

ترکیب: دانش شما + ممتوای بی نظیر تدریس ما

تمرین و پاسفنامه

درسنامه آپدیت

کوئیز و آزمون

«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»





«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(مذف هزینه چاپ)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

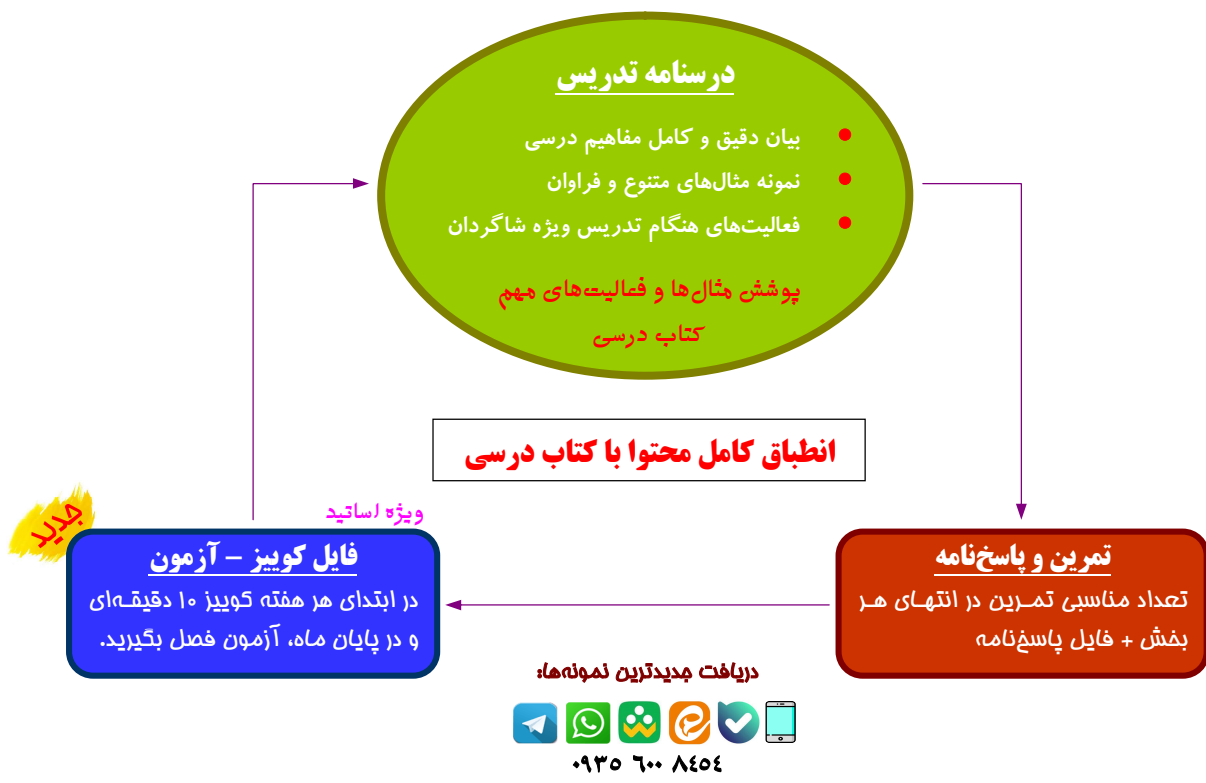
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

پلد نمونه از نتایج درفشان برخی از همکاران مجموعه درس آموزه: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

محتوای تشریحی و نهایی

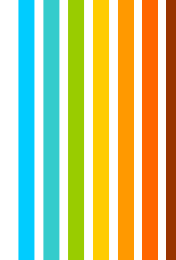


(خدمات منحصر به فرد گروه درس آموز)

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و ... روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.



۲

مثلاث

۴۱

مقدمات، معرفی نسبت‌ها و محاسبات مربوط به زوایای معروف، دایره‌ی مثلثاتی و کاربردها، روابط بین نسبت‌ها

۱

مجموعه و دنباله

۲

زیرمجموعه‌های اعداد حقیقی، مجموعه‌ی مرجع و متمم، الگو و دنباله، دنباله‌های حسابی هندسی

۵

تابع

۱۳۴

مفهوم تابع، بازنمایی و نمودارها، دامنه و ضابطه‌ی توابع، انواعی از توابع، رسم نمودارها توسط انتقال

۴

معادلات و نامعادلات

۹۱

مفهوم معادله و حل درجه اول، معادلات درجه دوم، سهمی و رسم نمودار، تعیین علامت عبارات و حل نامعادلات

۳

توان‌های گویا

۶۶

توان و ریشه‌های اعداد، محاسبات با ریشه‌ها، توان‌های گویای عددها، عبارت‌های جبری، اتحاد و تجزیه و کاربردها

۷

امتمال و آمار

۱۸۰

پیشامدهای تصادفی و مفاهیم پایه، محاسبه احتمال، قوانین احتمال و کاربرد، علم آمار و متغیرهای تصادفی

۶

روش‌های شمارش

۱۵۵

اصل‌های شمارش جمع و ضرب، کاربرد اصل‌ها، جایگشت اشیاء و محاسبات، ترکیب اشیاء



آموزش:

