The Best TEACHER

**ترکیب:** دانش شما + محتوای بی‌نظیر تدریس ما

درسنامه آپدیت

تمرین و پاسخنامه

کوییز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»

تدریس ریاضیات

چند نمونه از نتایج درخشان برخی از همکاران مجموعه درس‌آموز: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ‌کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ١٤٠٤)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ١٤٠٢)

## تدریس ریاضیات کنکور:

## از متوسط تا پیشرفته و بسیار پیشرفته

100%

## با ترکیب دانش خود و محتوای آموزشی ما، آسان، روان و مؤثر تدریس کنید!

**(اختصاصی دبیران، مدرسان و اساتید)**

**درسنامه کنکوری**

- بیان دقیق و کامل مفاهیم ضروری
- نکات لازم و سرعتی
- بیان نمونه‌ها از ساده به دشوار جهت تفهیم

\+

درسنامه ویژه شاگردان نخبه (۱۰۰ درصدی)
در انتهای هر مبحث

**تنوع نمونه تست**

تست‌های تألیفی، تست‌های جدیدترین کنکورها و معتبرترین آزمون‌ها با ترتیب مناسب آماده بررسی است.

**تمرین تست**

تعداد قابل توجهی تست تمرینی متوسط، دشوار و دشوارتر که به شاگردان واگذار کنید. (پاسخ‌نامه تشریحی تحویل می‌شود.)

دریافت جدیدترین نمونه‌ها:

۰۹۳۵ ٦۰۰ ٨٤٥٤

**جزوات شخصی شما**
**برای تدریس حرفه‌ای ریاضیات کنکور**

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و . . . روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

**و**

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.

TEST

# فهرست

کنکور
# ریاضیات گسسته

TEST

۱

## نظریه اعداد (۱)

| فهرست | صفحه |
|---|---|

## ۱ انواعی از استدلال

در تعیین وضعیت هر گزاره (ادعا یا حکم)، یکی از این دو حالت رخ می‌دهد: «رد» یا «تایید». رد کردن نسبتاً ساده است:

**نکته ۱**

**مثال نقض:**

مثالی است که برای نشان دادن نادرستی یک حکم کلی آورده می‌شود.

(اگر بتوانیم برای یک حکم مثال نقض بیاوریم، در واقع اثبات کرده‌ایم که آن قطعاً نادرست است.)

**توجه کنید:**

مثالی که برای نقض یک حکم کلی آورده می‌شود، باید دارای دو شرط زیر باشد:

- فرضِ عبارت داده شده را برقرار سازد، ولی:
- حکمِ آن عبارت نادرست شود.

برای نمونه؛

برای رد گزاره‌ی شرطی: $(A\bigcap B=A\bigcap C \Rightarrow B=C)$، با تصور، رسم شکل یا کمی بررسی می‌فهمیم که گزاره نادرست است، باید مثال‌هایی از مجموعه‌ها بیاوریم که $A\bigcap B=A\bigcap C$ بوده، ولی تساوی $B=C$ برقرار نباشد.

مثال نقض:

$$A=\{۱,۲\}\ ,\ B=\{۱,۵\}\ ,\ C=\{۱,۳,۴\}$$

اعداد کدام گزینه کلیت حکم «حاصل‌ضرب هر دو عدد گنگ، عددی گنگ است» را نقض می‌کند؟

❶ $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۲۱۶}$  ❷ $\sqrt{۶}$ و $\sqrt{۱۲}$

❸ $\sqrt{۱۲}$ و $\sqrt{۱۸}$  ❹ $\sqrt{۱۸}$ و $\sqrt{۲۱۶}$

پاسخ

در مورد سه مجموعه‌ی ناتهی $A$، $B$ و $C$، کدام رابطه با مثال نقض رد نمی‌شود؟

❶ $A-B=A-C \Rightarrow B=C$  ❷ $A\bigcup B=A\bigcup C \Rightarrow B=C$

❸ $A\times B=A\times C \Rightarrow B=C$  ❹ $A\bigcap B=A\bigcap C \Rightarrow B=C$

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

ممکن است با بررسی مثال‌های گوناگون، نتوانیم هیچ مثال نقضی برای یک حکم پیدا کنیم و تمام مثال‌های آورده شده، حکم را تایید کنند. توجه داشته باشید:

**اولاً:** هر تعداد مثال در تایید یک حکم آورده شود، باعث اثبات آن نخواهد شد، چون:

امکان دارد مثال نقض موجود باشد، ولی ما ندانیم.

**ثانیاً:** وقتی مثال‌های متعدد یک حکم را تایید می‌کنند، احتمال درست بودن حکم در حالت کلی بیشتر می‌شود.

در واقع:

گاهی با مشاهده‌ی چندین نمونه یا مثال، درستی حکم را قبول می‌کنیم.

این روش نتیجه‌گیری را **«استدلال استقرایی»** گویند که در علوم تجربی، کاربرد فراوان دارد.

اما در ریاضیات؛

بعد از به‌کار بردن استدلال استقرایی، حکم را به عنوان یک **«فرضیه»** می‌پذیریم.

برای این‌که فرضیه تایید قطعی شود، نیاز به اثبات دارد که توسط دو عامل زیر انجام می‌شود.

- **حقایق پذیرفته شده**

  اصول و احکامی که قبلاً درستی آن‌ها اثبات شده است.

- **روش‌های درست استنتاج**

  حقایق پذیرفته شده با روش‌های درست استدلال، مفروضات مسأله را به‌کار می‌برند تا یک حکم جدید اثبات شود.

### حقایق پذیرفته شده:

برخی حقایق پذیرفته شده که اطلاع از آن‌ها ضروری است را ببینید:

- هر عدد زوج به صورت $2k$ و هر عدد فرد به صورت $2k-1$ است.
- هر عدد گویا را می‌توان به صورت کسر $\frac{m}{n}$ نوشت که $m$ و $n$ دو عدد صحیح بوده و مخرج غیر صفر است. بعلاوه:

**هر عددی که نتوان آن را به صورت کسر گویا نوشت، گنگ است.**

برای نمونه؛

عددهای $\pi$، $\sqrt{2}$، $\sqrt{3}$ و $\sqrt{5}$ همگی گنگ هستند.

- عددهای طبیعی یا صحیح متوالی به صورت زیر هستند:

$$k\ ,\ k+1\ ,\ k+2\ ,\ k+3\ ,\ \dots$$

- عددهای متوالی زوج به صورت:

$$2k\ ,\ 2k+2\ ,\ 2k+4\ ,\ \dots$$

و عددهای متوالی فرد به صورت زیر هستند:

$$2k+1\ ,\ 2k+3\ ,\ 2k+5\ ,\ \dots$$

## روش‌های اثبات:

می‌توان روش‌های اثبات احکام ریاضی را در دو نوع کلی طبقه بندی کرد:

**اثبات مستقیم** و **اثبات غیرمستقیم**

❖ **اثبات مستقیم**

فرض مسأله و حقایق شناخته شده‌ی قبلی به طور مناسب به‌کار رفته و اثبات حکم صورت می‌پذیرد.

❖ **اثبات غیر مستقیم**

در این گروه از روش‌های اثبات، به نوعی حکم مسأله و حقایق قبلی را مورد استفاده قرار داده و درستـ بـودن حکـم را نتیجه می‌گیریم.

نمونه‌هایی از اثبات مستقیم ببینید:

- حاصل جمع یا تفریق دو عدد زوج یا دو عدد فرد همواره زوج است. دلیل:

$$2k+2k'=2\underbrace{(k+k')}_{=k''}=2k''$$

$$2k-1+2k'-1=2\underbrace{(k+k'-1)}_{=k''}=2k''$$

اما اگر یکی زوج و دیگری فرد باشد، حاصل فرد است. دلیل:

$$2k+2k'-1=2\underbrace{(k+k')}_{=k''}-1=2k''-1$$

- حاصل‌ضرب دو عدد فرد، فرد بوده و در غیر این‌صورت حاصل‌ضرب زوج است:

$$(2k-1)(2k'-1)=4kk'-2k-2k'+1=2\underbrace{(2kk'-k-k')}_{=k''}+1=2k''+1$$

- حاصل جمع، تفریق، ضرب و تقسیم دو عدد گویا همیشه عددی گویا است. (در تقسیم باید مخرج غیرصفر باشد.)

$$\frac{m}{n}\pm\frac{p}{q}=\frac{mq\pm np}{nq} \quad و \quad \frac{m}{n}\times\frac{p}{q}=\frac{mp}{nq} \quad و \quad \frac{m}{n}\div\frac{p}{q}=\frac{m}{n}\times\frac{q}{p}=\frac{mq}{np}$$

- مربع هر عدد زوج، زوج بوده و مربع هر عدد فرد، فرد است:

**حالت $n$ عددی زوج:**

$$n=2k \;\rightarrow\; n^2=4k^2=2\times\underbrace{2k^2}_{=k'}=2k' \;\Rightarrow\; n^2=2k'$$ **زوج است.**

**حالت $n$ عددی فرد:**

$$n=2k+1 \;\rightarrow\; n^2=4k^2+4k+1=2\times\underbrace{(2k^2+2k)}_{=k'}+1=2k'+1 \;\Rightarrow\; n^2=2k'+1$$ **فرد است.**

$a$ و $b$ عددهایی صحیح و $7a-3b$ عددی زوج است. کدام مورد قطعاً صحیح است؟

❶ $ab$ فرد است.
❷ $a^2-b^2+1$ فرد است.
❸ $a-6b$ زوج است.
❹ $4a+3b$ زوج است.

