیر را ببینیم:

$$2\sqrt{1-x} + x = 1 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x-2} = 2+x$$

دامنه‌ی جواب:

در یک معادله‌ی اصم، باید دو شرط برقرار باشند تا جواب به‌دست آمده قبول شود:
اولاً: داخل هیچ کدام از رادیکال‌ها منفی نشود.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



ثانیاً: هر رادیکال نیز به تنهایی نباید با یک عبارت منفی برابر شود.

نمونه‌ای ببینید:

مثال: دامنه‌ی جواب معادله‌ی $1 = \sqrt{2x-1} + 2x$ را مشخص کنید.

پاسخ

معادلات اصم را می‌توان بدون تعیین دامنه و به روش زیر حل کرد:

حل معادلات اصم:

طبق دستورات زیر عمل کنید:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارت‌ها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رسانده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب، آن را در معادله قرار داده و باید صدق کند.

مثال: معادله‌ی $1 = \sqrt{2x-1} + 2x$ را حل کنید.

پاسخ

حل مثال قبل: (روش دوم)

معادله را به صورت $\sqrt{2x-1} = 1 - 2x$ نوشته و لازم است زیر رادیکال و همچنین سمت راست نامنفی باشند:

$$2x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq \frac{1}{2} \quad \text{و} \quad 1 - 2x \geq 0 \Rightarrow x \leq \frac{1}{2}$$

پس فقط عدد $\frac{1}{2}$ می‌تواند جواب این معادله باشد که صدق کردن در معادله، باعث پذیرش آن می‌شود:

$$2\left(\frac{1}{2}\right) + \sqrt{2\left(\frac{1}{2}\right) - 1} = 1 \Rightarrow 1 = 1$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: معادله $\sqrt{x^2+x}-\sqrt{-x}=0$ را حل کنید.

پاسخ

حالت ویژه‌ای در معادلات:

مجموع عبارات نامنفی:

گاهی چند رادیکال (در حالت کلی: چند عبارات نامنفی مانند رادیکال، مجذور یا قدرمطلق عبارات) با هم جمع شده و حاصل برابر صفر است. در این صورت:

فقط عددی به عنوان جواب قبول است که تمام عبارات جمع را همزمان صفر کند.

نمونه‌هایی ببینید:

مثال: معادله $\sqrt{1+x}+\sqrt{x^2-1}+2\sqrt{1-x}=0$ را حل کنید.

پاسخ

مثال: (از کتاب) معادله $\sqrt{x^2-4}+2\sqrt{x-2}=0$ را حل کنید؛ سپس در مورد قابل قبول بودن جواب‌های آن بحث کنید. آیا بدون حل نیز می‌توانستید به این نتیجه برسید؟

پاسخ

پاسخ دهید (۱۴) ?

۱- اگر یکی از جواب‌های معادله $\frac{x+6}{k+4} + \frac{x}{2x-4} = 3$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر را بیابید.

۲- اگر معادلات $\frac{2k}{x+2} = 6+kx$ و $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2-2x}$ جواب مشترک داشته باشند، مقدار k را بیابید.

۳- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

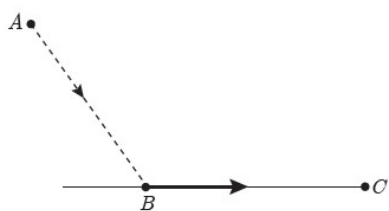


الف) $2x + \sqrt{2x-1} = 1$

ب) $\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = 2$

۴- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $\sqrt{x^2 + 4x + 5} = x^2 + 4x + 3$ را به دست آورید.

۵- معمولاً مرغ‌های دریایی برای شکار ماهی‌ها، بخشی از مسیر خود را در هوا و بخشی را به موازات سطح آب طی می‌کنند. یک مرغ دریایی در نقطه‌ی A به ارتفاع ۶ متر از سطح آب قرار دارد. فاصله‌ی تصویر مرغ روی آب از ماهی که در نقطه‌ی C قرار دارد، ۱۲ متر است. مرغ ابتدا از نقطه‌ی A به نقطه‌ی B می‌آید، سپس در سطح آب از B به C می‌رود و ماهی را شکار می‌کند. اگر مرغ دریایی برای طی هر متر در هوا ۱۴ کیلو کالری و برای طی هر متر در سطح آب ۱۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند، نقطه‌ی B باید در چه فاصله‌ای از C باشد تا مرغ دریایی روی هم ۱۸۰ کیلو کالری انرژی مصرف کند؟