ریاضی دهم (تجربی - ریاضی)



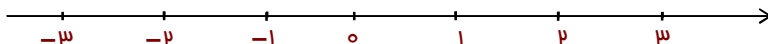
مجموعه الگو و دنباله

صفحه	فهرست
۳	■ زیرمجموعه‌های مهم \mathbb{R}
۱۲	■ مجموعه مرجع و متمم
۲۰	■ الگو و دنباله
۲۸	■ دنباله‌های حسابی
۳۳	■ دنباله‌های هندسی
۳۸	■ پاسخ فعالیت‌های پای تخته



1 زیر مجموعه های \mathbb{R}

اعداد حقیقی \mathbb{R} متناظر تمام نقاط روی محور هستند:



در این بخش، آشنایی بیشتری با این اعداد خواهیم داشت. به ویژه، معرفی نوع جدید و مهمی از مجموعه‌ها در عددهای حقیقی را خواهیم دید. یادآوری:

اعداد صحیح:

$$\mathbb{Z} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

چند زیر مجموعه‌ی مورد نیاز از \mathbb{Z} :

$$W = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$$

○ اعداد حسابی:

$$\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$$

○ اعداد طبیعی:

$$E = \{2k \mid k \in \mathbb{N}\} = \{2, 4, 6, \dots\}$$

○ اعداد طبیعی زوج:

و مجموعه‌ی اعداد طبیعی فرد:

$$O = \{2k - 1 \mid k \in \mathbb{N}\} = \{1, 3, 5, \dots\}$$

کسرها از تقسیم دو عدد صحیح ساخته می‌شوند:

اعداد گویا:

مجموعه‌ی تمام عددهای کسری به صورت زیر هستند:

$$\mathbb{Q} = \left\{ \frac{a}{b} : a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0 \right\}$$

یعنی:

تمام کسرهایی که صورت و مخرج آن‌ها دو عدد صحیح بوده و مخرج مخالف صفر باشد.

بنابراین:

تمام عددهای $\frac{2}{5}$ ، $-\frac{6}{2} = -3$ ، $\frac{12}{4} = 3$ و $\frac{0}{1} = 0$ مثال‌هایی از عددهای گویا بوده، ولی $\frac{2}{0}$ تعریف نشده است. بویژه:

تمام عددهای طبیعی و صحیح، عدد گویا هم محسوب می‌شوند.

زیرا می‌توان به این عددها مخرج 1 داد: $1 = \frac{1}{1}$ و $2 = \frac{2}{1}$ و ... بنابراین:

$$\mathbb{N} \subseteq \mathbb{W} \subseteq \mathbb{Z} \subseteq \mathbb{Q}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

**توجه کنید:**

می‌توان نشان داد بسیاری از عددهای حقیقی، مانند $\sqrt{2}$ و $\sqrt{3}$ را نمی‌توان به صورت کسر گویا نوشت؛ بنابراین این عددها گویا نیستند. ولی گاهی:

عدد زیر رادیکال مجذور کامل بوده یا قابل تبدیل به صورت مجذور یک عدد گویا است.

در این صورت عدد رادیکالی، گویا خواهد بود.

برای نمونه:

$$\sqrt{64} = 8 \in \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{9}{49}} = \sqrt{\left(\frac{3}{7}\right)^2} = \frac{3}{7} \in \mathbb{Q} \quad \text{و} \quad \sqrt{\frac{5}{45}} = \sqrt{\frac{1}{9}} = \frac{1}{3} \in \mathbb{Q}$$

بعلاوه:

در سال‌های قبل دیده‌ایم که بین هر دو عدد گویا، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد. در کل بدانیم:

بین هر دو عدد حقیقی دلخواه، بی‌شمار عدد گویا وجود دارد.

معرفی دقیق‌تر عددهای حقیقی که گویا نیستند:

اعداد گنگ:

هر عدد حقیقی که گویا نباشد، گنگ نامیده می‌شود.

یعنی:

هر عددی که نتوان آن را به صورت تقسیم دو عدد صمیع نوشت.

بنابراین:

مجموعه‌ی اعداد گنگ دقیقاً $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$ است؛ آن را با \mathbb{Q}' یا \mathbb{Q}^c نشان می‌دهیم. (توجه: $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}'$)

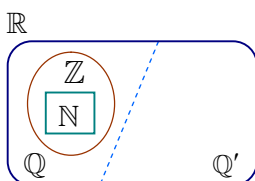
توجه کنید:

ساده‌ترین عددهای گنگ عبارتند از:

- عددهای رادیکالی نظیر $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt[3]{9}$ و $\sqrt{\frac{8}{3}}$ که ساده نمی‌شوند.
 - عددهایی نظیر $\sqrt{3} - \frac{2}{5}$ و $\sqrt{2} + 1$ که از جمع و تفریق یک عدد گنگ و یک عدد گویا به دست می‌آیند.
- بپذیرید: عدد $\pi \cong 3/14$ نیز گنگ است. توجه: عدد $3/14$ گویا است. (چرا؟)

بنابراین:

مجموعه اعداد حقیقی و زیرمجموعه‌های معروف آن با نمودار ون به صورت روبه‌رو قابل نمایش است:





مثال: جواب هر مورد را نوشته و آن را با جمله‌ای مختصر، توصیف کنید.

