ترکیب: دانش شما + محتوای بی‌نظیر تدریس ما

درسنامه آپدیت

تمرین و پاسخنامه

کوییز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»



تدریس ریاضیات

ارائه‌ای از:

دکتر علیرضا نورالدینی

و تیم گروه آموزشی درس‌آموز

(دانش‌آموختگان دانشگاه صنعتی امیرکبیر)

پیشنهاد ویژه:

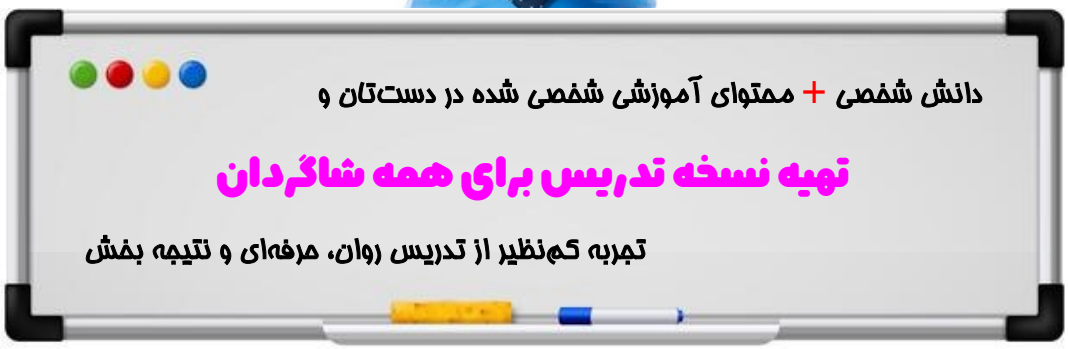


«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(حذف هزینه چاپ۱)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

چند نمونه از نتایج درخشان برخی از همکاران مجموعه درس‌آموز: (خرداد و تابستان ۱۴۰۴)

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ‌کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

تدریس ریاضیات کنکور:

از متوسط تا پیشرفته و بسیار پیشرفته

100%

با ترکیب دانش خود و محتوای آموزشی ما، آسان، روان و مؤثر تدریس کنید

(اختصاصی دبیران، مدرسان و اساتید)



دریافت جدیدترین نمونه‌ها:

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

جزوات شخصی شما
برای تدریس حرفه‌ای ریاضیات کنکور

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و . . . روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.

فهرست

۱ دایره (۱) — ۲
بررسی وترها و کمان‌ها، زوایای مرکزی، محاطی و ظلی

۲ دایره (۲) — ۲۴
روابط طولی وترها، مماس، چندضلعی محاطی و محیطی

۳ تبدیل هندسی (۱) — ۵۸
معرفی تبدیل هندسی، بررسی بازتاب، انتقال، دوران

۴ تبدیل هندسی و کاربرد (۲) — ۸۲
بررسی تجانس، تغییر مساحت، مساله کوتاه‌ترین مسیر

۵ روابط طولی در مثلث — ۱۰۲
قضایا: سینوس و کسینوس‌ها، فرمول‌های هرون

کنکور

هندسه یازدهم

TEST

۱

دایـــره (۱)

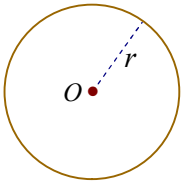
فهرست	صفحه
■ مفاهیم پایه	۳
■ زوایا و کمان‌ها	۷
■ تمرین تست	۱۹

۱ مفاهیم پایه

مفهوم محوری این مبحث:

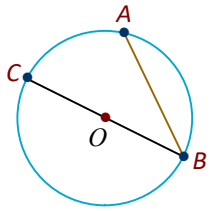
دایره:

مجموعه‌ی تمام نقاطی از صفحه که فاصله‌ی آن‌ها تا نقطه‌ای چون O برابر r باشد، دایره‌ی به مرکز O و شعاع r است و آن را با $C(O,r)$ نشان خواهیم داد:



چند مفهوم ساده‌ی مرتبط با دایره:

- هر پاره‌خط که مرکز را به نقاط دایره وصل کند، یک شعاع است؛ پس دایره بی‌شمار شعاع دارد که طول‌شان یکسان است.
- دو نقطه‌ی دلخواه A و B روی دایره قرار می‌دهیم؛ در این صورت:
  - پاره‌خط AB یک وتر در دایره و
  - بخشی از دایره که بین A و B واقع شده است، کمان $\overset{\frown}{AB}$ است.



بعلاوه:

وتری که از مرکز دایره عبور کند، بزرگ‌ترین اندازه‌ی ممکن را داشته که یک قطر دایره است. (دایره بی‌شمار قطر دارد که همگی طول برابر $2r$ دارند.)

سؤال:

الف) از دو نقطه‌ی ثابت A و B چند دایره عبور می‌کند؟

ب) از سه نقطه‌ی ثابت A، B و C چند دایره عبور می‌کند؟

پاسخ

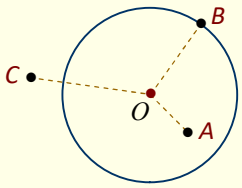
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

نکته ۱

وضع نسبی نقطه و دایره:

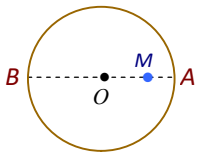
وضعیت یک نقطه بستگی به فاصله‌ی آن تا مرکز دایره $C(O,r)$ دارد:

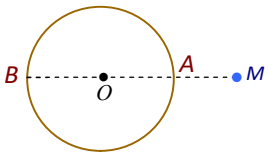
- اگر $OA<r$ باشد، نقطه‌ی A داخل دایره قرار دارد.
- اگر $OB=r$ باشد، نقطه‌ی B روی دایره قرار دارد.
- اگر $OC>r$ باشد، نقطه‌ی C بیرون دایره قرار دارد.