**پاسخ**

## بررسی تمام حالات:

تکنیک زیر گاهی در اثبات مستقیم مورد نیاز است:

تفکیک فرض به تمام حالت‌های ممکن، و بررسی درستی حکم در هر حالت.

برای نمونه؛

نشان می‌دهیم حاصل‌ضرب هر دو عدد صحیح متوالی، زوج است. دو عدد را به صورت $n$ و $n+1$ در نظر بگیرید. برای $n$ فقط دو حالت ممکن است رخ بدهد:

- $n$ زوج باشد؛ در این صورت:

$$n=2k:\quad n\times(n+1)=2k(2k+1)=2\times\underbrace{k(2k+1)}_{=k'}=2k'$$

**درستی حکم تایید شد.**

- $n$ فرد باشد؛ در این صورت:

$$n=2k+1:\quad n\times(n+1)=(2k+1)(2k+2)=\underbrace{(2k+1)(k+1)}_{=k'}\times 2=2k'$$

در این حالت هم درستیِ حکم تایید شد.

پس حکم در کل درست است.

در ادامه، دو روش در اثبات غیر مستقیم و نمونه‌هایی از هر کدام ببینید:

### نکته ۲

**برهان خُلف:**

برای استفاده از این روش، طبق گام‌های زیر عمل می‌کنیم:

- حکم مورد نظر را نادرست فرض می‌کنیم؛ **(فرض خلف)**
- با توجه به فرضِ مرحله‌ی قبل و بیان استدلالی مناسب، «حقایق شناخته شده» یا «فرض» آن قضیه یا مسأله را نقض می‌کنیم.
- نتیجه می‌گیریم حکم آن مسأله نمی‌تواند نادرست باشد و از ابتدا صحیح بوده است.

نمونه‌هایی مهم:

**الف)** نشان می‌دهیم: اگر $n^2$ فرد باشد، آنگاه $n$ هم فرد است.

فرض کنید $n$ فرد نباشد؛ پس $n$ زوج است و چنان که قبلاً دیدیم، باید $n^2$ هم زوج باشد که با فرض تناقض دارد.

**پس حکم نمی‌تواند نادرست باشد و لذا صحیح خواهد بود.**

**ب)** نشان می‌دهیم: اگر $a$ گنگ و $b$ گویا باشد، $a+b$ گنگ است. اگر $a+b$ گویا باشد:

$$a=(a+b)-b$$ (تفریق دو عدد گویا که باید گویا باشد، ولی غیرممکن است.)

**پ)** نشان می‌دهیم: اگر $a$ گنگ و $b\neq 0$ گویا باشد، $ab$ گنگ است. اگر $ab$ گویا باشد:

$$a=\frac{ab}{b}$$ (تقسیم دو عدد گویا که باید گویا باشد، ولی غیرممکن است.)

**تکمیل بحث بالا: (مهم)**

الف) احکام زیر با مثال نقض رد می‌شوند: (چرا؟)

- جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم دو عدد گنگ، عددی گنگ است.
- جمع، تفریق، ضرب یا تقسیم دو عدد گنگ، عددی گویا است.

ب) دیدیم که:

«اگر عدد گویا غیر صفر باشد، ضرب آن در یک عدد گنگ، یا تقسیم آن بر یک عدد گنگ، همواره گنگ است.»

با وجود مطلب بالا، ضرب و تقسیم گویا و گنگ می‌تواند گویا هم باشد. زیرا:

برای عدد گنگ $a$ و عدد گویای $\circ$، مقادیر $\circ \times a = \circ$ و $\frac{\circ}{a} = \circ$ گویا خواهند شد.

**حالت ویژه:**

حاصل تقسیم عدد گنگ بر عدد گویا، هیچ‌گاه گویا نخواهد شد! (توضیح دهید.)

اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ و $\alpha + \beta$ گویا باشد، آنگاه $\alpha - \beta$ ........ بوده و $\alpha + ۲\beta$ ......... است.

❶ گنگ - گنگ ❷ گنگ - گویا ❸ گویا - گنگ ❹ گویا - گویا

پاسخ

اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ و $\frac{\beta}{۲} + \frac{\alpha}{۵}$ گویا باشد، آنگاه $۲\alpha - ۵\beta$ ........ بوده و $۲\alpha + ۵\beta$ ......... است.

❶ گنگ - گنگ ❷ گنگ - گویا ❸ گویا - گنگ ❹ گویا - گویا

پاسخ

$\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ و $۲\alpha + ۶\beta$ گویا است. اگر $۲\alpha + m\beta$ نیز گویا باشد، $m$ کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۳ ❸ ۱۰ ❹ ۱۵

پاسخ

حکم «اگر $A$ و $B$، دو ماتریس هم مرتبه باشند و $AB = \overline{O}$، آنگاه $A = \overline{O}$ یا $B = \overline{O}$» مفروض است. برای . . . . . . درستی این حکم از روش . . . . . . استفاده می‌کنیم.

❶ اثبات - استدلال استنتاجی ❷ رد - مثال نقض

❸ اثبات - برهان خلف ❹ رد - برهان خلف

پاسخ

**توجه کنید: (مهم)**

اگر $a_1$، $a_2$ و $a_3$ عددهایی صحیح و $b_1$، $b_2$ و $b_3$ همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری باشند، حاصل $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$ همواره عددی زوج است. زیرا:

اگر حاصل‌ضرب فرد باشد، هر سه عامل فرد بوده و جمعشان نیز باید فرد شود. (غیر ممکن؛ زیرا جمعشان صفر است!)

$a_1$، $a_2$ و $a_3$ عددهایی صحیح و $b_1$، $b_2$ و $b_3$ همان اعداد، ولی با ترتیب دیگری هستند. چه تعداد از عددهای زیر قطعاً زوج هستند؟

الف) $5a_1a_2a_3-3b_1b_2b_3$

ب) $(a_1-b_1)(a_2-b_2)(a_3-b_3)$

پ) $a_1b_1+5a_2b_2+10a_3b_3$

ت) $(a_1-b_1)(a_1-b_2)^2(a_1-b_3)^3$

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

پاسخ

**نکته ۳**

**اثبات بازگشتی:**

در اثبات به‌طریق بازگشتی به ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

- حکم را موقتاً می‌پذیریم.
- با انجام استدلال‌های مناسب در چند مرحله به یک رابطه‌ی بدیهی یا فرض داده شده می‌رسیم.
- اکنون اگر تمام مراحل را بتوان از آخر به اول نتیجه گرفت، یعنی استنتاج‌های انجام شده برگشت‌پذیر (دو شرطی) باشند، درستی حکم تأیید می‌شود.

برای نمونه؛

نشان می‌دهیم برای $a>0$، نامساوی $a+\frac{1}{a}\geq 2$ برقرار است. حکم را پذیرفته و طرفین آن را در $a$ ضرب می‌کنیم:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \xrightarrow{\times a} a^2+1\geq 2a \to a^2+1-2a\geq 0 \Rightarrow (a-1)^2\geq 0$$

عبارت $(a-1)^2\geq 0$ همواره درست است و بعلاوه تمام مراحل بالا دو شرطی هستند. در واقع:

$$a+\frac{1}{a}\geq 2 \Leftrightarrow a^2+1\geq 2a \Leftrightarrow a^2+1-2a\geq 0 \Leftrightarrow (a-1)^2\geq 0$$

کدام یک از عبارت‌های زیر، یک قضیه‌ی دو شرطی است؟ ( $a,k \in \mathbb{R}$ )

❶ اگر $a+\frac{1}{a}\geq ۲$ باشد، آنگاه $a^{۲}+\frac{1}{a^{۲}}\geq ۲$ است.

❷ اگر $a>۰$ باشد، آنگاه $a\neq -۱$ است.

❸ اگر $\alpha$ و $\beta$ دو عدد گنگ باشند، آنگاه $\alpha-\beta$ گویاست.

❹ اگر $k^{۳}>k^{۲}$ باشد، آنگاه $k>۱$ است.