① $\mathbb{R} - \mathbb{Q}'$

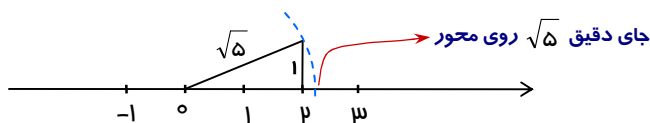
② $\mathbb{Z} - \mathbb{W}$

③ $\mathbb{R} - \mathbb{Z}$

نمایش روی محور:

- **اعداد گویا:** هر عدد گویا را می‌توان با توجه به مقدار مخرج آن و تقسیم هر واحد از محور، نمایش داد.
- **اعداد گنگ:** برخی از عددهای گنگ را نیز می‌توان با استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس در مثلث قائم‌الزاویه روی محور مشخص کرد.

برای نمونه، نمایش عدد $\sqrt{5}$ روی محور را ببینید: (دقیق تر توضیح دهید!)



توجه:

در پایه‌های قبل دیده‌ایم که بین هر دو کسر می‌توان بی‌شمار کسر گویا نوشت. در کل بدانید:

مانند عددهای گویا، بین هر دو عدد، بی‌شمار عدد گنگ وجود دارد.

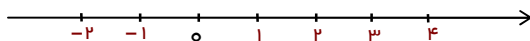
مثال: هر عدد را به صورت تقریبی روی محور اعداد نمایش دهید.

پ) $2\pi - 3$

ب) $3 - \sqrt{2}$

الف) $-\frac{7}{4}$

پاسخ



یک مفهوم جدید:

گاهی لازم است مجموعه‌ای شامل تمام عددهای حقیقی بین دو عدد (برای نمونه؛ بین -1 و 3) را نمایش دهیم. یعنی:

$$A = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 3\}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

نماد مختصر:

با استفاده از عددهای شروع و پایان، آن را با نماد $(-1, 3)$ نمایش می‌دهیم. نام آن «بازه» است و چون شامل عددهای ابتدا و انتها نیست، به آن «بازه باز» گوئیم.

توجه کنید:





در صورتی که عددهای ابتدا و انتهای بازه جزء آن باشند، به جای پرانتز، به ترتیب از کروشه‌های $[$ و $]$ استفاده می‌شود. برای نمونه؛

$$\{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x < 3\} = [-1, 3)$$

اکنون انواع بازه‌ها را به صورت کلی معرفی می‌کنیم.

بازه‌های اعداد:

اگر a و b دو عدد حقیقی و $a < b$ باشد، انواع بازه‌های عددی به صورت زیر نوشته شده و هر یک را می‌توان به عنوان مجموعه‌ای از نقاط روی محور نمایش داد:

- ۱) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x < b\} = (a, b)$ **بازه باز**

- ۲) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x < b\} = [a, b)$ **بازه نیم‌باز**

- ۳) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a < x \leq b\} = (a, b]$ **بازه نیم‌باز**

- ۴) $\{x \mid x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\} = [a, b]$ **بازه بسته**


توجه کنید:

طبق آن چه تاکنون گفته‌ایم، هر بازه به شکل بالا شامل بی‌شمار عدد گویا و بی‌شمار عدد گنگ است، ولی فقط تعداد محدودی عدد صحیح داشته یا حتی می‌تواند هیچ عدد صحیحی نداشته باشد.

مثال: نامعادله $-4 < -2x + 3 \geq 1$ را حل کرده و مجموعه جواب آن را به صورت بازه و روی محور نمایش دهید.





مثال: هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $\sqrt{2} - \sqrt{3}$ و -2 و $\frac{2}{3} + \frac{3}{2}$

ب) $[-3, -1]$ و $(\frac{5}{3}, \frac{5}{2})$ و $(-2, 0]$

پاسخ

توجه کنید:

برای محاسبات روی بازه‌ها، مانند اجتماع، اشتراک و ...، بهتر است همه‌ی آن‌ها را روی یک محور نمایش داده و محاسبات مربوطه را به سادگی انجام دهیم. نمونه‌های بعد را ببینید:

مثال: حاصل عبارت‌های زیر را به صورت یک بازه نشان دهید:

الف) $(-1, 2] \cup (2, 3]$

ب) مجموعه‌ی $B - A$ با داشتن $A = [0, 3)$ و $B = (-2, 2]$.

با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش آموز

۱. اگر رابطه‌ی $[a, b] \cap [-3, a+2] = [-2, a+1]$ برای بازه‌ها برقرار باشد، حاصل ضرب a و b را بیابید.

جواب: ۲

برخی بازه‌ها، ابتدا یا انتها ندارند:

بازه‌های بی کران:

بازه‌هایی که از یک طرف یا از هر دو طرف بی کران (نامحدود) هستند، با استفاده از نماد بی‌نهایت ∞ ، به طریق مشابه تعریف می‌شوند:

۱) $\{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty)$



توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۲) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty)$



۳) $\{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a)$



۴) $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a]$



۵) $(-\infty, +\infty) = \mathbb{R}$

مجموعه تمام اعداد روی محور مقیاسی

توجه کنید:

هرگاه در سمتی از یک بازه نماد $+\infty$ یا $-\infty$ قرار گیرد، بازه‌ی نظیر آن به صورت پراکنش (باز) است. زیرا این دو نماد خودشان عدد نبوده و عضو هیچ بازه‌ای نیستند.