توجه کنید:

وقتی یک نقطه‌ی M داخل یا خارج دایره قرار دارد، دورترین و نزدیک‌ترین نقطه روی دایره تا آن نقطه، توسط قطر یا امتداد قطری که از آن نقطه می‌گذرد، تعیین می‌شود:





در هر دو حالت، A نزدیک‌ترین و B دورترین نقطه‌ی دایره تا نقطه‌ی M است. (طول MA فاصله‌ی M تا دایره هم محسوب می‌شود.)

نقطه‌ی M خارج یک دایره قرار داشته و بیشترین و کمترین فاصله‌ی آن تا نقاط دایره به ترتیب ۱۰ و ۵ است. شعاع دایره کدام است؟

❶ ۵ ❷ ۳ ❸ $\frac{۳}{۲}$ ❹ $\frac{۵}{۲}$

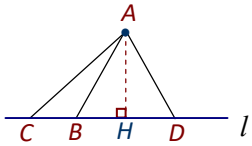
پاسخ

یادآوری: (فاصله نقطه تا خط)

یک خط l و نقطه‌ای مانند A خارج آن در نظر بگیرید:



از نقطه‌ی A بی‌شمار پاره‌خط می‌توان به خط l وصل کرد که البته فقط یکی از آن‌ها بر این خط عمود خواهد شد:



توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

در مورد این شکل به دو مطلب توجه کنید:

- اولاً: طول پاره‌خط عمود از طول تمام پاره خط‌های دیگر کوچک‌تر است:

$AH < AB$ و $AH < AC$ و ...

- ثانیاً: طول AH را فاصله‌ی نقطه‌ی A تا خط l تعریف می‌کنیم. بنابراین:

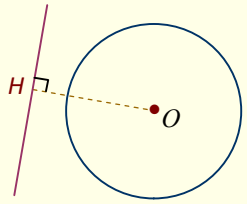
فاصله‌ی یک نقطه تا خط، کوتاه‌ترین فاصله‌ی آن نقطه تا نقاط روی خط است.

وضعیت نسبی یک خط d و دایره $C(O,r)$ بر حسب طول عمود OH بر خط، یکی از سه حالت زیر است:

نکته ۲

حالت (۱)

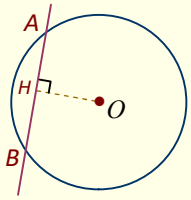
اگر $OH > r$ باشد، خط و دایره جدا از هم خواهند بود:



نکته ۳

حالت (۲)

اگر $OH < r$ باشد، خط و دایره دقیقاً در دو نقطه متقاطع هستند:



توجه کنید:

در این حالت، دایره از خط، یک پاره‌خط جدا می‌کند: (وتر AB) و بعلاوه، OH عمود منصف این وتر است. (طبق هم‌نهشتی مثلث‌های قائم الزاویه‌ی OAH و OBH به حالت «وض».)

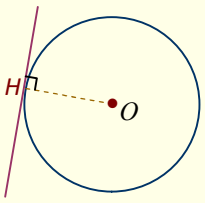
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

آخرین حالت اهمیت ویژه‌ای دارد:

نکته ۴

حالت (۳)

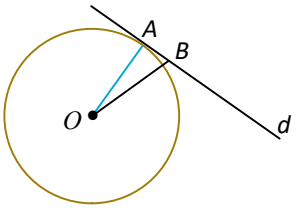
اگر $OH = r$ باشد، خط و دایره فقط یک نقطه مشترک دارند؛ در این حالت خط و دایره بر هم مماس هستند:



توجه کنید:

خط و دایره‌ی مماس بر هم، خاصیت مهمی دارند که در ادامه خواهیم دید.

مثال: در نقطه‌ی A روی یک دایره، مماس d را بر دایره رسم می‌کنیم:



فرض کنید B نقطه‌ی دلخواه دیگری روی خط باشد. چون B بیرون دایره است، بنابراین $OA < OB$ خواهد بود. یعنی:

A کمترین فاصله‌ی نقاط خط تا نقطه‌ی O را دارد.

در نتیجه:

طول OA فاصله‌ی O تا خط بوده و باید OA بر خط عمود باشد. بنابراین:

وقتی خطی بر دایره مماس باشد، شعاع متصل به نقطه‌ی تماس، بر آن خط عمود است.

فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی دایره تا یک نقطه‌ی A برابر ۹ و طول مماس رسم شده از این نقطه بر دایره برابر ۱۵ بوده است. فاصله‌ی دورترین نقطه‌ی دایره تا A کدام است؟

❶ ۲۹ ❷ ۲۵ ❸ ۲۱ ❹ ۱۷

پاسخ

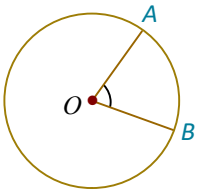
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲ زوایا و کمان‌ها

انواعی از زوایا در دایره و ارتباط آن‌ها با کمان‌های مقابل‌شان، در این بخش بررسی می‌شود.

زاویه مرکزی:

زاویه‌ای است که رأس آن در مرکز دایره قرار داشته و اضلاع آن دو شعاع از دایره هستند:



$\hat{O}$ یک زاویه‌ی مرکزی است.