پاسخ

در اثبات حکم $x^{۲}+y^{۲}+۱\geq xy+x+y$ برای اعداد حقیقی $x$ و $y$، همواره به کدام عبارت بدیهی می‌رسیم؟

❶ $(x-y)^{۲}+(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}\geq ۰$

❷ $(x+y)^{۲}+(x-۱)^{۲}+(y-۱)^{۲}\geq ۰$

❸ $(x-y)^{۲}+(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}\geq ۰$

❹ $(x+y)^{۲}+(x+۱)^{۲}+(y+۱)^{۲}\geq ۰$

پاسخ

در اثبات نامساوی $x^{۲}+y^{۲}-k^{۳}\geq xy+x+y$ به روش بازگشتی، حداکثر مقدار $k$ برای این‌که به یک عبارت بدیهی برسیم و مراحل برگشت‌پذیر باشند، کدام می‌تواند باشد؟

❶ $۰$

❷ $-\frac{۱}{۲}$

❸ $-\sqrt[۳]{۲}$

❹ $-\sqrt[۳]{۴}$

پاسخ

در اثبات نامساوی $\frac{۱}{\sqrt{x}}+\frac{۱}{\sqrt{y}}\geq \frac{۴}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$ از طریق اثبات بازگشتی، رابطه‌ی بدیهی به دست آمده کدام است؟

**( $x$ و $y$ دو عدد حقیقی مثبت هستند.)**

❶ $(x+y)^{۲}>۰$

❷ $x^{۲}+y^{۲}>۰$

❸ $(\sqrt{x}-\sqrt{y})^{۲}\geq ۰$

❹ $\sqrt{x}+\sqrt{y}>۰$

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

## ۲ بخش‌پذیری در $\mathbb{Z}$

معرفی دقیق مفهوم «تقسیم‌پذیری» یا «بخش‌پذیری»:

**نکته ۴**

**بخش‌پذیری:**

فرض کنید $a$ و $b \neq 0$ عددهایی صحیح باشند.

عدد $a$ بر $b$ «**بخش‌پذیر**» است، هرگاه عدد صحیح $k$ یافت شود که: $a = bk$. در این‌صورت می‌نویسیم: $b | a$.

بنابراین:

$$b | a \quad \Leftrightarrow \quad a = bk, \quad k \in \mathbb{Z}$$

اگر چنین عدد $k$ وجود نداشته باشد، می‌نویسیم: $b \nmid a$.

(عبارت $b | a$، به صورت « $b$ **عاد می‌کند** $a$ را» یا « $b$ **عدد** $a$ **را می‌شمارد**» خوانده می‌شود.)

برای نمونه:

$$4 \nmid 10 \quad \text{و} \quad 4 | -12$$

**بعلاوه:**

چند خاصیت مقدماتی عاد کردن:

- تمام اعداد بر ۱ و $-1$ بخش‌پذیر هستند؛ یعنی همواره: $\pm 1 | a$ .

$$a = 1 \times a \ \rightarrow \ 1 | a \quad \text{و} \quad a = -1 \times (-a) \ \rightarrow \ -1 | a$$

- هر عددی بر خودش بخش‌پذیر است. زیرا:

$$a = a \times 1 \ \Rightarrow \ a | a$$

به صورت کامل‌تر:

$$\pm a | \pm a$$

- بدیهی است که:

$$a | b \ \Leftrightarrow \ a | -b$$

- تمام اعداد صحیح، عدد صفر را عاد می‌کنند، زیرا: $a \times 0 = 0$. به عبارت دیگر:

صفر تنها عددی است که بر تمام اعداد بخش‌پذیر است، یعنی همواره: $a | 0$.

- هیچ عددی بر صفر تقسیم نمی‌شود؛ ولی چون تساوی $k \times 0 = 0$ برای هر عدد صحیح $k$ برقرار است، خواهیم داشت: $0 | 0$. بنابراین:

$$0 | a \ \Rightarrow \ a = 0$$

یعنی:

**عدد صفر فقط خودش را عاد می‌کند.**

چند نمونه‌ی دیگر:

الف) نشان می‌دهیم که برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $a|a^n$. برای $n=1$ حکم بدیهی است.

اگر $n>1$ باشد، در این صورت:

$$a^n = a\times \underbrace{a^{n-1}}_{=k} \rightarrow a^n = ak \Rightarrow a|a^n$$

ب) نشان می‌دهیم که $a|b$ همیشه نتیجه می‌دهد: $a^n|b^n$. ( $n$ هر عدد طبیعی) چون برای یک $k$ صحیح داریم: $b=ak$. پس:

$$b^n=(ak)^n=a^n\times \underbrace{k^n}_{=k'}=a^n\times k' \Rightarrow a^n|b^n$$

اگر $a$، $b$ و $c$ سه عدد صحیح باشند، چه تعداد از روابط زیر درست است؟

الف) اگر $a|2b$، آنگاه $a|b^2$.

ب) اگر $a|bc$، آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

ت) اگر $a|b+c$، آنگاه $a|b$ یا $a|c$.

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۰

پاسخ

بیان دقیق یک مفهوم آشنا و مهم در نظریه اعداد:

**نکته ۵**

**عدد اول :**

عدد طبیعی $p>1$ را «**اول**» گوییم، هرگاه غیر از ۱ و خودش هیچ مقسوم‌علیه مثبتی نداشته باشد. سایر اعداد طبیعی بزرگ‌تر از یک «**مرکب**» محسوب می‌شوند. بنابراین:

$$a|p \Rightarrow a=\pm 1,\ a=\pm p$$

طبق بیان بالا:

عدد ۱ نه اول است و نه مرکب.

**توجه کنید:**

عدد ۲ تنها عدد اول زوج است؛ زیرا سایر عددهای زوج بر ۲ بخش‌پذیر بوده و اول نیستند.

مواردی ساده ببینید: ( دلایل در انتهای همین فصل)

- هر عدد اول $p>2$ به صورت $2k\pm 1$ است.
- هر عدد اول $p>3$ به صورت $6k\pm 1$ است.

**توجه کنید:**

در ذهن داشتن این‌که هر عدد طبیعی $n>1$ به صورت ضرب عددهای اول است، در موارد گوناگونی مفید واقع می‌شود.

اگر $a$ و $b$ عددهایی طبیعی باشند، $486|a^2$ و $405|b^3$، حداقل $a+b$ کدام است؟

❶ ۱۵۳ ❷ ۱۲۳ ❸ ۹۹ ❹ ۸۱

پاسخ

در ادامه ویژگی‌های اصلی شمارش و برخی کاربردهای هر کدام را ببینید:

**نکته ۶**

**ویژگی ۱:**

نتیجه گیری زیر برای هر عدد صحیح $m$ درست است:

$$a|b \Rightarrow a|bm$$

**دلیل:**

طبق فرض، برای یک $k \in \mathbb{Z}$ داریم: $b=ak$ و در نتیجه:

$$bm=a\underbrace{km}_{k'} \rightarrow bm=ak' \Rightarrow a|bm$$

**بعلاوه:**

خواص ساده‌ی زیر به آسانی نشان داده می‌شوند:

- اگر $a|b$، آنگاه $am|bm$.
- اگر $a|b$ و $c|d$، آنگاه $ac|bd$.
- اگر $ac|bc$ و $c\neq 0$ باشد، آنگاه داریم: $a|b$.

اگر $a$، $b$ و $c$ اعداد طبیعی و $a^2|bc$ و $c|a$، آنگاه کدام مورد صحیح است؟

❶ $a|b$ ❷ $b|a$ ❸ $b|ac$ ❹ $b|c$

پاسخ

**نکته ۷**

**ویژگی ۲ :**

شمارش، خاصیت تعدی دارد؛ یعنی:

اگر $a$ بر $b$ و $b$ بر $c$ بخش‌پذیر باشد، آنگاه: $a$ بر $c$ بخش‌پذیر است.

به صورت نمادین:

$$c\,|\,b \wedge b\,|\,a \quad\Rightarrow\quad c\,|\,a$$

**دلیل:**

طبق فرض، برای عددهای $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ck_1$ و $a = bk_2$. در نتیجه:

$$a = bk_2 = \underbrace{ck_1k_2}_{=k} \;\to\; a = ck \quad\Rightarrow\quad c\,|\,a$$

کاربرد ساده:

نشان می‌دهیم از رابطه‌ی $a\,|\,b$ نتیجه می‌شود: $a\,|\,b^n \;\; (n \in \mathbb{N})$

زیرا:

همواره $b\,|\,b^n$ است و در نتیجه طبق ویژگی قبل:

$$a\,|\,b \wedge b\,|\,b^n \quad\Rightarrow\quad a\,|\,b^n$$

**مثال: (مهم)**

با فرض $a^3\,|\,b^7$، نشان دهید:

$a^2\,|\,b^5$؛ ولی ادعای $a^2\,|\,b^4$ الزاماً صحیح نیست.

چون $a$ و $b$ از ضرب عددهای اول ساخته شده‌اند، می‌توانید آن‌ها را توان‌هایی از عدد اولی یکسان فرض کنید: یعنی آن‌ها به صورت‌های $a = p^m$ و $b = p^k$ باشند. طبق فرض:

$$(p^m)^3\,|\,(p^k)^7 \;\to\; p^{3m}\,|\,p^{7k} \;\to\; 3m \le 7k \xrightarrow{\times\frac{2}{3}} 2m \le \frac{14}{3}k \le 5k$$

بنابراین $p^{2m}\,|\,p^{5k}$ و به عبارت دیگر $a^2\,|\,b^5$.

«عبارت $a^2\,|\,b^4$ معادل $2m \le 4k$ است که ممکن است برقرار نباشد.»