منتخب کتاب:

۱- معادلات زیر را حل کنید:

ب) $\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}} = 1-x$

الف) $\frac{p}{2-p} + \frac{2}{p} = -\frac{3}{2}$

ت) $\sqrt{x+3} + \sqrt{3x+1} = 4$

پ) $\frac{5}{\sqrt{x+2}} = 2 - \frac{1}{\sqrt{x-2}}$

۲- ماشین A کاری را به تنهایی ۱۵ ساعت زودتر از ماشین B انجام می‌دهد. اگر هر دو ماشین این کار را در ۱۸ ساعت انجام دهند، چه زمانی برای هر کدام از ماشین‌ها لازم است تا آن کار را به تنهایی انجام دهند؟

۳- فاصله بین دو شهر که در کنار رودخانه‌ای واقع شده‌اند، ۱۴۴ کیلومتر است. یک کشتی از شهر اول به شهر دوم می‌رود و پس از دو ساعت توقف، همین مسیر را برمی‌گردد. مدت زمان سفر در مجموع ۱۷ ساعت می‌باشد. در صورتی که سرعت حرکت کشتی در مسیر جریان آب ۸ کیلومتر در ساعت بیشتر از سرعت آن در خلاف جریان آب باشد، سرعت حرکت کشتی را در جهت حرکت آب تعیین کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

برای عدد مثبت a داریم: $a^2 - 17a - 16\sqrt{a} = 0$. مقدار $\sqrt{a} - \sqrt{a}$ را حساب کنید.

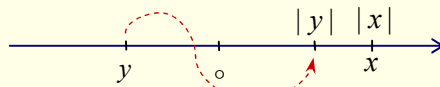


۵ قدر مطلق و خواص

مفهوم قدر مطلق و خواص آن در مباحث گوناگون ریاضی، از جمله توابع و نمودارها، حل معادلات و نامعادلات بسیار به کار می‌رود. این مفهوم را در ادامه به صورت دقیق معرفی می‌کنیم.

قدر مطلق:

قدر مطلق یک عدد حقیقی x را با $|x|$ نشان می‌دهیم و آن برابر است با فاصله‌ی نقطه‌ی x تا مبدأ مختصات روی محور اعداد:



بیان دوضابطه‌ای قدر مطلق طبق نمودار بالا:

$$|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

قدر مطلق، عدد یا عبارت منفی را قرینه کرده و روی سایر مقادیر تاثیری ندارد.

برای نمونه:

چون عدد $4 - 3\sqrt{2} \cong 4 - 3 \times 1/4$ منفی است، پس:

$$|4 - 3\sqrt{2}| = -(4 - 3\sqrt{2}) = 3\sqrt{2} - 4$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

نمایش عبارت «فاصله‌ی بین x و ۳ برابر ۷ است.» با نماد قدر مطلق به صورت است.

جواب:

مثال: عبارت‌های زیر را ساده کنید.

الف) $\sqrt{3 - 2\sqrt{2}}$

ب) $|5 + b| + \sqrt{4 + 4a^2 + a^4} + |2a - 3b|$ با شرط $a < 0 < b$.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

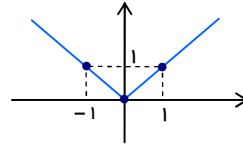


رسم نمودارهای قدرمطلق در مباحث گوناگون کاربردهای زیادی دارد.

یادآوری: رسم نمودار تابع $y = |x|$:

طبق ضابطه‌های $|x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$ ، برای $x < 0$ ، خط $y = -x$ و برای $x \geq 0$ ، باید خط $y = x$ رسم شود.

x	-1	0	1
y	-1	-1	1



مثال: نمودار تابع $y = |x - 2| - 1$ را به روش انتقال رسم کنید.

پاسخ

توجه کنید:

(۱) تبدیل ضابطه قدرمطلق به چندضابطه‌ای، با توجه به علامت عبارت داخل قدر، مانند زیر انجام می‌شود:

$$y = |2x + 1| = \begin{cases} -(2x + 1) & 2x + 1 < 0 \\ 2x + 1 & 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Rightarrow |2x + 1| = \begin{cases} -2x - 1 & x < -\frac{1}{2} \\ 2x + 1 & x \geq -\frac{1}{2} \end{cases}$$

(۲) وقتی ضابطه دارای چند قدر مطلق باشد، می‌توانید با تقسیم محدوده‌ی x مانند مورد بالا، قدرمطلق‌ها را حذف کرده و نمودار را رسم کنید.