بعلاوه:

- کمان روبه‌روی یک زاویه‌ی مرکزی را هم‌اندازه‌ی آن زاویه (با واحد درجه) در نظر می‌گیریم. پس اگر در شکل بالا، $\hat{O}=۷۰^\circ$ باشد، در این صورت $\overset{\frown}{AB}=۷۰^\circ$ خواهد بود.
- قطعه‌ی OAB از دایره را یک «**قطاع**» دایره گوئیم و محیط و مساحت آن با نوشتن تناسب بین آن و کل دایره تعیین می‌شود. (با در نظر گرفتن اندازه‌ی $\hat{O}$ برای قطاع و زاویه‌ی ۳۶۰° برای کل دایره.)

مثال: نشان دهید اگر یک وتر برابر شعاع دایره باشد، اندازه‌ی کمان مربوط به آن ۶۰° است.

پاسخ

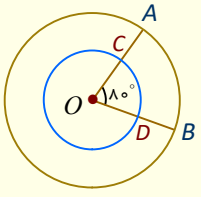
نکته ۵

اندازه و طول کمان:

بین اندازه و طول یک کمان تفاوت وجود دارد. برای نمونه؛

در شکل روبه‌رو، اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ هر دو برابر $\hat{O}$ است:

$$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{CD}=۸۰^\circ$$



ولی طول‌های این دو کمان، چنان که مشاهده می‌شود، برابر نیستند.

توجه کنید:

اندازه‌ی کل دور تا دور هر دایره ۳۶۰° و طول دور تا دور آن برابر محیط دایره ($P=۲\pi r$) است. بنابراین تناسب زیر بین اندازه و طول هر کمان وجود دارد:

$$\frac{\text{طول کمان}}{\text{محیط دایره}}=\frac{\text{اندازه کمان}}{۳۶۰^\circ}$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

در یک دایره، طول کمان EF برابر ۸ و اندازه‌ی این کمان 120° است. اندازه‌ی قطر دایره کدام است؟

❶ 24π ❷ 12π ❸ $\frac{12}{\pi}$ ❹ $\frac{24}{\pi}$

پاسخ

نکته ۶

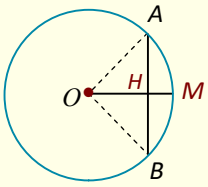
شعاع گذرا از وسط وتر:

در مورد وتر AB و شعاع OM سه مورد زیر معادل هستند:

OM گذرا از وسط وتر AB یا OM عمود بر AB یا برابری: $\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB}$

به بیان دیگر:

$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{MB} \Leftrightarrow OM \perp AB \Leftrightarrow AH = HB$$



بعلاوه:

در این حالت، OM نیمساز زاویه‌ی مرکزی $A\hat{O}B$ نیز هست.

توجه کنید:

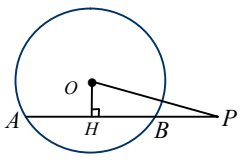
دلیل مطالب بالا، به آسانی و طبق هم‌نهشتی مثلث‌های $\overset{\Delta}{OHA}$ و $\overset{\Delta}{OHB}$ قابل بیان است.

در دایره‌ی $C(O,5)$، طول وتر EF برابر $\sqrt{50}$ است. طول کمان کوچک‌تر EF برابر کدام است؟

❶ 5π ❷ $\sqrt{5}\pi$ ❸ $\frac{5\pi}{2}$ ❹ $\frac{\sqrt{5}\pi}{2}$

پاسخ

در شکل زیر $PB = \frac{AB}{2} = 3$ و $OH = 1$. شعاع دایره کدام است؟



❶ $\sqrt{13}$
❷ $\sqrt{12}$
❸ $\sqrt{11}$
❹ $\sqrt{10}$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ

دو دایره‌ی $C(O,17)$ و $C'(O,10)$ داده شده‌اند. یک خط قاطع که در دایره‌ی C' وتری به طول ۱۲ ایجاد می‌کند، در دایره‌ی C وتری با کدام طول تشکیل خواهد داد؟

۱) ۱۶ ۲) ۲۴ ۳) ۳۲ ۴) ۳۰

پاسخ

نکته ۷

وترهای برابر:

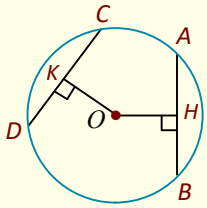
دو معادل مهم برای وترهای برابر:

❖ دو وتر AB و CD برابرند اگر و فقط اگر کمان‌های متناظر آن‌ها برابر باشند.

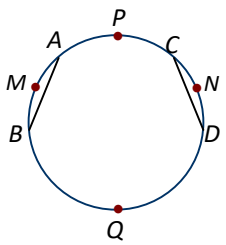
$$AB = CD \Leftrightarrow \overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{CD}$$

❖ دو وتر AB و CD برابرند اگر و فقط اگر فاصله‌ی آن‌ها تا مرکز یکسان باشد.

$$AB = CD \Leftrightarrow OH = OK$$



در شکل مقابل، وترهای AB و CD برابرند و نقاط M، N، P و Q به ترتیب وسط‌های کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$، $\overset{\frown}{CD}$، $\overset{\frown}{AC}$ و $\overset{\frown}{BD}$ هستند. از موارد زیر، چند مورد صحیح است؟



۱) PQ بر MN عمود است.

۲) PQ وتر BD را نصف می‌کند.

۳) $P\hat{B}Q = 90^\circ$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۰

پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

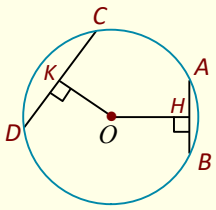
نابرابری وترها نیز نتایج مهمی به دنبال دارد:

نکته ۸

وترهای نابرابر:

اگر دو وتر نابرابر باشند، وتر بزرگ‌تر به مرکز دایره نزدیک‌تر است و برعکس:

$$AB < CD \Leftrightarrow OH > OK$$

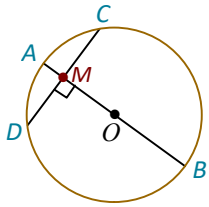


توجه کنید:

دلیل مطالب بالا، با استفاده‌ی مناسب از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث‌های $\overset{\Delta}{OHA}$ و $\overset{\Delta}{OKC}$ قابل بیان است.