کدام نتیجه‌گیری در مورد اعداد طبیعی $a$ و $b$ صحیح نیست؟

❶ $a^3\,|\,b^7 \Rightarrow a^4\,|\,b^9$

❷ $a\,|\,b,\; b^2\,|\,ac \Rightarrow b\,|\,c$

❸ $a\,|\,b,\; b^2\,|\,ac \Rightarrow a\,|\,c$

❹ $a^4\,|\,b^9 \Rightarrow a^3\,|\,b^7$

پاسخ

برای دو عدد صحیح $a$ و $b$ $(a \neq 0)$، اگر $a^3 | b^2$، آنگاه کدام رابطه‌ی زیر لزوماً درست نیست؟

❶ $a | b$ ❷ $a^2 | b$ ❸ $a^4 | b^5$ ❹ $a | b^2$

**پاسخ**

**نکته ۸**

**ویژگی ۳:**

این ویژگی مهم و کاربردی به صورت زیر بیان می‌شود:

اگر دو عدد بر عددی بخش‌پذیر باشند، آنگاه جمع و تفریقشان هم بر آن عدد بخش‌پذیر است.

با نماد ریاضی:

$$a | b \wedge a | c \quad \Rightarrow \quad a | b \pm c$$

**دلیل:**

طبق فرض، برای عددهای $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ داریم: $b = ak_1$ و $c = ak_2$. در نتیجه:

$$b \pm c = ak_1 \pm ak_2 = a\underbrace{(k_1 \pm k_2)}_{=k} \;\rightarrow\; b \pm c = ak \quad \Rightarrow \quad a | b \pm c$$

اگر $a - b | a$، آنگاه . . .

❶ $a | a - b$ ❷ $b | a - b$ ❸ $a | b$ ❹ $a - b | b$

**پاسخ**

**نتیجه:**

برای عددهای صحیح $m$ و $n$ همواره داریم:

$$\boxed{a | b \wedge a | c \quad \Rightarrow \quad a | bm \pm cn}$$

دلیل این مطلب، با توجه به ویژگی‌های اول و سوم بدیهی است.

اگر $۵a + ۹b | ۳a + ۴b$، آنگاه کدام یک از اعداد زیر مضرب $۳a + ۴b$ است؟

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

❶ $۲۴b$ ❷ $۲۱b$ ❸ $۱۸b$ ❹ $۱۵b$

پاسخ

اگر عدد طبیعی $a > ۳$ اعداد $۷m+۲$ و $۱۱m+۴$ را عاد کند، کدام مورد نمی‌تواند عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باشد؟ (نوبت ۲- کنکور ۱٤۰٤)

❶ $ak+۱$ ❷ $ak+۳$ ❸ $ak+۵$ ❹ $ak+۷$

پاسخ

به ازای بعضی از مقادیر $n \in \mathbb{N}$، اگر $\alpha | ۱۳n+۳$ و $\alpha | ۷n+۴$ و $\alpha \neq ۱$ باشد، آنگاه مجموع ارقام کوچک‌ترین عدد $n$، کدام است؟ (کنکور ۹۸)

❶ ۷ ❷ ۸ ❸ ۹ ❹ ۱۰

پاسخ

اگر $p$ عددی اول و $a$ طبیعی باشد، با فرض $pa | p^۲ + a$، حاصل $۲p - a$ کدام است؟

❶ $-۳$ ❷ $-۲$ ❸ ۲ ❹ ۰

پاسخ

اگر $۲n-۱ | ۲n^۲ + ۱$، تعداد جواب‌های طبیعی $n$ کدام است؟

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

پاسخ

نقاط به شکل $(a,b)$ روی منحنی $y=\frac{۳x-۱}{x+۲}$ قرار دارند. اگر $a,b\in\mathbb{Z}$ باشند، چند نقطه با این ویژگی روی ایـن منحنـی قرار دارد؟ (کنکور ۱۴۰۱)

❶ ۴ ❷ ۳ ❸ ۲ ❹ ۱

پاسخ

**توجه کنید:**

(مشابه تست قبل): اگر $n$ یک جواب رابطه‌ی $n-a\,|\,P(n)$ باشد، باید در رابطه‌ی $n-a\,|\,P(a)$ نیز صادق باشد:

$$\boxed{n-a\,|\,P(n)\ \Rightarrow\ n-a\,|\,P(a)}$$

بزرگ‌ترین عدد طبیعی $n$ که در رابطه‌ی $n+۴\,|\,n^۳+n+۱$ صدق کند، کدام است؟

❶ ۱۴۱ ❷ ۶۷ ❸ ۶۳ ❹ ۵۹

پاسخ

چند نقطه با مختصات صحیح روی منحنی $۸x^۲+xy+۳x-y=۰$ قرار دارد؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

پاسخ

**نکته ۹**

**ویژگی ۴:**

اگر داشته باشیم: $a\,|\,b$ و $b\neq ۰$ باشد، آنگاه $|a|\le|b|$. به صورت نمادین:

$$a\,|\,b\wedge b\neq ۰\ \Rightarrow\ |a|\le|b|$$

و به زبان ساده:

یک عدد صحیح غیرصفر نمی‌تواند بر عددهایی با اندازه‌ی بزرگ‌تر از خود بخش‌پذیر باشد.

**دلیل:**

طبق فرض، عدد $k\in\mathbb{Z}$ هست که: $b=ak$. در نتیجه:

$$|b|=|a||k| \xrightarrow{|k|\geq 1} |b|\geq|a|$$

برای نمونه؛

نشان می‌دهیم اگر $a$ و $b$ عددهایی صحیح و غیر صفر باشند، آنگاه:

$$a|b \wedge b|a \quad \Rightarrow \quad a=\pm b$$

طبق ویژگی قبل باید داشته باشیم:

$$|a|\leq|b| \quad \text{و} \quad |b|\leq|a|$$

بنابراین:

$$|a|=|b| \;\Rightarrow\; a=\pm b$$

**نکته ۱۰**

**بخش‌پذیری ضرب‌های متوالی:**

به چند مورد ساده ولی کاربردی در مورد ضرب عددهای متوالی توجه کنید:

- حاصل‌ضرب دو عدد صحیح متوالی همواره زوج است، چون یکی از آن‌ها فرد و دیگری زوج است:

$$n(n+1)=2k$$

- حاصل‌ضرب سه عدد صحیح متوالی مضرب ۶ است و در کل:
- حاصل‌ضرب $n$ عدد صحیحِ متوالی، همواره مضرب $n!$ است، یعنی بر $n!$ بخش‌پذیر است.

برای نمونه؛

نشان می‌دهیم مربع هر عدد فرد $n$ به صورت $8k+1$ است. چون $n=2q+1$ است:

$$n^2=(2q+1)^2=4q^2+4q+1=4\underbrace{q(q+1)}_{=2k}+1=8k+1$$

(این مطلب که مربع هر عدد فرد به صورت 8k+1 است را در ذهن داشته باشید.)

## ۳ ب.م.م و ک.م.م

ب.م.م (یعنی: بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک) و ک.م.م (یعنی: کوچک‌ترین مضرب مشترک)

### نکته ۱۱

**ب.م.م اعداد:**

فرض کنیم $a$ و $b$ دو عدد صحیح باشند که لااقل یکی از آن‌ها غیر صفر است. عـدد طبیعـی $d$ «**ب.م.م**» ایـن دو عدد است، هرگاه دو شرط برقرار باشد:

- $d|a$ و $d|b$
- سایر مقسوم علیه‌های مشترک $a$ و $b$ از $d$ کوچک‌تر باشند.

در این صورت می‌نویسیم: $(a,b)=d$.

چند مورد مقدماتی و خاص:

- اگر $a|b$، آنگاه $(a,b)=|a|$ است. بویژه:

$$(a,o)=|a| \quad \text{و} \quad (a,a)=|a|$$

توجه: عبارت $(o,o)$ بی‌معنی است.

- $p$ عددی اول و $a$ عددی صحیح:

اگر $p|a$، آنگاه: $(a,p)=p$ و در غیر این‌صورت: $(a,p)=۱$.

بویژه:

برای دو عدد اول گوناگون $p$ و $q$ همواره داریم: $(p,q)=۱$.

- ب.م.م بعد از تجزیه‌ی دو عدد؛ از ضرب عامل‌های مشترک با توان کمتر قابل محاسبه است.

بیان نمادین:

اگر تجزیه‌ی دو عدد به صورت $a=p_۱^{\alpha_۱}\times p_۲^{\alpha_۲}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b=p_۱^{\beta_۱}\times p_۲^{\beta_۲}\times\cdots\times p_k^{\beta_k}$ باشد، آنگاه:

$$(a,b)=p_۱^{\gamma_۱}\times p_۲^{\gamma_۲}\times\cdots\times p_k^{\gamma_k} \quad , \quad \gamma_i=\min\{\alpha_i,\beta_i\}$$

**نتیجه:**

اگر عدد $c$ چنان باشد که $c|a$ و $c|b$، آنگاه: $c|d$.