مثال: حاصل عبارت زیر را با رسم بازه‌ها روی محور به دست آورید.

$(-\infty, 3) \cup (4, +\infty)$

پاسخ

مثال: هر مورد را بر حسب اجتماع بازه‌ها بنویسید.

① $\mathbb{R} - \{-1\}$

② $(-2, +\infty) - (-2, 2)$

مثال: (از کتاب) هر کدام از عددهای قسمت (الف) در یکی از بازه‌های قسمت (ب) واقع است. آن‌ها را به هم مربوط کنید.

الف) $0/2$ و $-\frac{5}{4}$ و -500 و $6/22 \times 10^{23}$

ب) $(-\infty, -4)$ و $[3, +\infty)$ و $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$ و $(-2, 3)$

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



در صورت لزوم، با استفاده از محور پاسخ دهید:

ویژه دانش آموز

۲. اگر $A = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x < 2\}$ و $B = \{x \mid x \in \mathbb{R}, x > -3\}$ ، نقطه‌ی وسط بازه‌ی $A \cap B$ را مشخص کنید.

جواب: $-\frac{1}{2}$

در پایان این بخش، مجموعه‌ها را از جنبه‌ی دیگری به دو نوع تقسیم می‌کنیم:

متناهی یا نامتناهی:

مجموعه‌ها بر حسب تعداد عضوهایشان به دو نوع متناهی و نامتناهی تقسیم می‌شوند. علاوه؛ یک مجموعه فقط وقتی متناهی است که:

تعداد عضوهای آن مشخص و برابر عددی از مجموعه‌ی اعداد مسابی باشد.

برای نمونه:

مجموعه‌ی $\{101, 102, 103, \dots, 999\}$ متناهی و زیرمجموعه‌ی $\{2, 1, 0, -1, -2, \dots\}$ از \mathbb{Z} ، نامتناهی است.

به موارد زیر نیز توجه داشته باشید:

- تعداد عضوهای مجموعه‌ی \emptyset (مجموعه‌ی تهی) برابر صفر بوده و این مجموعه متناهی است.
- تمام مجموعه‌های استاندارد $\mathbb{N}, \mathbb{W}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{Q}'$ و \mathbb{R} نامتناهی هستند.
- تمام بازه‌ها نامتناهی هستند. (مثال بعد را ببینید).

مثال: الف) عددهای $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots$ در مقایسه با عددهای صفر و یک چگونه‌اند؟

ب) با توجه به قسمت قبل، در مورد متناهی یا نامتناهی بودن بازه $(0, 1)$ چه می‌توان گفت؟

مثال: با بررسی اعضای مجموعه‌های زیر، متناهی یا نامتناهی بودن هر کدام را معلوم کنید.

$$A = \{(-1)^n \mid n \in \mathbb{N}\} \text{ الف}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



ب) $B = \{2^n + (-2)^n \mid n \in \mathbb{N}\}$

پ) $C = \{\frac{|n|}{n^2} \mid n \in \mathbb{N}\}$

ویژه دانش آموز

۳. با تعیین اعضای مجموعه‌ی زیر، مشخص کنید که آن متناهی است یا نامتناهی؟

$$A = \{x \in \mathbb{Z} : \frac{1}{x} \in \mathbb{Z}\}$$

جواب: ۲ عضو

مثال: مجموعه‌های A و B نامتناهی و مجموعه‌ی C متناهی است. متناهی یا نامتناهی بودن هر مورد را در صورت امکان

معلوم کنید.

الف) $A \cup C$

ب) $B \cap C$

پ) $B - A$

پاسخ دهید (۱)

۱- مجموعه جواب نامعادلات زیر را به صورت بازه نمایش دهید:

الف) $2x + 5 \leq 6x - 1$ ب) $-2 < 8x - 1 \leq 5$

پ) $-1 < -\frac{x-3}{3} \leq 2$ ت) $\frac{1}{4}x - \frac{1}{3}x + x \geq 2(-x+1)$

۲- اگر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ و $B = \{x \in \mathbb{R} \mid -3 < x \leq 2\}$ و $C = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\}$ باشند، عبارت‌های زیر را به صورت

بازه مشخص کنید:

الف) $(A \cap B) \cup C$ ب) $C - (A \cup B)$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۳- اگر نقطه‌ی میانی بازه‌ی $[4t-1, t+7]$ برابر ۲- باشد، مقدار t و بازه‌ی مربوطه را مشخص کنید.

۴- مقادیر a و b را طوری مشخص کنید که نقطه‌ی میانی بازه‌ی $(a-b, a+b)$ برابر ۳ و طول آن برابر ۵ باشد.

۵- محدوده‌ی m را چنان مشخص کنید که بازه‌ی $[2m+1, m-3]$ شامل عدد ۳- باشد.