مثال: نمودار تابع $y = |x + 2| + |x|$ را رسم کنید.

پاسخ

بد نیست بدانیم!

برای رسم توابعی مانند نمونه‌ی قبل، روش کوتاه‌تری هم وجود دارد؛ ببینید:

رسم سریع:

برای رسم توابع «گلدان» یا «آبشار» و موارد مشابه مانند:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$y = |ax \pm b| \pm cx \pm d \quad \text{و} \quad y = |ax \pm b| \pm |cx \pm d|$$

چنین عمل کنید:

- ریشه‌های داخل قدرمطلق‌ها را تعیین کنید.
- یک عدد قبل از کوچک‌ترین ریشه و یک عدد بعد از بزرگ‌ترین ریشه در نظر بگیرید.
- مقدار تابع را در ریشه‌ها و نقاط مرحله‌ی قبل مشخص کنید.
- این نقاط را در دستگاه مختصات مشخص کرده و به طور متوالی توسط پاره خط‌هایی به هم اتصال دهید.

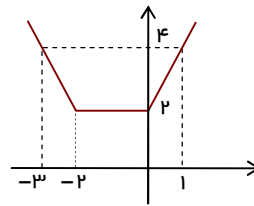
برای نمونه؛

رسم نمودار تابع $y = |x + 2| + |x|$ که بالاتر با ضابطه‌بندی انجام دادیم را به روش سریع هم انجام می‌دهیم. تعیین ریشه‌ها:

$$|x + 2|: x + 2 = 0 \rightarrow x = -2 \quad \text{و} \quad |x|: x = 0$$

این دو ریشه را به همراه یک عدد قبل از -2 و یک عدد بعد از صفر در جدول مقادیر قرار داده و از اتصال نقاط، نمودار رسم می‌شود:

x	-۳	-۲	۰	۱
y	۴	۲	۲	۴



مثال: به روش هندسی، تعداد جواب‌های معادله‌ی $|x - 1| - |x + 2| = 5$ را مشخص کنید.

پاسخ

ویژگی‌های قدرمطلق:

- بدیهی است که: $|x| \geq 0$ است.
 - همواره داریم: $|x| = |-x|$ ، یعنی داخل قدرمطلق را می‌توان قرینه کرد.
- در نتیجه:**
- تساوی‌های $|x - y| = |y - x|$ و $|-x - y| = |x + y|$ همواره برقرار هستند.
 - برای هر x داریم: $|x|^2 = x^2$ ، ولی $(\sqrt{x})^2 = x$ است که البته در عبارت دوم x نمی‌تواند منفی باشد.
- بعلاوه:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



تساوی‌های $x^2 = y^2$ و $\sqrt{x^2} = \sqrt{y^2}$ و $|x| = |y|$ معادل بوده و از هر سه نتیجه می‌شود:

$$y = \pm x$$

▪ برای هر $n \in \mathbb{N}$ زوج داریم: $|x^n| = |x|^n = x^n$. بویژه: $|x^2| = |x|^2 = x^2$.

برای نمونه: $|2x-1|^2 = (2x-1)^2$. پس:

در قدرمطلق با توان زوج، می‌توان قدر را به پرانتز تبدیل کرد.

✨ **مثال:** (از کتاب) فرض کنید x و y عددهای حقیقی دلخواه باشند.

الف) با استفاده از رابطه‌ی $\sqrt{x^2} = |x|$ نشان دهید: $|xy| = |x||y|$.

ب) با فرض $y \neq 0$ و استفاده از مرحله‌ی قبل ثابت کنید: $\left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}$.

نامعادلات ویژه:

دو خاصیت زیر در تبدیل نامساوی‌ها و حل نامعادلات کاربرد فراوان دارند: ($a > 0$)

▪ نامساوی $|x| \leq a$ معادل این است که $-a \leq x \leq a$.

▪ نامساوی $|x| \geq a$ معادل این است که $x \geq a$ یا $x \leq -a$.

در صورتی که علامت‌ها به صورت «>» یا «<» باشند، جواب‌ها نیز همین علامت‌ها را خواهند داشت.