اگر $a$ و $b$ اعدادی صحیح باشند، آنگاه ب.م.م عددهای $a$ و $ab+۱$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ $a$ ❸ $b$ ❹ $a+۱$

پاسخ

مقادیر $(8a+6, 8a+2)$ کدام است؟ ( $a$ عدد صحیح)

❶ ۲ ❷ ۱ یا ۲ ❸ ۱ یا ۴ ❹ ۱ یا ۲ یا ۴

پاسخ

حاصل $(a^2-4a+1, a-3)$ کدام است؟ ($a \in \mathbb{Z}$)

❶ ۱ یا ۲ ❷ ۱ یا ۵ ❸ ۱ یا ۲ یا ۴ ❹ ۱ یا ۳ یا ۶

پاسخ

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $2n^2+1$ و $2n-4$ برابر است با:

❶ ۴ یا ۵ ❷ ۱ یا ۳ یا ۹ ❸ ۱ یا ۷ ❹ ۲ یا ۴

پاسخ

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^2+n$ و $3n-1$، برای مقادیر مختلف طبیعی $n$، چند مقدار متفاوت می‌تواند داشته باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۶

پاسخ

**توجه کنید:**

اگر $(a,b)=d$ باشد، می‌توان نشان داد کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه‌ی زیر هم برابر $d$ است:

$$\{ax+by \mid x,y \in \mathbb{Z}\}$$

اگر $m$ کوچک‌ترین عضو مثبت مجموعه $\{407r+592s \mid r,s \in \mathbb{Z}\}$ باشد، مجموع ارقام $m$ کدام است؟

(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۱۰ ❷ ۱۱ ❸ ۲ ❹ ۷

پاسخ

حالت خاص زیر در مورد ب.م.م اعداد اهمیت بسیاری دارد:

**نکته ۱۲**

**اعداد متباین :**

دو عدد طبیعی $a$ و $b$ را نسبت به هم «**اول**» یا «**متباین**» گوئیم، هرگاه:

$$(a,b)=1$$

به دو مورد در ارتباط با این مفهوم توجه کنید:

- واضح است که $(4,9)=1$ و بنابراین متباین بودن اعداد ربطی به اول بودن تک‌تک آن‌ها ندارد.
- دو عدد $a$ و $b$ وقتی نسبت به هم اول هستند که در تجزیه‌ی این دو عدد به عددهای اول، عامل اول مشترکی وجود نداشته باشد. برای نمونه:

  با توجه به $48=2^4\times3$ و $35=5\times7$، خواهیم داشت: $(48,35)=1$.

کدام یک از اعداد زیر نسبت به هر سه عدد ۶۴، ۸۱ و ۱۲۵ اول است؟

❶ ۴۹ ❷ ۳۵ ❸ ۲۱ ❹ ۱۴

پاسخ

اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح باشند که $5a-12b=17$ و $(a,b)\neq1$، آنگاه $(a,b)$ کدام است؟

❶ ۵ ❷ ۱۲ ❸ ۷ ❹ ۱۷

پاسخ

برای کدام مقدار $a$، دو عدد صحیح $5n+3$ و $an+7$ همواره نسبت به هم اول هستند؟

❶ ۱۴ ❷ ۱۳ ❸ ۱۲ ❹ ۱۱

پاسخ

**مواردی خاص:**

- دو عدد متوالی و همچنین، دو عدد فرد متوالی همیشه نسبت به هم اول‌اند:

$$(a,a+۱)=۱ \quad و \quad (۲m-۱,۲m+۱)=۱$$

- در مورد دو عدد زوج متوالی داریم:

$$(۲m,۲m+۲)=۲$$

اکنون مضرب‌های مشترک دو عدد صحیح را بررسی می‌کنیم.

**نکته ۱۳**

**ک.م.م اعداد:**

برای دو عدد صحیح $a$ و $b$ که هر دو غیر صفر هستند، عدد طبیعی $c$ ک.م.م آن دو است، هرگاه:

اولاً: $a|c$ و $b|c$

ثانیاً: سایر مضرب‌های مثبت و مشترک $a$ و $b$ از $c$ بزرگ‌تر باشند.

در این صورت می‌نویسیم: $[a,b]=c$.

چند مورد ساده:

- هرگاه $a|b$، آنگاه داریم: $[a,b]=|b|$؛ بویژه:

$$[a,a]=|a| \quad و \quad [\mp۱,a]=|a|.$$

- ک.م.م با تجزیه‌ی دو عدد؛ از ضرب عامل‌های مشترک با توان بیشتر در عامل‌های غیر مشترک قابل محاسبه است. بیان نمادین:

اگر تجزیه‌ی دو عدد به صورت $a=p_۱^{\alpha_۱}\times p_۲^{\alpha_۲}\times\cdots\times p_k^{\alpha_k}$ و $b=p_۱^{\beta_۱}\times p_۲^{\beta_۲}\times\cdots\times p_k^{\beta_k}$ باشد، آنگاه:

$$[a,b]=p_۱^{\theta_۱}\times p_۲^{\theta_۲}\times\cdots\times p_k^{\theta_k} \quad , \quad \theta_i=\max\{\alpha_i,\beta_i\}$$

**نتایج:**

**۱)** اگر عدد $m$ چنان باشد که $a|m$ و $b|m$، آنگاه: $[a,b]|m$.

**۲)** همواره داریم: $[a,b]=\dfrac{|ab|}{(a,b)}$. بویژه اگر $a$ و $b$ نسبت به هم اول باشند:

$$[a,b]=\frac{|ab|}{۱}=|ab|$$

اگر $a$ و $b$ دو عدد صحیح غیر صفر باشند، کدام نادرست است؟

❶ $(a,[a,b])=|a|$　　❷ $[a,(a,b)]=|a|$

❸ $(a,[a,۰])=|a|$　　❹ $[a,(a,۰)]=|a|$

**توجه فرمایید:**

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ

اگر $(a,b)=d$ و $[a,b]=c$ باشد، مقدار $((a+b,d),[ab,c^۲])$ کدام است؟

❶ $d$ ❷ $c^۲$ ❸ $|a+b|$ ❹ $|ab|$

پاسخ

اگر $a>۱$، $a|۵n-۲$ و $a|۳n+۷$، مقدار $((۱۲a,۱۸a^۲),[a,۳a^۲])$ کدام است؟

❶ ۱۲۳ ❷ ۸۲ ❸ ۲۴۶ ❹ ۱

پاسخ

رقم وسط بزرگ‌ترین عدد طبیعی سه رقمی $n$ که در رابطه‌ی $۱۴|n-۱$ و $۵۲|n-۱$ صدق می‌کند، کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ ۰

پاسخ

## نکات دیگر:

- ب.م.م و ک.م.م برای سه عدد صحیح $a$ و $b$ و $c$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(a,b,c)=((a,b),c) \quad \text{و} \quad [a,b,c]=[[a,b],c]$$

- برای دو عدد صحیح و مثبت $a$ و $b$:
  - $(a,b)=d$ نتیجه می‌دهد که: $(a^n,b^n)=d^n$.
  - $[a,b]=c$ نتیجه می‌دهد که: $[a^n,b^n]=c^n$.
- برای هر عد صحیح $k$ داریم:

$$(ka,kb)=|k|(a,b) \quad \text{و} \quad [ka,kb]=|k|[a,b]$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

در پایان، حالتی را بررسی می‌کنیم که عددها بر هم بخش‌پذیر نیستند.

**نکته ۱۴**

**قضیه تقسیم:**

در تقسیم عدد صحیح $a$ بر عدد طبیعی $b$، اعداد صحیح و یکتای $q$ و $r$ وجود دارند که:

$$a = bq + r \quad , \qquad ۰ \le r < b$$

عددهای $q$ و $r$ به‌ترتیب «**خارج قسمت**» و «**باقی‌مانده**» تقسیم $a$ بر $b$ نام دارند.

**توجه کنید:**

الف) اگر یک عدد بر عددی بزرگ‌تر از خود تقسیم شود، باقی‌مانده خودش است. دقیق‌تر: باقی‌مانده تقسیم ۰، ۱، ۲، ... تا $b-۱$ بر $b$ برابر خودشان است. برای مثال، باقی‌مانده تقسیم ۵ بر ۸ برابر همان ۵ است.

ب) در تقسیم $a$ بر $b$ همواره می‌توان:

- خارج قسمت را توسط جزء صحیح $q = \left[\dfrac{a}{b}\right]$ و سپس:
- باقی‌مانده را از رابطه‌ی $r = a - bq$ به‌دست آورد.