۶- فرض کنید A و B دو مجموعه و $A \subseteq B$ باشد. همواره کدام مورد درست و کدام نادرست است؟

الف) اگر A نامتناهی باشد، آنگاه B نامتناهی است.

ب) اگر A متناهی باشد، آنگاه B متناهی است.

پ) اگر B متناهی باشد، آنگاه A متناهی است. (نهایی؛ خرداد ۴۰۳)

ت) اگر B نامتناهی باشد، آنگاه A نامتناهی است.

منتخب کتاب:

۱- فرض کنید U مجموعه‌ی تمام مضرب‌های طبیعی عدد ۵ باشد.

الف) U را با نمایش اعضای آن بنویسید.

ب) U متناهی است یا نامتناهی؟

پ) یک زیر مجموعه‌ی متناهی از U بنویسید.

ت) دو زیر مجموعه‌ی نامتناهی مانند A و B از U بنویسید؛ به طوری که: $A \subseteq B$.

۲- اگر $A \subseteq B$ و B مجموعه‌ای متناهی باشد، آنگاه A متناهی خواهد بود یا نامتناهی؟

توجه:

سؤالات ترکیبی و همپنین پالشی، جهت آمادگی هر چه بیشتر دانش‌آموزان در امتحانات و پاسخ به سؤالات نسبتاً دشوار آورده شده است.

لطفاً طبق نظر دبیرتان، اقدام به پاسخ‌گویی کرده یا از آن‌ها صرف نظر کنید.

سؤال ترکیبی:

۱- درستی یا نادرستی هر مورد را با ذکر دلیل بیان کنید.

الف) اگر هر زیر مجموعه از A متناهی باشد، آنگاه خود A متناهی است.

ب) اگر A نامتناهی و B متناهی باشد، $B-A$ برابر تهی است.

۲- اشتراک دو مجموعه‌ی $A = [2m+1, +\infty)$ و $B = (-\infty, 1-m]$ متناهی است. حدود m را مشخص کنید.



چالش (ویژه علاقمندان)

۱- برای عدد طبیعی n قرار دهید: $A_n = [(-1)^n n, n-a]$. مقدار a را چنان مشخص کنید که مجموعه‌ی $\bigcup_{n=1}^4 A_n$

دارای یازده عدد صحیح باشد. (منظور عبارت $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$ است.)

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مفاهیم این بخش هنگام کاربرد مجموعه‌ها بسیار مفید واقع می‌شوند.

مرجع و متمم

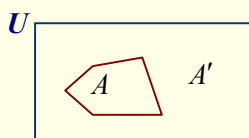
گاهی هنگام کار با مجموعه‌ها، مجموعه‌ای با نماد U در نظر می‌گیریم که:

تمام مجموعه‌های مورد بحث ما، زیر مجموعه‌ی آن هستند.

به این مجموعه، مجموعه‌ی «مرجع» یا مجموعه‌ی «بهانی» گفته می‌شود.

بعلاوه:

اگر A یک زیرمجموعه از U باشد، مجموعه‌ی تمام اعضای خارج A را با A' نشان داده و به آن «متمم» A گوئیم. یعنی: $A' = U - A$



بنابراین:

هر مجموعه‌ی A ، یک زیرمجموعه‌ی U است و بعلاوه، به نوعی می‌توان گفت A و A' مقابل (خلاف) یکدیگر هستند. نمونه‌ای ساده از مرجع و متمم:

$$U = \{0, 1, 2, 3, \dots, 9\}, B = \{0, 2, 4, 6, 8\} \Rightarrow B' = \{1, 3, 5, 7, 9\}$$

مثال: (مشابه کتاب) متمم مجموعه‌ی $A = \mathbb{N}$ را در دو حالت زیر مشخص کنید.

① اگر $U = \mathbb{W}$ باشد.

② اگر $U = \mathbb{Z}$ باشد.

مثال: اگر $A = [-2, \infty)$ و $B = (-\infty, 0)$ و مرجع \mathbb{R} باشد، حاصل هر مورد را بنویسید.

الف) $B - A'$

ب) $B' \cap A$

پ) $\emptyset - A'$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



توجه کنید:

همیشه $\emptyset' = U$ است، زیرا طبق تعریف بالا:

$$\emptyset' = U - \emptyset = U$$

همیشه $U' = \emptyset$ است، زیرا:

$$U' = U - U = \emptyset$$

بررسی خواص بیشتری از مرجع و متمم:

مثال: فرض کنید $U = \{1, 2, 3, \dots, 8\}$ مجموعه‌ی مرجع داده شده و $A = \{2, 3, 7\}$ را در نظر بگیرید. به چند نمونه و نکات حاصل از آن توجه کنید:

① می‌خواهیم از A دو بار متمم بگیریم:

$$A' = U - A = \{1, 2, \dots, 8\} - \{2, 3, 7\} = \{1, 4, 5, 6, 8\}$$

اکنون از مجموعه‌ی A' متمم می‌گیریم:

$$(A')' = U - A' = \{1, 2, \dots, 8\} - \{1, 4, 5, 6, 8\} = \{2, 3, 7\}$$

نکته:

تساوی $(A')' = A$ که در این قسمت و البته در شکل قبل دیدیم، همواره برقرار است.