برای نمونه:

مقادیر قابل قبول در نامساوی $|x| < 2$ ، دقیقاً عددهای $-2 < x < 2$ هستند. (برای درک بهتر، می‌توانید از نمایش روی محور کمک بگیرید.) همچنین:

$$x \geq 3 \quad \text{یا} \quad -3 \leq x \Rightarrow |x| \geq 3$$

سؤال: اگر عدد a صفر یا منفی باشد، وضعیت دو حالت بالا چگونه خواهد شد؟

✨ **مثال:** برای عددهای حقیقی x و y موارد زیر را نشان دهید:

الف) $-|x| \leq x \leq |x|$

ب) با توجه به قسمت قبل نشان دهید $|x| + |y| \geq x + y \geq |x| - |y|$ و سپس نتیجه بگیرید که:

$$|x+y| \leq |x| + |y|$$

نامساوی بالا را «نامساوی مثلث» گویند.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پ) از قسمت قبل نتیجه بگیرید که همواره:

$$|x - y| \leq |x| + |y|$$

حل معادلات:

معمولاً معادلات قدرمطلق با تبدیل آن‌ها به صورت $|x| = a$ طبق حالت‌های زیر حل می‌شوند:

▪ اگر a منفی باشد، معادله بدون جواب است. برای نمونه، معادله $|x| + 2 = 0$:

$$|x| + 2 = 0 \rightarrow |x| = -2 \quad \text{بدون جواب}$$

▪ اگر a مثبت باشد، طبق قاعده‌ی: $|x| = a \Rightarrow x = \pm a$ ، جواب‌ها در دو حالت مشخص می‌شوند.

برای نمونه، معادله $|2 - x| - 1 = 0$:

$$|2 - x| - 1 = 0 \rightarrow |2 - x| = 1 \rightarrow \begin{cases} 2 - x = 1 \Rightarrow x = 1 \\ 2 - x = -1 \Rightarrow x = 3 \end{cases} \quad \text{دو جواب}$$

▪ در حالت خاص $a = 0$ ، فقط یک جواب داریم: $|x| = 0 \Rightarrow x = 0$. برای نمونه، معادله $|2 - x| = 0$:

$$|2 - x| = 0 \rightarrow 2 - x = 0 \Rightarrow x = 2 \quad \text{یک جواب}$$

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

معادله $|x| - 1 = 2$ را به روش جبری حل کنید.

پاسخ

مثال: معادله $x^2 - |x| - 6 = 0$ را حل کنید.

پاسخ

تذکر:

اگر معادله دارای چندین قدرمطلق باشد، می‌توان با تعیین محدوده‌های گوناگون x ، جواب‌های دقیق را تعیین کرد. (برای تعیین فقط تعداد جواب‌ها، معمولاً روش هندسی بهتر است.)

مثال: معادله $|x - 1| + |x + 2| = 5$ چند جواب دارد؟

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



حالت خاص:

طبق مفهوم قدرمطلق، در تساوی $|a|=|b|$ ، فقط دو حالت ممکن است:

$$a = -b \quad (\text{و } a \text{ و } b \text{ قرینه باشند.}) \quad \text{یا} \quad a = b \quad (\text{و } a \text{ و } b \text{ برابر باشند.})$$

دلیل به روش دیگری هم قابل بیان است:

$$\begin{aligned} |a|=|b| &\rightarrow |a|^2=|b|^2 \rightarrow a^2=b^2 \xrightarrow{a^2-b^2=0} (a-b)(a+b)=0 \\ &\rightarrow \begin{cases} a-b=0 \Rightarrow a=b \\ a+b=0 \Rightarrow a=-b \end{cases} \end{aligned}$$

چند نمونه‌ی دیگر از حل معادلات قدرمطلق ببینید.

مثال: معادله‌ی $|1-2x|=|x+3|$ را به دو روش زیر حل کنید.

الف) با استفاده از خواص قدرمطلق.

ب) به توان رسانی دو طرف معادله.

مثال: (از کتاب) معادله‌ی قدرمطلق $|x-1|=4-3x$ را به دو روش حل کنید:

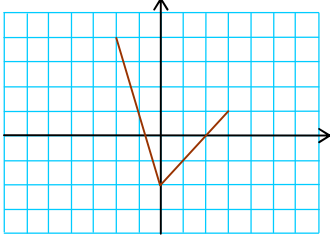
الف) تعریف قدرمطلق

ب) توان رسانی



در پایان این بخش، رسم نمودار $|f(x)|$ توسط نمودار $f(x)$ را خواهیم دید.