برای نمونه؛

خارج قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم عددهای ۳۱ و ۳۱− بر ۷ را تعیین می‌کنیم. با انجام تقسیم:

**(توجه داشته باشید: خارج قسمت را باید عددی انتخاب کنید که باقی‌مانده منفی نشود!)**

$$\begin{array}{r|l} -۳۱ & ۷ \\ \cline{2-2} -\ -۳۵ & -۵ \\ \hline ۴ & \end{array} \Rightarrow r = ۴ \text{ و } q = -۵ \qquad\qquad \begin{array}{r|l} ۳۱ & ۷ \\ \cline{2-2} -\ ۲۸ & ۴ \\ \hline ۳ & \end{array} \Rightarrow r = ۳ \text{ و } q = ۴$$

**روش دوم:**

خارج‌قسمت و باقی‌مانده‌ی تقسیم ۳۱− بر ۷ را با استفاده از نکته‌ی قبل مشخص می‌کنیم:

$$q = \left[\frac{-۳۱}{۷}\right] = [-۴/۴] = -۵ \xrightarrow{r=a-bq} r = -۳۱ - ۷(-۵) \Rightarrow r = ۴$$

خارج قسمت تقسیم عدد ۷۸۷ بر چند عدد طبیعی برابر ۱۰ است؟

❶ ۹ ❷ ۸ ❸ ۷ ❹ ۶

پاسخ

در تقسیم $a$ بر $b$، خارج قسمت و باقی‌مانده با هم برابرند. اگر ۳ واحد از مقسوم‌علیه کم شود، ۵ واحد به خارج قسمت اضافه شده و باقی‌مانده صفر می‌شود. مقادیر خارج قسمت کدام است؟

1. ۵ و ۸
2. ۴ و ۹
3. ۵ و ۱۰
4. ۸ و ۱۰

پاسخ

در تقسیم چند عدد طبیعی بر ۵۰، باقی‌مانده برابر ثلث مربع خارج قسمت است؟

1. ۱۶
2. ۸
3. ۴
4. ۱۲

پاسخ

اگر خارج قسمت تقسیم عدد طبیعی $a>۹$ بر ۱۱، سه واحد بیشتر از باقی‌مانده‌ی آن باشد، احتمال این‌که عدد $a-۹$ بر ۲۴ بخش‌پذیر باشد، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

1. $\frac{۱۳}{۲۲}$
2. $\frac{۶}{۱۱}$
3. $\frac{۱}{۲}$
4. $\frac{۵}{۱۱}$

پاسخ

به کاربردی مهم از قضیه‌ی تقسیم توجه کنید.

## دسته‌بندی اعداد صحیح:

فرض کنید $m>۱$ عدد طبیعی ثابتی باشد. عدد صحیح دلخواه $a$ را در نظر گرفته و آن را بر $m$ تقسیم می‌کنیم:

$$a=mk+r\ ; \qquad r=۰,۱,۲,\dots,m-۱$$

می‌بینید که می‌توان عددهای صحیح را بر حسب باقی‌مانده تقسیم بر $m$ در یک مجموعه قرار داد.

اگر باقی‌مانده صفر باشد، عددها به صورت زیر هستند:

$$a=mk\ ,\ \ k\in\mathbb{Z}$$

مجموعه‌ی تمام این نوع اعداد را با $[0]_m$ نشان می‌دهیم:

$$[0]_m = \{mk \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

اگر باقی‌مانده‌ی تقسیم برابر ۱ شود، عددها به این صورت هستند:

$$[1]_m = \{mk+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

سایر عددهای صحیح نیز به یکی از صورت‌های زیر خواهند بود:

$$[2]_m = \{mk+2 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$[3]_m = \{mk+3 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$
$$\vdots$$
$$[m-1]_m = \{mk+m-1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

می‌بینید که:

با انتخاب عدد طبیعی $m$، مجموعه‌ی $\mathbb{Z}$ دقیقاً به تعداد $m$ زیر مجموعه افراز (بخش‌بندی) شد:

$$[0]_m \ , \ [1]_m \ , \ [2]_m \ , \ \dots \ , \ [m-1]_m$$

یعنی:

- این مجموعه‌ها هیچ یک تهی نیستند.
- دو به دو اشتراک ندارند.
- هر عدد صحیح دقیقاً در یکی از آن‌ها جای دارد.

برای نمونه؛

به ازای $m=4$، دقیقاً چهار بخش جدا از هم چنین هستند:

$$[0]_4 = \{4k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -8, -4, 0, 4, 8, 12, \dots\}$$

$$[1]_4 = \{4k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -7, -3, 1, 5, 9, 13, \dots\}$$

$$[2]_4 = \{4k+2 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -6, -2, 2, 6, 10, 14, \dots\}$$

$$[3]_4 = \{4k+3 \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{\dots, -5, -1, 3, 7, 11, 15, \dots\}$$

**چنان‌که می‌بینید:**

هر عدد صحیح $a$ بر حسب عدد طبیعی $m$ به یکی از صورت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$mk \ , \ mk+1 \ , \ mk+2 \ , \ \dots \ , \ mk+m-1$$

برای نمونه:

بر حسب $m=5$، هر عدد صحیح به یکی از حالت‌های زیر قابل نوشتن است:

$$5k \ , \ 5k+1 \ , \ 5k+2 \ , \ 5k+3 \ , \ 5k+4$$

**در ضمن:**

از بین پنج حالت بالا، فقط اولین حالت، یعنی عددهای به شکل $5k$، بر ۵ بخش‌پذیر هستند.

**مثال:** نشان دهید:

الف) اگر $n^2$ مضرب ۳ باشد، آنگاه $n$ هم مضرب ۳ است.

ب) هر عدد اول $p>۳$ به صورت $۶k\pm۱$ است.

اگر عدد صحیح $a$ بر ۲ و ۳ بخش‌پذیر نباشد، آنگاه $a$ به کدام صورت است؟

1) $۶q+۱$　2) $۶q+۴$　3) $۶q+۵$　4) موارد ۱ و ۳

پاسخ

اگر $a$ یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه $a^۴$ به کدام صورت است؟

1) $۱۶k+۲$　2) $۱۶k+۱$　3) $۸k-۱$　4) $۸k+۳$

پاسخ

اگر $a$ زوج بوده و $b|a+۳$، آنگاه باقی‌مانده‌ی تقسیم $a^۳+b^۲-۳$ بر ۸ کدام است؟

1) ۶　2) ۴　3) ۲　4) ۰

پاسخ

## ۴ ویژه صد درصدی‌ها

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برخی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری درصد ۱۰۰ در آزمون‌ها»

ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید . . .

**مثال:** نشان دهید اگر $p > 3$ عددی اول باشد، باقی‌مانده‌ی تقسیم $p^2$ بر ۲۴ همواره برابر ۱ است.

پاسخ

**توجه کنید:**

اگر $p$ عددی اول باشد و داشته باشیم: $p \mid ab$، آنگاه:

$p$ باید لااقل یکی از عددهای $a$ و $b$ را عاد کند.

برای چند عدد طبیعی دو رقمی $n$، عدد $n^2+12$ بر ۱۳ بخش‌پذیر است؟

❶ ۱۳ ❷ ۱۴ ❸ ۱۵ ❹ ۱۶

پاسخ

باقی‌مانده تقسیم عدد $a$ بر $b$ برابر ۵ و باقی‌مانده تقسیم عدد $b$ بر $a$ برابر ۱ است. رقم یکان بزرگ‌ترین عدد دو رقمی $b$ کدام است؟ ($a$ و $b$ عددهای طبیعی هستند.)

❶ ۱ ❷ ۷ ❸ ۶ ❹ ۹

پاسخ

خاصیت مهمی از ب.م.م عددها:

**نکته ۱۵**

با اضافه یا کم کردن مضربی از $a$ یا $b$ به عدد دیگر، ب.م.م تغییر نمی‌کند:

$$(a,b)=(a,b\pm ka)$$

به عنوان کاربرد:

الف) مقدار $(۳۴۱,۲۷۷)$ را در طی چند مرحله حساب می‌کنیم:

$$\underbrace{(۳۴۱,۲۷۹)}_{=(۳۴۱-۲۷۹,۲۷۹)}=(۶۲,۲۷۹)=(۶۲,۲۷۹-۴\times۶۲)=(۶۲,۳۱)=۳۱$$

ب) بزرگ‌ترین مقدار $(۱۱n-۱,۳n+۲)$ را حساب می‌کنیم؛ ($n\in\mathbb{Z}$). طبق خاصیت بالا، جمله‌ی شامل $n$ را در یکی از دو عدد حذف می‌کنیم:

$$(۱۱n-۱,۳n+۲)=(۱۱n-۱-۴(۳n+۲),۳n+۲)=(-n-۹,۳n+۲)$$
$$=(-n-۹,۳n+۲+۳(-n-۹))=(-n-۹,-۲۵)$$

مقدار پایانی برابر $(n+۹,۲۵)$ است و بیشترین مقدار ممکن ۲۵ خواهد بود.

به ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی $n$، اعداد $۴n+۱$ و $۵n-۳$ نسبت به هم اول‌اند؟ **(کنکور خارج ۹۵)**

❶ ۸۱ ❷ ۸۲ ❸ ۸۴ ❹ ۸۵

**پاسخ**

**نکته ۱۶**

اگر $a$ و $b$ اعدادی صحیح و $n$ عددی طبیعی باشد، آنگاه:

- همواره رابطه‌ی $a-b\,|\,a^n-b^n$ برقرار است.
- اگر $n$ فرد باشد، آنگاه: $a+b\,|\,a^n+b^n$.
- اگر $n$ زوج باشد، آنگاه: $a+b\,|\,a^n-b^n$.