② اشتراک مجموعه‌ی A با متمم خود را ببینید:

$$A \cap A' = \{2, 3, 7\} \cap \{1, 4, 5, 6, 8\} = \emptyset$$

نکته:

رابطه‌ی $A \cap A' = \emptyset$ برای هر مجموعه‌ای درست است.

③ اجتماع مجموعه‌ی A را با متمم خود ببینید:

$$A \cup A' = \{2, 3, 7\} \cup \{1, 4, 5, 6, 8\} = \{1, 2, \dots, 8\} = U$$

نکته:

رابطه‌ی $A \cup A' = U$ نیز همواره درست است.

مثال: مجموعه‌ی \mathbb{N} را به عنوان مرجع گرفته و موارد زیر را انجام دهید:

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مانند A مثال بزنید که A' نامتناهی باشد. آیا ممکن است A' متناهی شود؟

ب) مجموعه‌ای متناهی مانند B مثال بزنید که B' نامتناهی باشد. آیا ممکن است B' متناهی شود؟



برخی دیگر از خواص مجموعه‌ها را توسط نمونه‌هایی بیان می‌کنیم.

مثال: (از کتاب) فرض کنید $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ مجموعه‌ی مرجع، $A = \{1, 2, 3\}$ ، $B = \{2, 4\}$ و $C = \{2, 3\}$ باشد. با دو بار متمم‌گیری از A ، تساوی $(A')' = A$ که قبلاً دیدیم، این‌جا هم مشاهده می‌شود. اکنون در هر مورد زیر، جاهای خالی را کامل کنید.

الف) $A' = \{ \quad \}$ و $C' = \{ \quad \}$

نتیجه:

در این نمونه، از $C \subseteq A$ ، رابطه‌ی بین متمم‌ها وجود دارد که همیشه برقرار است.

ب) $A \cup B = \{ \quad \}$ و $(A \cup B)' = \{ \quad \}$ و $A' \cap B' = \{ \quad \}$

نتیجه:

تساوی که اینجا مشاهده می‌شود، همیشه برقرار است.

سؤال:

حداستان در مورد طرف دوم: $(A \cap B)' = \dots\dots\dots$ چیست؟ آن را با محاسبه مانند بالا نشان دهید.

پ) $A - B = \{ \quad \}$ و $A \cap B' = \{ \quad \}$ و $A - (A \cap B) = \{ \quad \}$

نتیجه:

تساوی‌های $A - B = \dots\dots\dots$ و $A - B = \dots\dots\dots$ که در این نمونه دیده می‌شود، همیشه برقرار هستند.

مثال: خاصیت زیر را با نمودار ون نشان دهید:

اگر $A \subseteq B$ باشد، آنگاه خواهیم داشت: $B' \subseteq A'$



ویژه دانش‌آموز

۴. رابطه‌ی مهم زیر را با استفاده از نمودار ون نیز نشان دهید:

$$A - B = A \cap B'$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: با فرض $B' \subset A'$ ، کدام رابطه‌ی $A \cup B = A$ یا $A - B = \emptyset$ صحیح است؟

پاسخ

در ادامه، به مباحثی در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها می‌پردازیم.

تعداد عضوها:

اگر A مجموعه‌ای متناهی باشد، تعداد عضوهای آن را با $n(A)$ نشان می‌دهیم. برای نمونه:

$$A = \{-1, 0, 1, 3, 4\} \Rightarrow n(A) = 5$$

بعلاوه:

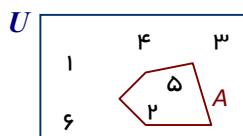
به چند رابطه‌ی مهم در مورد تعداد اعضای مجموعه‌ها توجه کنید:

رابطه ۱:

چون A و A' خلاف (متمم) یکدیگر هستند، همواره:

$$n(A') = n(U) - n(A)$$

برای نمونه:



در شکل مقابل مجموعه‌ی مرجع به صورت $U = \{1, 2, \dots, 6\}$ دارای ۶ عضو است که ۲ تای آن‌ها در A و ۴ تای بقیه خارج A ، یعنی در A' قرار دارند.

$$n(A') = n(U) - n(A) = 6 - 2 = 4$$

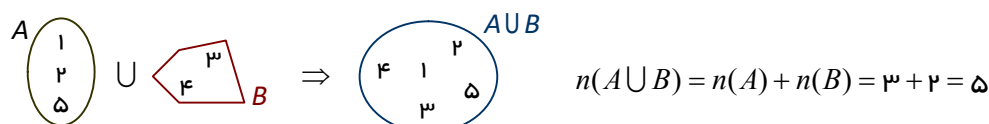
رابطه ۲:

اگر A و B دو مجموعه‌ی مجزا (یعنی جدا از هم: $A \cap B = \emptyset$) باشند، همواره:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B)$$

برای نمونه:

در شکل زیر، مجموعه‌ی A دارای ۳ عضو و مجموعه‌ی B دارای ۲ عضو است و هنگام اجتماع گرفتن، کل ۵ عضو در کنار یکدیگر قرار خواهند گرفت:



$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 3 + 2 = 5$$

نمونه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



رابطه ۳:

در صورتی که مجموعه‌های A و B اشتراک هم داشته باشند، رابطه‌ی زیر برقرار است:

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

زیرا:

عضوهای مشترک در محاسبه‌ی $n(A \cup B)$ فقط یک‌بار به حساب می‌آید، ولی در $n(A) + n(B)$ دو بار شمرده شده و باید یک‌بار هم کم شود.