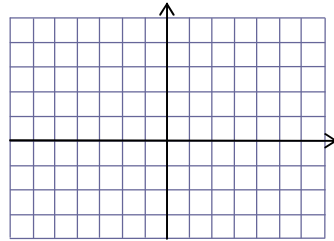
🌟 **مثال:** نمودار تابع $y = f(x)$ به صورت روبه‌رو داده شده است.



الف) نمودار $y = -f(x)$ را رسم کرده و روش رسم را توصیف کنید.

ب) چگونه با توجه به قسمت الف) می‌توان روشی برای رسم نمودار $y = |f(x)|$ بیان کرد؟

پاسخ

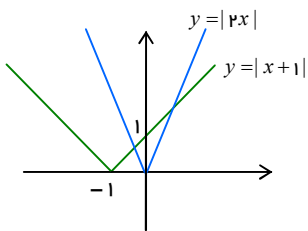


نمونه‌هایی دیگر؛

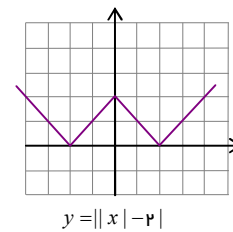
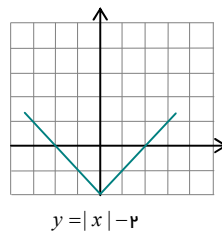
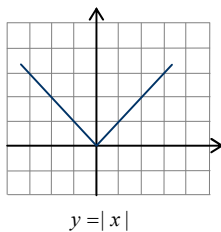
- نمودارهای تقریبی $y = |x+1|$ و $y = |2x|$ را در شکل مقابل می‌بینید.

توجه کنید:

طبق نمودارها، معادله‌ی $|2x| = |x+1|$ دارای دو جواب مثبت و منفی است.



- رسم نمودار $y = ||x| - 2|$ را در طی سه مرحله می‌بینید:



توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: معادله $\|x|-1\|=k$ بیش از دو جواب دارد. حدود k را تعیین کنید.

پاسخ

پاسخ دهید (۵)

۱- معادله $\frac{2-x}{|x-3|}=1$ را حل کنید.

۲- به روش هندسی:

الف) معادله $|x+1|=x^2-4x+3$ را حل کنید.

ب) نامعادله $|x-2|\leq\frac{1}{4}x+2$ را حل کنید.

۳- نمودار تابع $f(x)=\|x\|-3$ را رسم کرده و به کمک آن معادله $f(x)=2$ را حل کنید. (نهایی؛ فرورد ۱۴۰۲)

۴- در مورد تابع $f(x)=|x^2-2x|$:

الف) نمودار تابع را رسم کنید.

ب) ابتدا تعداد جواب‌های معادله $f(x)=2$ را به روش هندسی و سپس جواب‌ها را به روش جبری تعیین کنید.

منتفب کتاب:

۱- تعداد و مقدار تقریبی ریشه‌های معادله $|x-1|=x^2-x-1$ را به روش هندسی مشخص کنید.

۲- با استفاده از تعیین علامت، ضابطه‌ی توابع $f(x)=x|x|$ و $g(x)=|x^2-1|$ را بدون قدرمطلق بنویسید.

۳- بر روی محور طول‌ها چه نقاطی وجود دارد که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو نقطه به طول‌های -1 و 3 روی این محور برابر 6 باشد؟

۴- معادله $\sqrt{x^2-2x+1}=2x+1$ را حل کنید.

۵- نمودار توابع زیر را رسم کنید و سپس معادله‌های به دست آمده به ازای $y=3$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.

الف) $y=x-\frac{x}{|x|}$ ب) $y=x^2-6x$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۶- نمودار $f(x) = |x - 2|$ را رسم کنید و سپس معادله $f(x) = 1$ را به روش هندسی و جبری حل کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

چند عدد صحیح منفی در مجموعه جواب معادله $|x^2 + x - 4| = |2x + 9| + |x^2 + 3x + 5|$ قرار ندارند؟



هندسه تحلیلی

در این بخش، مطالب ضروری در مورد مختصات نقاط و معادلات خطها که در مباحث درسی بعدی فراوان به کار خواهند رفت، را می‌بینیم.