برخی نتایج:

اگر M نقطه‌ی دلخواهی داخل دایره باشد، آنگاه:



- بزرگ‌ترین وتر گذرنده از M همان قطر گذرا از M است، یعنی: AB.

توجه کنید:

فقط قطرها یا خطوط شامل آن‌ها بر دایره عمود محسوب می‌شوند.

- کوچک‌ترین وتر گذرنده از M، وتری است که بر قطر گذرا از M عمود است، یعنی: CD.

از نقطه‌ی A به فاصله‌ی $\frac{۲r}{۳}$ تا محیط دایره‌ی به شعاع r، وتری با طول می‌نیمم رسم کرده‌ایم. طول این وتر کدام است؟ (نقطه‌ی A درون دایره قرار دارد.)

❶ $\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}r$ ❷ $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}r$ ❸ $\frac{\sqrt{۳}}{۲}r$ ❹ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۲}r$

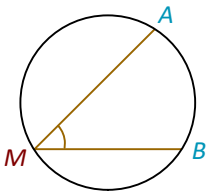
پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

نوع دیگری از زوایا در دایره:

زاویه محاطی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار داشته و اضلاع آن دو وتر از دایره هستند:



$A\hat{M}B$ یک زاویه‌ی محاطی است.

نکته ۹

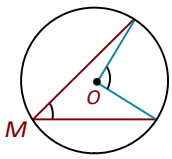
اندازه زاویه‌ی محاطی:

اندازه‌ی هر زاویه‌ی محاطی برابر نصف کمان روبه‌رو به آن است. یعنی در شکل بالا:

$$A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

نتیجه‌ی فوری:

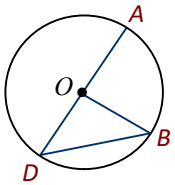
اگر یک زاویه‌ی محاطی و یک زاویه‌ی مرکزی، هر دو رو به یک کمان باشند؛
زاویه‌ی مرکزی دو برابر زاویه‌ی محاطی است:



$$\hat{O} = ۲\hat{M}$$

دلیل رابطه‌ی بالا با استفاده از اندازه‌ی زاویه‌ی مرکزی قابل بیان است؛ تست بعد را ببینید:

مطابق شکل مقابل، دایره‌ای به مرکز O و قطر AD داریم و برای اثبات رابطه‌ی $A\hat{D}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$ نوشته‌ایم: $A\hat{O}B = O\hat{D}B + x = ۲y$. در این صورت کدام درست است؟

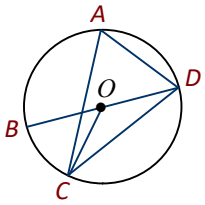


۱) $x = ۲O\hat{D}B\ ,\ y = O\hat{B}D$
۲) $x = O\hat{B}D\ ,\ y = O\hat{D}B$
۳) $x = y = D\hat{O}B$
۴) $x = y = B\hat{A}O$

پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

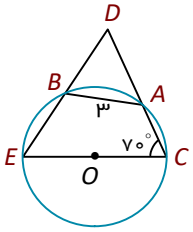
در شکل زیر، BD قطر دایره است. اگر $\hat{A}=7x-10^\circ$، $C\hat{O}D=10x+20^\circ$ و O مرکز دایره باشد، کمان $\overset{\frown}{BC}$ چند درجه است؟



۱) ۱۵
۲) ۳۰
۳) ۴۵
۴) ۶۰

پاسخ

در شکل روبه‌رو شعاع دایره ۳ واحد است. اندازه‌ی کمان $\overset{\frown}{BAC}$ به درجه کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)



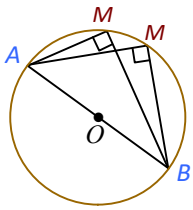
۱) ۸۰
۲) ۹۰
۳) ۱۰۰
۴) ۱۲۰

پاسخ

برخی نتایج:

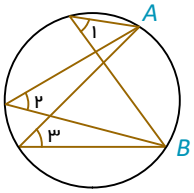
طبق نکته‌ی قبل، چند مورد مهم زیر برقرار هستند:

❖ زاویه‌ی محاطی روبه‌رو به قطر همیشه قائمه است:



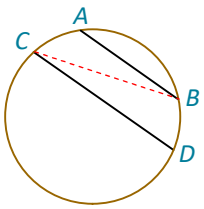
$$\hat{M}=\frac{180}{2}=90^\circ$$

❖ تمام زوایای محاطی رو به یک کمان مشترک، با هم برابر هستند:



$$\hat{1}=\hat{2}=\hat{3}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{2}$$

❖ اگر دو وتر موازی باشند، کمان‌های محصور بین آن‌ها برابرند:



$$AB||CD \Rightarrow \overset{\frown}{AC}=\overset{\frown}{BD}$$

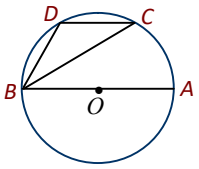
دلیل:

اگر وتر BC را رسم کنید، داریم:

$$AB||CD \Rightarrow \hat{C}=\hat{B} \rightarrow \frac{1}{2}\overset{\frown}{BD}=\frac{1}{2}\overset{\frown}{AC} \Rightarrow \overset{\frown}{BD}=\overset{\frown}{AC}$$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