مثال: در یک جمع ۱۱ نفره، ۹ نفر به چای و ۵ نفر به قهوه علاقه دارند. چند نفر به هر دوی این نوشیدنی‌ها علاقه دارند؟ (هر فرد لااقل به یک نوشیدنی علاقه‌مند است.)



توجه کنید: (مهم)

بسیاری وقت‌ها، نمایش تعداد اعضا در نمودار ون، حل مسأله را آسان‌تر می‌کند.

مثال: (از کتاب) یک دوره جشنواره فیلم کوتاه با شرکت ۲۱ فیلم در موضوعات مختلف در حال برگزاری است که در بین آن‌ها ۷ فیلم پویانمایی (کارتونی) و ۸ فیلم طنز وجود دارد به طوری که، ۳ تا از فیلم‌های پویانمایی با مضمون طنز می‌باشند. مطلوب است تعداد کل فیلم‌هایی که: الف) پویانمایی یا طنزند.

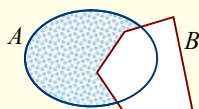
ب) غیرپویانمایی و غیر طنزند.

تعداد عضوهایی که فقط در یکی از دو مجموعه قرار دارند:

رابطه ۴:

رابطه‌ی زیر تعداد عضوهایی را نشان می‌دهد که فقط در A قرار دارند:

$$n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$$



توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



زیرا:

در محاسبه ی $A - B$ ، فقط عضوهای مشترک از A برداشته می‌شوند.

مثال: کلاسی ۳۲ دانش‌آموز دارد. اگر ۱۳ نفر عضو تیم فوتبال و ۱۴ نفر عضو تیم والیبال این کلاس باشند و ۱۰ نفر هم عضو هیچ تیمی نباشند:

الف) چند نفر هم در تیم فوتبال و هم در تیم والیبال عضو هستند؟

ب) چند نفر فقط عضو تیم فوتبال هستند؟

پ) چند نفر فقط عضو تیم والیبال هستند؟

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

اگر $n(A) = 60$ ، $n(B) = 70$ و $n(A - B) = 15$ ، مقدار $n(A \cup B)$ را به دست آورید.

پاسخ

حالتی بسیار مهم:

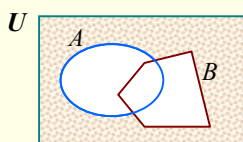
رابطه ۵:

وقتی A و B دو مجموعه هستند،

عضوهای که در هیچ‌یک از آن دو قرار ندارند: $A' \cap B'$ ، همان $(A \cup B)'$ است.

بنابراین تعداد چنین عضوهای برابر است با:

$$n(U) - n(A \cup B) = n(U) - [n(A) + n(B) - n(A \cap B)]$$



توجه کنید:

بیان دیگری از این مجموعه چنین است: «اعضایی که نه در A باشند و نه در B »

مثال: در یک کلاس با ۳۳ دانش‌آموز، ۲۱ نفر در درس ریاضی و ۲۶ نفر در شیمی قبول شده و ۱۸ نفر در هر دو درس قبول شده‌اند. چند نفر در هر دو درس مردود شده‌اند؟

نمونه فرماید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ

مثال: (از کتاب) فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$. مطلوب است:

الف) $n(A' \cap B)$

ب) $n(A' \cap B')$

مانند نمونه‌ها پاسخ دهید:

ویژه دانش آموز

۵. از ۶۵ نفر دانش‌آموز پایه‌ی دهم یک مدرسه، ۵۱ نفر به درس ریاضی، ۴۲ نفر به درس هندسه و ۳۳ نفر به هر دو درس علاقمند هستند. مشخص کنید:

الف) چند نفر لاقلاً به یکی از دو درس علاقمند هستند؟

ب) چند نفر فقط به درس هندسه علاقمند هستند؟

پ) چند نفر دقیقاً به یک درس از دو درس علاقمند هستند؟

ت) چند نفر به هیچ کدام از دو درس علاقه‌ای ندارند؟

جواب: به ترتیب ۶۰، ۹، ۲۷ و ۵

پاسخ دهید (۲) ?

۱- \mathbb{R} را مرجع گرفته و متمم مجموعه‌های زیر را روی محور مشخص کنید.

پ) $C = \mathbb{N}$ ب) $B = (-3, 1]$ الف) $A = (-\infty, -1)$

۲- اگر A و B دو مجموعه باشند به طوری که $n(A \cap B) = 3$ ، $n(A \cup B) = 11$ و $n(B) = 11$ ، مقدار $n(A)$ را بیابید.