فاصله‌ی نقاط:

اگر نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ در صفحه داده شوند، فاصله‌ی آنها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(دلیل این رابطه با نمایش نقاط در دستگاه و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

حالت‌های خاص:

▪ اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_1 = x_2$ ، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

▪ اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_1 = y_2$ ، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

▪ فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ سریع محاسبه می‌گردد:

$$OA = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

مثال: (مشابه کتاب) نشان دهید نقطه‌ی $M(5, -5)$ روی عمود منصف پاره‌خط AB با نقاط $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ قرار دارد.

پاسخ

مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(2, -1)$ و $C(-1, -1)$ داده شده است. الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟

ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



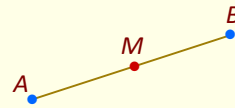
مثال: اگر $A(4,4)$ و $B(1,1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

وسط پاره خط:

اگر نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:

$$M(x_M, y_M) : \begin{cases} x_M = \frac{x_1 + x_2}{2} \\ y_M = \frac{y_1 + y_2}{2} \end{cases}$$



مثال: اگر $A(4,5)$ و $B(2,1)$ ، طول میانه‌ی OM در مثلث OAB را حساب کنید.

پاسخ

در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: الف) قرینه‌ی نقطه‌ی $E(1,2)$ نسبت به نقطه‌ی $M(-1,4)$ را مشخص کنید.

ب) قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha, \beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

نتیجه:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha, \beta)$ نسبت به مبدأ به صورت $Q(-\alpha, -\beta)$ تعیین می‌شود.

مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را

نشان دهید:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \quad \text{و} \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



در نتیجه:

اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می‌توان مشخص کرد.



شیب خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت (یعنی: تقسیم) تغییر عرض‌ها به تغییر طول‌ها را شیب آن خط می‌گویند.

در نتیجه:

اگر دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط داده شوند، شیب خط چنین به دست می‌آید:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

بعلاوه:

اگر معادله‌ی خط را به صورت منظم بنویسیم، یعنی:

y با ضریب $+1$ در یک سمت و بقیه‌ی عبارات در سمت دیگر معادله باشد.

در این صورت:

همیشه «ضریب x برابر شیب خط» و «عدد ثابت برابر عرض از مبدأ» خواهد شد.

برای نمونه:

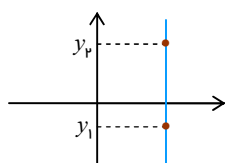
در خط $3x - 6y = 1$ ، شیب برابر $m = \frac{1}{6}$ و عرض از مبدأ برابر $q = -\frac{1}{6}$ است. زیرا:

$$3x - 6y = 1 \rightarrow -6y = -3x + 1 \xrightarrow{\div(-6)} y = \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}$$

حالت‌های خاص:

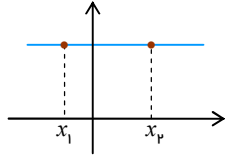
■ در محاسبه‌ی شیب، اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_2 = x_1$ ، مقدار $m = \frac{y_2 - y_1}{0}$ تعریف نشده است. این حالت

فقط در مورد خط‌های عمودی اتفاق می‌افتد:



پس: در مورد خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

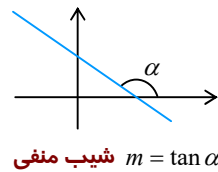
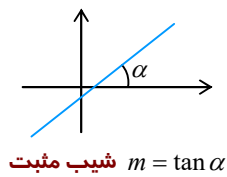
▪ اگر عرض‌ها برابر باشند: $y_1 = y_2$ ، آنگاه شیب برابر $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خط‌های افقی رخ می‌دهد:



پس: شیب هر خط افقی برابر صفر است.

به یاد داشته باشید:

شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است.



در نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیب‌های آن‌ها برابر باشد.

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب m : و **مختصات یک نقطه روی آن: (x_0, y_0)**

با این داشته‌ها:

معادله‌ی خط چنین نوشته خواهد شد:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

زیرا:

اگر (x, y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب خط باید:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: خط گذرا از نقطه‌ی $(-1, 2)$ و موازی خط $l: 3x - y = 1$ ، محور x را با کدام طول قطع می‌کند.