اگر $a^۲\,|\,b-c$، آنگاه کدام گزینه لزوماً صحیح است؟

❶ $a^n\,|\,b-c$ ❷ $a^۲\,|\,b^n+c^n$ ❸ $a^۲\,|\,b^n-c^n$ ❹ $a^n\,|\,b^n-c^n$

پاسخ

تعداد عضوهای مجموعه‌ی $\{n: 65 \mid 2^n+1\}$ از مجموعه‌ی اعداد طبیعی کوچک‌تر از ۱۰۰ کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۷ ❸ ۸ ❹ ۹

پاسخ

برای چند عدد طبیعی دو رقمی $n$، رابطه‌های $9 \mid 2^n-1$ و $82 \mid 3^n+1$ هر دو برقرار هستند؟

❶ ۴ ❷ ۵ ❸ ۶ ❹ ۸

پاسخ

معمولاً هنگامی که با اطلاعاتی از ب.م.م یا ک.م.م، به دنبال عددها هستیم، تکنیک مفید زیر وجود دارد.

**نکته ۱۷**

**خاصیت عددهای $a'$ و $b'$:**

برای دو عدد صحیح $a$ و $b$:

اگر $(a,b)=d$ باشد، آنگاه $(\frac{a}{d},\frac{b}{d})=1$ است.

قرار می‌دهیم: $\frac{a}{d}=a'$ و $\frac{b}{d}=b'$؛

بنابراین خواهیم داشت: $a=a'd$ و $b=b'd$ و البته: $(a',b')=1$.

**توجه کنید:**

مفاهیم بالا، جستجوی اعداد $a$ و $b$ را به جستجو به دنبال عددهای کوچک‌تر $a'$ و $b'$ با شرط اضافه $(a',b')=1$ تبدیل می‌کند.

مجموع دو عدد طبیعی ۵۰۴ و ب.م.م آن‌ها ۳۶ است. کمترین مقدار برای تفاضل آن دو عدد کدام است؟

❶ ۳۶ ❷ ۷۲ ❸ ۱۰۸ ❹ ۱۴۴

پاسخ

## نکته ۱۸

**ک.م.م بر حسب $a'$ و $b'$:**

ک.م.م برابر $[a,b]=a'b'd$ است، زیرا:

$$[a,b]=\frac{a'd\times b'd}{d}\Rightarrow [a,b]=a'b'd$$

**بویژه:**

اگر $(a,b)=1$ باشد، آنگاه $[a,b]=|ab|$ است.

اگر $[a,84]=252$ باشد، کوچک‌ترین مقدار $a$ کدام است؟

❶ ۳ ❷ ۶ ❸ ۹ ❹ ۱۸

پاسخ

ب.م.م دو عدد ۲۳ و ک.م.م آن‌ها ۲۰۹۳ است. عدد بزرگ‌تر کدام است؟

❶ ۲۵۳ ❷ ۲۹۹ ❸ ۳۹۱ ❹ ۴۳۷

پاسخ

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد ۶۰ برابر بزرگ‌ترین مقسوم علیه مشترک آن‌ها است. اگر مجموع این دو عدد ۱۳۶ باشد، تفاضل آن دو عدد کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۴۲ ❷ ۴۸ ❸ ۵۲ ❹ ۵۶

پاسخ

اگر $a$ و $b$ دو عدد طبیعی بوده، $\frac{a}{b}=\frac{۳}{۴}$ و $ab+[a,b]=۷۲$، آنگاه $a+b$ کدام است؟

❶ ۷ ❷ ۱۴ ❸ ۲۱ ❹ ۲۸

پاسخ

TEST تمرین تست

۱– کدام یک از موارد زیر با استفاده از مثال نقض رد می‌شود؟

❶ مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ در تقسیم بر ۳ باقی‌مانده ۱ دارد.

❷ اگر $n^۲$ مضرب ۸ باشد، آنگاه $n$ مضرب ۴ است.

❸ برای هیچ دو عدد اول $p$ و $q$، عدد $p+q$ اول نیست.

❹ عدد ۱۲ را نمی‌توان به صورت مجموع اعداد طبیعی متوالی نوشت.

۲– اگر $a$، $b$ و $c$ اعدادی اول و غیر از ۲ باشند، کدام عدد لزوماً اول نیست؟

❶ $a(b+۱)+۱$  ❷ $۲a+b+c+۱$

❸ $abc-۱$  ❹ $ab+ac+bc$

۳– کدام گزینه نادرست است؟

❶ اگر $x$ و $y$ گنگ باشند، آنگاه $xy$ گنگ است.

❷ اگر $x$ گویا و $y$ گنگ باشد، آنگاه $x-y$ گنگ است.

❸ $۸^n-۱$ همواره مضرب ۷ است.

❹ اگر $x$ و $y$ گویا باشند، آنگاه $xy$ گویا است.

۴– کدام عبارت نادرست است؟

❶ عبارت $x^۲+x+۷$ هیچ‌گاه صفر نمی‌شود.

❷ اگر $x$ و $y$ دو عدد طبیعی باشند، آنگاه $x+y\geq ۳\sqrt{xy}$.

❸ اگر $x\geq ۱$، آنگاه $x+\frac{۱}{x}\geq ۲$.

❹ عبارت $-x^۲+۲x-۶$ همواره منفی است.

۵– اگر $x$ بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A$ باشد، کوچک‌ترین عضو مجموعه‌ی $\{x-۲y+۲ \mid y\in A\}$ کدام است؟

❶ ۲  ❷ $x$  ❸ $۲-x$  ❹ $۲+x$

۶– اگر $ab=(۳n+۱)^n+(۳n+۲)^n$ باشد، مقدار عددی $a^۲+b^۲$ چگونه است؟ ($a$ و $b$ و $n$ طبیعی)

❶ همواره زوج  ❷ همواره فرد

❸ گاهی زوج و گاهی فرد  ❹ گاهی عدد اول

۷– اگر $n+۲\mid ۵n-۳$، در این صورت چند جواب صحیح برای $n$ وجود دارد؟

❶ ۱۰  ❷ ۸  ❸ ۶  ❹ ۴

۸- برای چند عدد طبیعی $n$، عدد $n^۲+۳$ بر $n-۳$ بخش‌پذیر است؟

❶ ۱۲　❷ ۸　❸ ۶　❹ ۴

۹- نمودار تابع $y=\frac{x^۳-۳}{x-۳}$ از چند نقطه با مختصات صحیح عبور می‌کند؟

❶ ۱۲　❷ ۸　❸ ۱۶　❹ ۱۴

۱۰- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عددی که در تقسیم بر ۴۷ باقی‌مانده توان دوم خارج قسمت است، چیست؟

❶ ۱۲　❷ ۱۱　❸ ۱۶　❹ ۱۴

۱۱- در یک تقسیم ۵۲ واحد به مقسوم و ۴ واحد به مقسوم‌علیه اضافه کرده‌ایم. اگر خارج قسمت و باقی‌مانده تغییر نکند، خارج قسمت کدام است؟

❶ ۱۲　❷ ۱۳　❸ ۲۵　❹ ۲۶

۱۲- اگر $a$ عددی زوج باشد، عدد $a(a^۲-۴)$ همواره بر کدام عدد بخش‌پذیر است؟

❶ ۱۵　❷ ۴۸　❸ ۳۲　❹ ۳۶

۱۳- در تقسیم عدد طبیعی $a$ بر ۳۷، باقی‌مانده‌ی تقسیم از مربع خارج قسمت آن ۲ واحد کمتر است. بزرگ‌ترین مقدار $a$ مضرب کدام عدد است؟

❶ ۱۲　❷ ۹　❸ ۱۶　❹ ۱۴

۱۴- بزرگ‌ترین عضو مجموعه‌ی $A=\{a: ۲a\,|\,۷۲,\ ۵a\,|\,۶۰۰\}$ کدام است؟

❶ ۱۲　❷ ۱۸　❸ ۲۴　❹ ۳۶

۱۵- اگر $p$ عددی اول و دو رقمی باشد، مقدار $(۴۰p^۲, ۱۴۷)$ کدام است؟

❶ ۲۱　❷ $p$　❸ ۱　❹ ۸

۱۶- کدام مورد همواره صحیح نیست؟

❶ $a+b\,|\,[a,b]$　❷ $a\,|\,b \Rightarrow a\,|\,[b,b+۱]$

❸ $b\,|\,a \Rightarrow [a,b]=|a|$　❹ $(a,b)\,|\,[a,b]$

۱۷- حاصل‌ضرب دو عدد اول برابر ۳۹۸ است. مجموع این دو عدد بر کدام بخش‌پذیر است؟

❶ ۲　❷ ۳　❸ ۹　❹ هیچکدام

۱۸- اگر $a$ و $b$ اعدادی طبیعی و $a^۲-b^۲$ عددی اول باشد، آنگاه کدام همواره صحیح است؟

❶ $a$ و $b$ هر دو اول　❷ $a$ یا $b$ اول　❸ $a=b+۲$　❹ $a=b+۱$

۱۹- عدد $\overline{aabb}$ همواره بر کدام‌یک از اعداد زیر بخش‌پذیر است؟

❶ ۵ ❷ ۷ ❸ ۳ ❹ ۱۱

۲۰- اگر $۱۱۲|b^۳$ و $۱۳۵|a^۲$، کم‌ترین مقدار برای $a+b$ کدام است؟ ($a,b\in \mathbb{N}$)

❶ ۲۹ ❷ ۷۳ ❸ ۵۳ ❹ ۵۹

۲۱- اگر عدد طبیعی $n$ مضرب ۷ نباشد، بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد $n^۲+۹n+۲۱$ و $n+۷$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۱ و ۳ ❸ ۱ و ۵ ❹ ۷