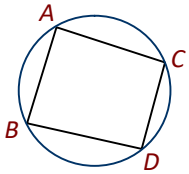
در مثلث BDC داریم: $\hat{D}+\hat{C}=150^\circ$. اگر $AB||DC$ باشد، کدام مورد درباره‌ی این مثلث صحیح است؟



1. متساوی‌الساقین است.
2. قائم‌الزاویه است.
3. متساوی‌الاضلاع است.
4. هیچکدام

پاسخ

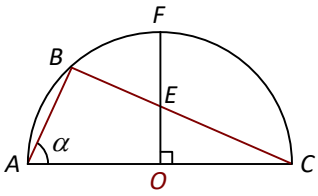
در شکل زیر، وترهای AB و CD موازی هستند. اگر $\overset{\frown}{AC}=80^\circ$ و تفاضل اندازه‌ی کمان‌های $\overset{\frown}{AB}$ و $\overset{\frown}{CD}$ برابر 100° باشد، کوچک‌ترین کمان دایره چند درجه است؟



1. ۴۰
2. ۵۰
3. ۶۰
4. ۷۰

پاسخ

در نیم‌دایره زیر، اگر $\sin\alpha=0/8$ باشد، مقدار $\frac{BE}{EF}$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)



1. ۱/۱
2. ۱/۳
3. ۱/۴
4. ۱/۵

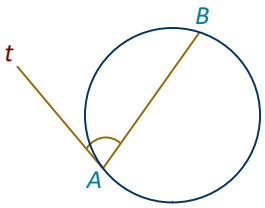
پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

نوع سوم از زوایا در دایره:

زاویه ظلّی:

زاویه‌ای است که رأس آن روی محیط دایره قرار داشته، یک ضلع آن وتر و ضلع دیگر آن بر دایره مماس باشد:



$B\hat{A}t$ یک زاویه‌ی ظلی است و $\overset{\frown}{AB}$ کمان روبه‌رو به آن محسوب می‌شود.

نکته ۱۰

اندازه زاویه‌ی ظلی:

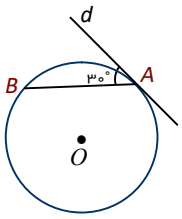
مانند زوایای محاطی، اندازه‌ی هر زاویه‌ی ظلی برابر نصف کمان روبه‌رو به آن است. یعنی در شکل بالا:

$$B\hat{A}t = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}$$

توجه:

با رسم قطر گذرا از نقطه‌ی A در شکل بالا و خاصیت زاویه‌ی محاطی می‌توان تساوی بالا را نشان داد.

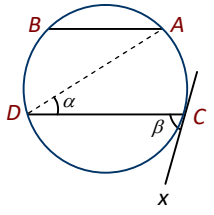
در شکل مقابل، خط d بر دایره مماس بوده و $AB = ۵$ است. شعاع دایره کدام است؟



❶ ۵
❷ $۵\sqrt{۳}$
❸ $\frac{۵}{۲}$
❹ $\frac{۵\sqrt{۳}}{۲}$

پاسخ

در شکل زیر، وتر AB برابر شعاع دایره، $AB \parallel CD$، زاویه‌ی $\beta = ۲\alpha$ و Cx مماس بر دایره است. کمان $\overset{\frown}{BD}$ چند درجه است؟ **(کنکور ۹۸)**



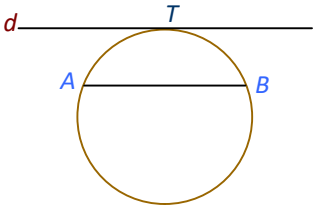
❶ ۵۰
❷ ۶۰
❸ ۷۰
❹ ۷۵

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ

نتیجه:

اگر خطی مماس بر دایره موازی یک وتر باشد، دو کمان محصور بین خط و وتر برابرند:



$$AB||d \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TB}$$

دلیل:

اگر وتر AT را رسم کنید، می‌توان دید:

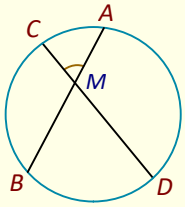
$$AB||d \Rightarrow \hat{A} = \hat{T} \rightarrow \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{TB} = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AT} \Rightarrow \overset{\frown}{AT} = \overset{\frown}{TB}$$

در ادامه، زوایای حاصل از برخورد وترها، امتداد آن‌ها یا مماس‌های رسم شده بر دایره بررسی می‌گردد:

نکته ۱۱

زاویه بین دو وتر:

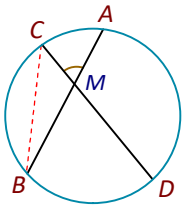
هرگاه دو وتر یکدیگر را داخل دایره قطع کنند، زاویه‌ی بین آن دو، برابر میانگین کمان روبه‌رو به آن و کمان رو به زاویه‌ی متقابل به رأس با آن است:



$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

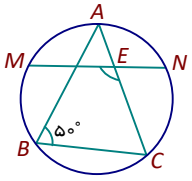
دلیل:

اگر وتر BC را رسم کنید، چون $\hat{M}$ در مثلث MBC زاویه‌ی خارجی است:



$$\hat{M} = \hat{B} + \hat{C} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{BD}}{۲} = \frac{\overset{\frown}{AC} + \overset{\frown}{BD}}{۲}$$

در شکل زیر، A وسط کمان MN است. اندازه‌ی $M\hat{E}C$ چند درجه است؟



❶ ۱۵۰
❷ ۱۳۰
❸ ۱۰۵
❹ ۱۰۰

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

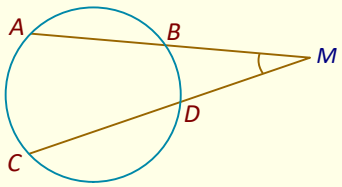
پاسخ

نکته ۱۲

زاویه بین امتداد دو وتر:

هرگاه امتدادهای دو وتر یکدیگر را خارج دایره قطع کنند، زاویه‌ی بین آن دو، برابر نصف اختلاف بین دو کمان رو به زاویه‌ی ایجاد شده در بیرون دایره است:

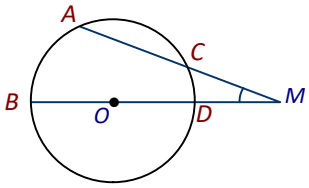
$$\hat{M} = \frac{\overset{\frown}{AC} - \overset{\frown}{BD}}{۲}$$



دلیل:

کافی است وتر BC را رسم کرده و مشابه قبل، از خاصیت زاویه‌ی خارجی در مثلث MBC استفاده کنید.

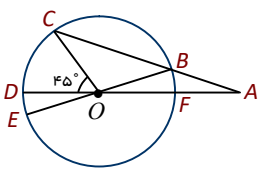
طبق شکل زیر، در دایره‌ی $C(O,۳)$ امتدادهای وتر AC و قطر BD در نقطه‌ی M متقاطع هستند. اگر $\hat{M} = ۳۰^\circ$ و $\overset{\frown}{AC} = ۸۰^\circ$ باشد، طول کمان AB برابر کدام است؟



❶ ۳π
❷ ۴π
❸ $\frac{۴\pi}{۳}$
❹ π

پاسخ

در شکل زیر، O مرکز دایره، DF قطر بوده و طول AB نصف قطر دایره است. اگر امتدادهای CB و DF در A متقاطع باشند، کمان CE چند درجه است؟ (BE قطر دایره است.)

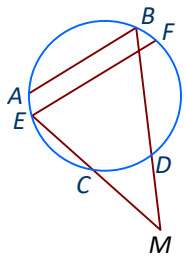


❶ ۳۰
❷ ۴۵
❸ ۶۰
❹ ۷۵

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

پاسخ

در شکل روبه‌رو $AB||EF$، $\overset{\frown}{AE}=۱۵^\circ$، $\overset{\frown}{EC}=۸۰^\circ$ و $\overset{\frown}{FD}=۱۰۰^\circ$ است. اگر $B\hat{M}E=۲۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{B}D$ چند درجه است؟ **(کنکور ۱۴۰۱)**

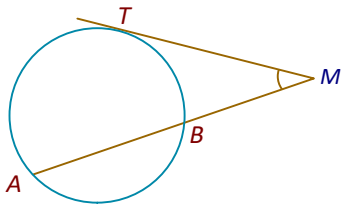


❶ ۷۱/۲۵
❷ ۷۴
❸ ۷۵
❹ ۷۸/۷۵

پاسخ

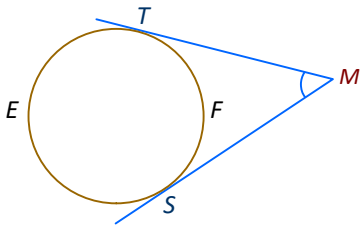
مشابه موارد قبل، دو نکته‌ی دیگر هم در تعیین اندازه‌ی زوایا وجود دارد:

❖ اگر امتداد یک وتر، خطی مماس بر دایره را قطع کند:



$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{AT}-\overset{\frown}{BT}}{۲}$$

❖ اگر دو خط مماس بر دایره، یکدیگر را قطع کنند:



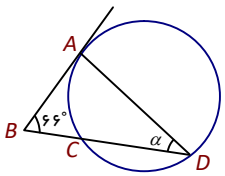
$$\hat{M}=\frac{\overset{\frown}{TES}-\overset{\frown}{TFS}}{۲}$$

دلیل:

در هر دو مورد، کافی است وتر مناسبی رسم کرده و از خاصیت زاویه‌ی خارجی استفاده کنید.

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

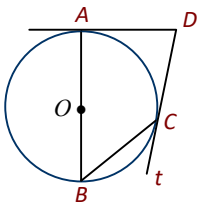
در شکل زیر، AB بر دایره مماس بوده و $\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{AC}$ است. مقدار α چند درجه است؟



۱) ۳۰
۲) ۳۳
۳) ۳۶
۴) ۳۸

پاسخ

در دایره‌ی به مرکز O، DA و DC بر دایره مماس هستند و $B\hat{C}T = ۴۰°$. اندازه‌ی زاویه‌ی D چند درجه است؟



۱) ۸۰
۲) ۵۰
۳) ۴۵
۴) ۴۰

پاسخ

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

TEST تمرین تست

۱- فاصله‌ی نزدیک‌ترین نقطه‌ی خط d تا دایره‌ی $C(O,۲x+۱)$ برابر $۷-۲x$ است. اگر خط و دایره نقطه‌ی مشترکی نداشته باشند، حدود x کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۲}$ ❷ $x<\frac{۳}{۲}$ ❸ $-\frac{۱}{۲}<x<\frac{۷}{۲}$ ❹ $-\frac{۱}{۲}<x<\frac{۳}{۲}$

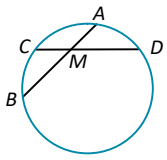
۲- خط d و دایره‌ی C مجزا هستند. چند خط می‌توان رسم کرد که بر دایره مماس بوده و با خط زاویه‌ی ۴۵° تشکیل دهد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۴ ❹ بی‌شمار

۳- دو خط d و l در نقطه‌ی A متقاطع هستند. چند دایره به شعاع معلوم r وجود دارد که مرکز آن روی d بوده و خط l بر آن مماس باشد؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۰ ❹ بی‌شمار

۴- در شکل مقابل دو وتر مساوی و متقاطع AB و CD در دایره مفروض‌اند. در این صورت:



❶ $AD=BC$
❷ $MD=MB$
❸ $\angle DBC=\angle ADB$
❹ تمام موارد صحیح است.