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



خط‌های عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m \times m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$

به عبارت دیگر:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا m' حاصل شود.

مثال: خطی گذرنده از نقطه‌ی $(1, -2)$ و عمود بر خط $2y + x = 1$ ، محور y را با کدام عرض قطع می‌کند.

پاسخ

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

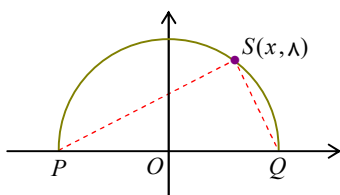
نقاط $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} k \\ -k \end{bmatrix}$ سه رأس مثلث ABC هستند. اگر مثلث در رأس B قائمه باشد، مقدار k را بیابید.

پاسخ

مثال: مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(5, 1)$ و $B(10, 4)$ داده شده است. الف) معادله‌ی ضلع AB را بنویسید.

ب) با استفاده از الف)، معادله‌ی ضلع AD را بنویسید.

مثال: (از کتاب با تغییر)



نقطه‌ی $S(x, y)$ روی نیم دایره‌ای به شعاع ۱۰ واحد مطابق شکل داده شده است. مختصات S را مشخص کنید. سپس به دو روش زیر نشان دهید مثلث PSQ قائم الزویه است:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



الف) رابطه‌ی فیثاغورس

ب) شیب خط‌ها

پاسخ ✓

مقایسه‌ی خطوط:

اگر معادلات دو خط به صورت استاندارد $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ نوشته شوند، آنگاه دو خط:

▪ موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خط‌ها متقاطع‌اند.

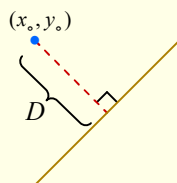
▪ بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

▪ بر هم عمودند، هرگاه: $aa' + bb' = 0$.

مثال: مقدار m را طوری تعیین کنید که دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب باشد.

پاسخ ✓

فاصله‌ی نقطه تا خط:



باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax + by + c = 0$ نوشت. سپس:
فاصله‌ی یک نقطه‌ی (x_0, y_0) از این خط برابر است با:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

یوئره:

فاصله‌ی مبدأ مختصات $(0, 0)$ تا این خط برابر است با:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه کنید که فاصله‌ی نقطه تا خط:

- همان طول پاره‌خط عمود رسم شده از نقطه به خط است.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



• کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است.

مثال: دو خط $l_1: 2x + y = -1$ و $l_2: -x + 2y = -7$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(7, 9)$ از خط l_2 را به دست آورید.

مثال: نقطه‌ی $A(2, 3)$ رأس مربعی است که خط $2x + y - 2 = 0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ ✓

مثال: (از کتاب) دو خط $3x + 2y = 1$ و $2x - 3y = 2$ معادله‌های دو ضلع یک مستطیل هستند و $A(2, 5)$ یک رأس مستطیل است. مساحت مستطیل را حساب کنید.

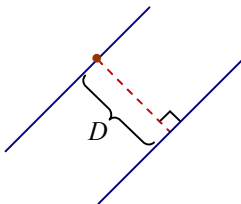
پاسخ ✓

فاصله دو خط موازی:

دو روش برای محاسبه‌ی این فاصله وجود دارد:

روش اول:

فاصله‌ی مورد نظر برابر فاصله‌ی نقطه‌ی دلخواهی روی یکی از خط‌ها تا خط دیگر است.



توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

روش دوم:

با ضرب معادلات دو خط در عددهای مناسبی، آن‌ها را به صورت مشابه $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ بنویسید. آنگاه فاصله‌ی دو خط برابر است با:

$$D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

دلیل:

طبق روش اول، نقطه‌ای روی خط دوم انتخاب می‌کنیم:

$$y = 0 \rightarrow x = -\frac{c'}{a} \Rightarrow \left(-\frac{c'}{a}, 0\right)$$

کافی است فاصله این نقطه تا خط اول را حساب کنیم:

$$\frac{\left|a\left(-\frac{c'}{a}\right) + b(0) + c\right|}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{|-c' + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

مثال: فاصله‌ی دو خط $x + 2y = 1$ و $y = 2 - \frac{x}{4}$ را حساب کنید.

پاسخ ✓

مثال: معادلات دو ضلع یک مربع به صورت $2x + 3y = -4$ و $4x + 6y + m = 0$ است. اگر مساحت مربع $\frac{9}{13}$ باشد،

مقدار m را حساب کنید.