۲۲- اگر $n$ عدد طبیعی و دو عدد $۹n-۵$ و $n+۴$ دارای مقسوم‌علیه مشترک غیر از ۱ باشند، تعداد اعداد دو رقمی $n$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۲۳- به‌ازای چند عدد طبیعی و دو رقمی $n$، دو عدد به صورت‌های $۲۵n+۹$ و $۱۱n+۴$ نسبت به هم اول‌اند؟ (کنکور ۸۹)

❶ ۸۶ ❷ ۸۷ ❸ ۸۹ ❹ ۹۰

۲۴- مجموع دو عدد ۲۷۷۲ و بزرگ‌ترین مقسوم علیه (مشترک) آن‌ها ۲۳۱ و مخالف عدد کوچک‌تر است. تفاضل این دو عدد کدام است؟ (کنکور ۹۴)

❶ ۲۳۱ ❷ ۴۶۲ ❸ ۶۹۳ ❹ ۹۲۴

۲۵- حاصل $[۳]_۴ \cup [۱]_۴$ برابر کدام است؟

❶ $[۱]_۴$ ❷ $[۱]_۲$ ❸ $[۰]_۲$ ❹ $\mathbb{Z}$

۲۶- برای .............. درستی گزاره‌ی «$n^۲+۳n+۱۳$ به ازای هر عدد طبیعی $n$، عددی اول است.»، می‌توان از روش .......... استفاده کرد.

❶ اثبات- در نظر گرفتن همه‌ی حالت‌ها ❷ اثبات- برهان خلف
❸ رد- مثال نقض ❹ رد- برهان خلف

۲۷- اگر مجموع و تفاضل دو عدد حقیقی گنگ باشد، آنگاه کدام الزاماً درست است؟

❶ هر دو عدد گنگ هستند. ❷ حداقل یکی از دو عدد گنگ هستند.
❸ حداکثر یکی از دو عدد گنگ است. ❹ فقط یکی از دو عدد گنگ است.

۲۸- برای چند مقدار طبیعی $n$ رابطه‌ی $۲n+۱|۵n^۲-۷n+۱$ برقرار است؟

❶ ۴ ❷ ۰ ❸ ۲ ❹ ۱

۲۹– فرض کنید $(a,b)=۲^{۴}\times ۵\times ۷^{۲}$ و $ab=۲^{۹}\times ۵^{۳}\times ۷^{۴}\times ۱۷$. در تجزیه به عوامل اول، مجموع توان‌های عوامل $[a,b]$ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ ۱۱ ❸ ۱۲ ❹ ۱۳

۳۰– تعداد اعداد پنج رقمی مضرب ۱۸ که مربع کامل هستند، کدام است؟ $(\sqrt{۱۰}\cong ۳/۱۶)$ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ ۳۵ ❷ ۳۶ ❸ ۳۷ ❹ ۳۸

۳۱– یک عدد پنج رقمی با استفاده از دو عدد متوالی کمتر از ۱۰ نوشته شده است. اگر مجموع ارقام آن عدد به صورت $۲۳n+۱$ باشد، چند عدد پنج رقمی با این ویژگی وجود دارد؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

❶ ۶ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۳

## ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱– منحنی $۴x^{۲}-۳xy-۲y+۱=۰$ از چند نقطه با مختصات صحیح می‌گذرد؟

❶ ۶ ❷ ۴ ❸ ۳ ❹ صفر

۲– کدام عدد سه رقمی زیر نمی‌تواند مربع یک عدد باشد؟

❶ $\overline{ab۶}$ ❷ $\overline{ab۱}$ ❸ $\overline{ab۴}$ ❹ $\overline{ab۷}$

۳– به‌ازای چند عدد طبیعی $n$، عدد $n^{۴}+۴$ اول است؟

❶ ۳ ❷ ۲ ❸ ۱ ❹ صفر

۴– برای چند عدد صحیح $n$، ب.م.م دو عدد $n^{۲}+n$ و $n^{۲}-n$ برابر ۹ است؟

❶ ۰ ❷ ۱ ❸ ۲ ❹ ۴

۵– چند عدد طبیعی دو رقمی $n$ وجود دارد که ک.م.م دو عدد $n$ و ۱۰ بر ۲۰ بخش‌پذیر باشد؟

❶ ۴۰ ❷ ۳۹ ❸ ۲۲ ❹ ۲۱

۶– برای عددهای صحیح $a$ و $b$ داریم: $۱۳\mid a+۳b+k$ و $۱۳\mid ۵a+۲b+۱۷$. کوچک‌ترین مقدار طبیعی $k$ کدام است؟

❶ ۳ ❷ ۶ ❸ ۹ ❹ ۱۳

۷– اگر ترکیب‌های خطی دو عدد $a$ و ۱۵ (یعنی: عبارات به شکل $ax+۱۵y$) تمام اعداد صحیح را تولید کنند، ب.م.م دو عدد ۲۱۰ و $۲a$ کدام است؟ $(a\in\mathbb{Z})$

❶ ۲ یا ۶ ❷ ۲ یا ۱۴ ❸ ۲ یا ۶ یا ۱۴ ❹ فقط ۲

۸– چند نقطه با مختصات طبیعی روی منحنی $۳x^۲+xy-۲y-۱۶=۰$ قرار دارد؟

❶ ۴ ❷ ۲ ❸ ۱ ❹ صفر

۹– برای هر عدد طبیعی $n$، عدد $A=n^۲+an+b^۲$ زوج است. اگر $a$ و $b$ دو عدد طبیعی بزرگ‌تر از یک باشد، آنگاه حاصل‌ضرب $ab$ کدام می‌تواند باشد؟

❶ ۱۴ ❷ ۱۵ ❸ ۱۶ ❹ ۱۷

۱۰– برای هر عدد طبیعی $n$ داریم: $n!=۲^{a_۱}\times ۳^{a_۲}\times ۵^{a_۳}\times \cdots$. مقدار $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$ به ازای $n=۲۰$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

(منظور از $\sum_{i=۱}^{\infty} a_i$، جمع جملات غیرصفر در عبارت $a_۱+a_۲+a_۳+\cdots$ است.)

❶ ۲۸ ❷ ۳۲ ❸ ۳۶ ❹ ۴۰

۱۱– تعداد مقسوم علیه‌های مثبت عدد صحیح $x=۲^m\times ۵^n$ از تعداد مقسوم علیه‌های مثبت صحیح $\frac{x}{۴۰}$، ۱۲ واحد بیشتر است. حداقل مقدار $x$ کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

❶ ۶۴۰ ❷ ۸۰۰ ❸ ۱۰۰۰ ❹ ۱۲۸۰

۱۲– کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد $a$ و $b$ از رابطه‌ی $M=۵a+۱۴$ به‌دست می‌آید. بیشترین مقدار تفاضل دو عدد کدام است؟

❶ ۷۰ ❷ ۴۲ ❸ ۲۲ ❹ ۶۳

# لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

| دوره ابتدایی (عادی) | متوسطه اول (عادی) | ریاضی تیزهوشان |
|---|---|---|
| جزوه ریاضی پنجم | جزوه ریاضی هفتم | ریاضی تیزهوشان ششم |
| جزوه ریاضی ششم | جزوه ریاضی هشتم | ریاضی تیزهوشان هفتم |
| | جزوه ریاضی نهم | ریاضی تیزهوشان هشتم |
| | | ریاضی تیزهوشان نهم |

| استعداد تحلیلی (ششم به هفتم) | استعداد تحلیلی (نهم به دهم) |
|---|---|
| جزوه هوش کلامی (ادبی) | جزوه هوش غیرکلامی (تصویری) |
| جزوه هوش غیرکلامی (تصویری) | جزوه هوش ریاضی و محاسبات |
| جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی | جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن) |

| متوسطه دوم (تجربی: کنکوری) | متوسطه دوم (تجربی: تشریحی) |
|---|---|
| جزوه کنکور ریاضی دهم | جزوه تشریحی ریاضی دهم |
| جزوه کنکور ریاضی یازدهم | جزوه تشریحی ریاضی یازدهم |
| جزوه کنکور ریاضی دوازدهم | جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم |
| **جزوه جامع کنکور تجربی** | |

| متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری) | متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی) |
|---|---|
| جزوه کنکور ریاضی دهم | جزوه تشریحی ریاضی دهم |
| جزوه کنکور حسابان (۱) | جزوه تشریحی هندسه (۱) |
| جزوه کنکور آمار و احتمال | جزوه تشریحی هندسه (۲) |
| جزوه کنکور هندسه (۲) | جزوه تشریحی حسابان (۱) |
| جزوه کنکور حسابان (۲) | جزوه تشریحی آمار و احتمال |
| جزوه کنکور ریاضیات گسسته | جزوه تشریحی ریاضیات گسسته |
| جزوه کنکور هندسه (۳) | جزوه تشریحی هندسه (۳) |
| **جزوه جامع کنکور ریاضی** | جزوه تشریحی حسابان (۲) |

| رشته انسانی |
|---|
| جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |
| جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |
| جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |

## ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان


۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