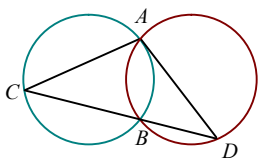
۵- در دایره‌ی $C(O,۴)$ طول وتر AB برابر $\sqrt{۳۲}$ است. طول کمان بزرگ‌تر AB برابر کدام است؟

❶ ۸π ❷ ۶π ❸ ۵π ❹ ۴π

۶- دایره‌ی به شعاع ۵ و نقطه‌ی A به فاصله‌ی ۱ از مرکز دایره مفروض است. چند وتر به طول ۶ در دایره رسم می‌شود که از A عبور کند؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۰ ❹ بی‌شمار

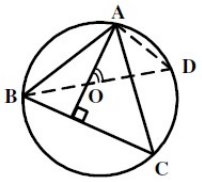
۷- دو دایره با شعاع‌های برابر مطابق شکل زیر در نقاط A و B متقاطع‌اند. از نقطه‌ی B قاطع CD را نسبت به دو دایره رسم می‌کنیم. مثلث ACD همواره:



❶ متساوی‌الساقین است.
❷ قائم‌الزاویه است.
❸ قائم‌الزاویه‌ی متساوی‌الساقین است.
❹ متساوی‌الاضلاع است.

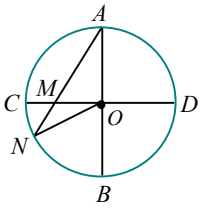
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۸- در شکل زیر O محل برخورد ارتفاع‌های مثلث ABC است. اندازه‌ی $A\hat{O}D$ برابر کدام است؟ **(کنکور ۹۲)**



1. $O\hat{B}C$
2. $C\hat{A}D$
3. $O\hat{A}C$
4. $A\hat{D}O$

۹- در شکل زیر دو قطر AB و CD بر هم عمودند و $OM = MN$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چند درجه است؟

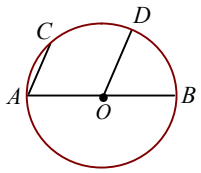


1. ۲۰
2. ۲۲/۵
3. ۳۰
4. ۴۵

۱۰- در مثلث ABC داریم: $\hat{B} = ۵۰^\circ$ و $\hat{C} = ۶۰^\circ$. نیمساز داخلی زاویه‌ی A و عمود منصف ضلع BC در نقطه‌ی M متقاطع‌اند. زاویه‌ی MBC چند درجه است؟

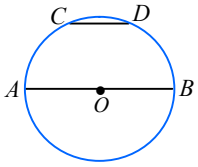
1. ۲۵
2. ۳۰
3. ۳۵
4. ۴۰

۱۱- در شکل زیر AB قطر دایره است، $CA \parallel OD$ و $\overset{\frown}{AC} = ۵۰^\circ$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{O}B$ چند درجه است؟



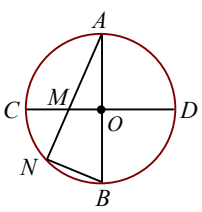
1. ۵۵
2. ۶۰
3. ۶۵
4. ۷۰

۱۲- در دایره‌ی $C(O,۴)$ زیر، $AB \parallel CD$ و $\overset{\frown}{CD} = ۴۵^\circ$ است. طول کمان DB کدام است؟



1. $\frac{\pi}{۴}$
2. $\frac{۲\pi}{۳}$
3. $\frac{۳\pi}{۲}$
4. ۲π

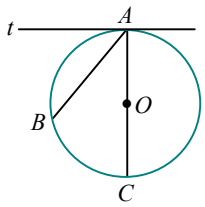
۱۳- در شکل زیر دو قطر AB و CD بر هم عمودند و $NB = MN$. اندازه‌ی زاویه‌ی $\hat{A}$ چه کسری از قائمه است؟



1. $\frac{۱}{۶}$
2. $\frac{۱}{۵}$
3. $\frac{۱}{۴}$
4. $\frac{۱}{۳}$

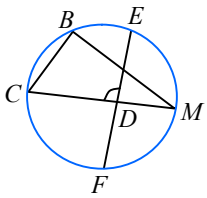
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۱۴ – در شکل زیر اندازه‌ی زاویه‌ی ظلی BAt برابر 50° است. اندازه‌ی کمان BC چند درجه است؟



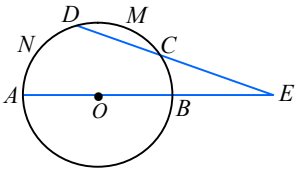
1. ۸۵
2. ۸۰
3. ۷۵
4. ۷۰

۱۵ – در شکل زیر M وسط کمان EF است و کمان BC برابر ۵۰ درجه است. مجموع زوایای B و D چقدر است؟



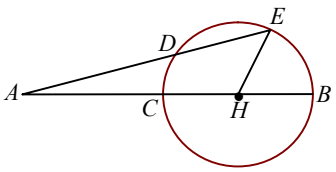
1. ۱۷۰
2. ۱۸۰
3. ۱۸۵
4. ۲۰۰

۱۶ – در شکل زیر O مرکز دایره، کمان $DMC = 30^\circ$ و $\hat{E} = 30^\circ$. اندازه‌ی کمان AND چند درجه است؟