پاسخ ✓

پاسخ دهید (۶)

۱- نقطه‌ی $P(4 - 3m, 2m - 6)$ روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد. فاصله‌ی P از مبدأ را بیابید.

۲- سه خط $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 4y + 10 = 0 \\ (k + 1)x - ky = 0 \end{cases}$ در یک نقطه متقاربانند (یعنی هر سه در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند). k را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



راهنمای: نقطه‌ی تقاطع دو خط اول را تعیین کنید؛ خط سوم نیز باید از این نقطه عبور کند!

۳- مثلث با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ داده شده است.

الف) آیا این مثلث متساوی‌الساقین است؟

ب) معادله‌ی میانه‌ی AM را نوشته و طول آن را حساب کنید.

۴- نشان دهید نقطه‌ی $C(-12, 11)$ روی عمود منصف پاره‌خط واصل دو نقطه‌ی $A(0, -3)$ و $B(6, 15)$ قرار دارد.

۵- معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB با نقاط $A(-2, 1)$ و $B(3, 4)$ را به دو روش بنویسید:

الف) تعیین شیب و نقطه‌ای روی آن
ب) فرمول فاصله‌ی دو نقطه در صفحه

۶- هرگاه $A(2, -2)$ و $C(3, 2)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، معادله‌ی قطر BD را بنویسید.

۷- خط d به معادله‌ی $2y + x = 5$ و نقطه‌ی $A(4, 3)$ داده شده است. از نقطه A عمود AH را بر خط وارد کرده‌ایم.

الف) شیب AH را حساب کرده و معادله‌ی خط AH را بنویسید.

ب) مختصات نقطه‌ی H را توسط حل دستگاه تعیین کنید.

پ) طول AH را به دو روش حساب کنید.

۸- فاصله‌ی نقطه‌ی $A(1, 2)$ از خط به معادله‌ی $ax + 4y = 1$ برابر ۲ است. مقدار a را بیابید.

۹- فاصله‌ی دو خط موازی به معادله‌های $y = x + 1$ و $y = x + 2$ را حساب کنید.

منتفب کتاب:

۱- دو انتهای یکی از قطرهای دایره‌ای نقاط $A(0, 6)$ و $B(8, -8)$ هستند. اندازه‌ی شعاع و مختصات مرکز دایره را بیابید.

۲- خط $4x + 3y = 5$ بر دایره‌ی به مرکز $O(-1, 2)$ مماس است. طول شعاع دایره را بیابید.

۳- نقاط $A(-11, -13)$ ، $B(-3, 3)$ و $C(3, 1)$ سه رأس مثلث ABC می‌باشند.

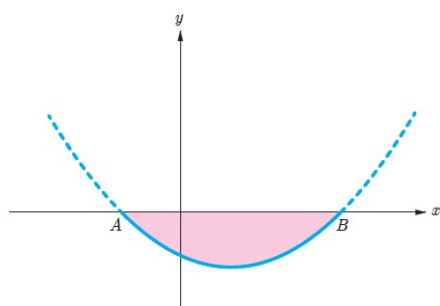
الف) طول عمودی را که از رأس B در میانه نظیر رأس C وارد می‌شود به دست آورید.

ب) مختصات رأس D را چنان تعیین کنید که $ABCD$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

۴- نقطه‌ای روی خط $y = 2x$ تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن تا مبدأ مختصات و نقطه $A(2, 4)$ برابر ۵ باشد.

۵- شکل نمای جانبی یک عدسی از منحنی $y = x^2 - 8x - 20$ به صورت

روبه‌رو داده شده است: A و B نقاط انتهایی عدسی هستند.



اگر عدسی کاملاً متقارن و l بر حسب میلی‌متر باشد، بیشترین ضخامت

عدسی را حساب کنید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۶- نقاط $A(۴, ۲)$ ، $B(۱, -۱)$ و $C(۸, -۲)$ سه رأس مثلث ABC و نقاط H و M به ترتیب پای ارتفاع AH و میانه‌ی AM روی ضلع BC هستند. طول MH را حساب کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

اگر دو ضلع یک شش ضلعی منتظم روی خط‌های $x + y = ۴$ و $۲x + ۲y = ۱$ واقع باشند، مساحت شش ضلعی را حساب کنید.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