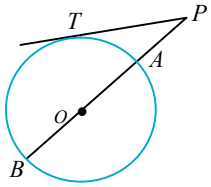
1. ۸۵
2. ۹۵
3. ۱۰۵
4. ۱۱۵

۱۷ – در شکل زیر $\hat{A} = 17^\circ$، $\hat{E} = 31^\circ$ و نقطه‌ی H وسط قطر CB می‌باشد. کمان CD چند درجه است؟



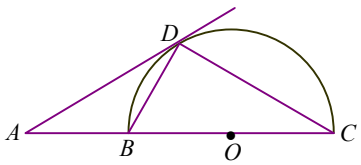
1. ۱۴
2. ۱۹
3. ۲۲
4. ۲۴

۱۸ – در شکل زیر شعاع دایره برابر ۶، AB قطر و $PA = 4$ است. طول مماس PT کدام است؟



1. $4\sqrt{3}$
2. $5\sqrt{2}$
3. ۶
4. ۸

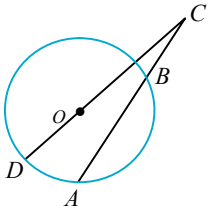
۱۹ – در شکل زیر، AD بر نیم‌دایره مماس است و $AB = BD$. اندازه‌ی زاویه‌ی $D\hat{C}B$ چند درجه است؟



1. ۳۰
2. ۴۰
3. ۴۵
4. ۶۰

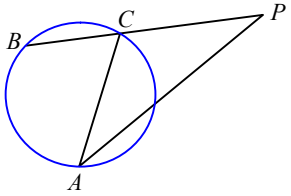
توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲۰– در شکل روبه‌رو، BC برابر شعاع دایره است. اگر $\hat{C}=۲۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی کمان AD چند درجه است؟



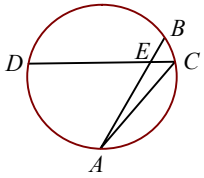
❶ ۴۰
❷ ۴۵
❸ ۵۰
❹ ۶۰

۲۱– در شکل زیر، مثلث ACP متساوی الساقین ($AC=PC$) و $\hat{P}=۳۲^\circ$ است. اندازه‌ی کمان AB چند درجه است؟



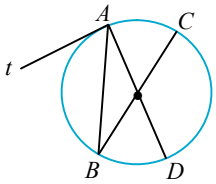
❶ ۱۲۸
❷ ۸۶
❸ ۷۴
❹ ۶۹

۲۲– در شکل روبه‌رو $\hat{A}=\frac{۱}{۴}\hat{C}$ است. اندازه‌ی زاویه‌ی $B\hat{E}C$ چند برابر اندازه‌ی کمان BC است؟



❶ $\frac{۲}{۵}$
❷ $\frac{۵}{۲}$
❸ $\frac{۴}{۳}$
❹ $\frac{۳}{۴}$

۲۳– در شکل زیر، نیم‌خط At بر دایره مماس بوده و $B\hat{A}t=۵۶^\circ$ است. اندازه‌ی کمان AC چند درجه است؟ (AD و BC قطر هستند.)

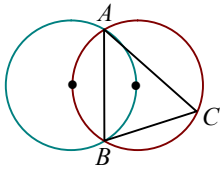


❶ ۶۸
❷ ۶۶
❸ ۶۴
❹ ۶۲

۲۴– دو قطر AB و CD در دایره‌ای به مرکز O مفروض‌اند. مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم. اگر $T\hat{A}D=۶۰^\circ$ باشد، اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{B}C$ چند درجه است؟

❶ ۳۰
❷ ۵۶
❸ ۶۰
❹ ۱۲۰

۲۵– دایره‌های زیر به شعاع یکسان، هر کدام از مرکز دیگری عبور کرده و در نقاط A و B متقاطع‌اند. اندازه‌ی زاویه‌ی $A\hat{C}B$ چند درجه است؟



❶ ۴۰
❷ ۴۵
❸ ۵۰
❹ ۶۰

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۲۶- پاره‌خط AB به اندازه‌ی ۸ واحد در صفحه‌ی مختصات مفروض است. چهار دایره با مراکز A و B و شعاع‌های ۳ و ۷ واحد رسم می‌کنیم. نقاط تلاقی دایره‌های کوچک با دایره‌های بزرگ، دقیقاً رأس‌های کدام چهارضلعی هستند؟ **(کنکور ۹۹)**

❶ لوزی
❷ متوازی‌الاضلاع
❸ مستطیل
❹ ذوزنقه‌ی متساوی الساقین

۲۷- فرض کنید خطوط $x+y=۱$ و $x-y=۳$ قطرهای یک دایره و خط $۴x+۳y+۵=۰$ مماس بر آن باشد. نزدیک‌ترین فاصله‌ی نقطه‌ی $M(۴,-۲)$ از دایره کدام است؟ **(کنکور ۱۴۰۰)**

❶ $\sqrt{۳}-۱$
❷ $\sqrt{۳}-\sqrt{۲}$
❸ $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
❹ $\sqrt{۵}-۲$

توجه فرمایید:
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

دوره ابتدایی (عادی)	متوسطه اول (عادی)	ریاضی تیزهوشان
جزوه ریاضی پنجم	جزوه ریاضی هفتم	ریاضی تیزهوشان ششم
جزوه ریاضی ششم	جزوه ریاضی هشتم	ریاضی تیزهوشان هفتم
	جزوه ریاضی نهم	ریاضی تیزهوشان هشتم
		ریاضی تیزهوشان نهم

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی – منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنکوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور حسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی حسابان (۱)
جزوه کنکور حسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی حسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان

۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