نمونه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



۳- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 15$ ، $n(A) = 6$ ، $n(B) = 11$ و $n(A \cup B) = 14$ مطلوب است:

الف) $n(A \cap B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$

۴- در یک جمع ۳۷ نفر ورزشکار حاضرند که ۲۵ نفر فوتبال و ۲۱ نفر والیبال بازی می‌کنند.
الف) چند نفر فقط فوتبال بازی می‌کنند؟
ب) چند نفر هر دو ورزش را انجام می‌دهند؟
پ) چند نفر فقط یک ورزش انجام می‌دهند؟

۵- اجتماع دو مجموعه‌ی A و B دارای ۲۵ عضو است. به مجموعه‌ی A تعداد ۷ عضو جدید اضافه می‌کنیم و در نتیجه‌ی آن ۵ عضو به اشتراکشان اضافه می‌شود. اجتماع فعلی این دو مجموعه چند عضو دارد؟

منتخب کتاب:

۱- \mathbb{N} را به عنوان مجموعه مرجع در نظر بگیرید.

الف) مجموعه‌ای نامتناهی مثل A مثال بزنید که A' هم نامتناهی باشد.

ب) مجموعه‌ای نامتناهی مثل B مثال بزنید که B' متناهی باشد.

پ) مجموعه‌ای متناهی مثل C مثال بزنید و C' را به دست آورید. C' متناهی است یا نامتناهی؟

۲- فرض کنیم A و B زیر مجموعه‌هایی از مجموعه‌ی مرجع U باشند به طوری که $n(U) = 100$ ، $n(A) = 60$ ، $n(B) = 40$ و $n(A \cap B) = 20$ مطلوب است:

الف) $n(A \cup B)$ ب) $n(A \cap B')$ پ) $n(A' \cap B)$ ت) $n(A' \cap B')$

۳- در یک نظرسنجی از ۱۱۰ مشتری یک فروشگاه زنجیره‌ای مشخص شد که ۷۰ نفر آن‌ها در یک ماه گذشته از محصولات شرکت A و ۵۷ نفرشان از محصولات شرکت B خرید کرده‌اند. همچنین ۳۲ نفر از آنان نیز اعلام کردند که در این مدت از هر دو شرکت خرید کرده‌اند. چه تعداد از این ۱۱۰ نفر در یک ماه گذشته:
الف) دست کم از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ب) فقط از شرکت A خرید کرده‌اند.
پ) دقیقاً از یکی از این دو شرکت خرید کرده‌اند.
ت) از هیچ یک از این دو شرکت خرید نکرده‌اند.

سؤال ترکیبی:

۱- اگر A و B با شرایط $n(A) = 8$ ، $n(B) = 11$ و $n(A \cup B) = 16$ داده شوند، مقدار $n(A' \cap B)$ را حساب کنید.



الگو و دنباله

به رشته عددهای زیر نگاه کنید:

۲, ۴, ۶, ۸, ۱۰, ...

در این رشته، اولین عدد برابر ۲، دومین عدد برابر ۴، سومین عدد ۶ و ... است. سؤال:

بین اعداد این رشته و شماره‌ی مکان آن‌ها چه رابطه‌ای وجود دارد؟

جواب:

اولین عدد 2×1 ، دومین عدد 2×2 ، سومین عدد 2×3 و ... است؛ بنابراین می‌توان گفت: «عدد بیستم برابر $2 \times 20 = 40$ و عدد سی و هفتم در این رشته $2 \times 37 = 74$ است.»

در کل:

اگر یک شماره‌ی دلخواه از رشته را با n نشان دهیم، مقدار آن برابر $2 \times n$ است.

نتیجه:

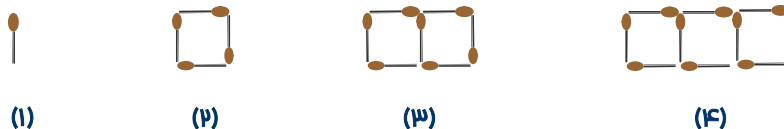
رشته اعداد بالا از الگوی $t_n = 2 \times n$ به دست می‌آیند.

توجه:

در بررسی الگوها، عدد n شماره‌ی رشته اعداد و نمادی چون t_n یا a_n و ... نمایش دهنده‌ی خود رشته اعداد است که به آن «**بملاهی عمومی**» الگو گفته می‌شود. (به عددهای t_1, t_2, t_3, \dots و ... جملات آن رشته گفته می‌شود).

نمونه‌ی دیگری ببینید:

مثال: تعداد چوب کبریت‌ها در شکل‌های دهم و n ام را مشخص کنید.



پاسخ

مثال: شمع روشنی به طول ۱۶۰ میلی‌متر، در هر دقیقه ۴ میلی‌متر از آن آب می‌شود. با نوشتن الگوی طول شمع در دقایق پس از روشن شدن، حساب کنید این شمع حداکثر چند دقیقه روشن می‌ماند؟

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



برخی الگوها با یک عبارت درجه اول قابل بیان هستند، مانند:

$$1, 4, 7, 10, \dots, 3n-2, \dots \Rightarrow t_n = 3n-2$$

در کل:

الگوی خطی:

هر الگوی خطی به صورت خطی $t_n = an + b$ قابل بیان است که در آن a و b دو عدد ثابت هستند.

سایر الگوها، نظیر:

$$2, 5, 10, 17, \dots, n^2 + 1, \dots \Rightarrow t_n = n^2 + 1$$

را «الگوی غیرخطی» گویند.

توجه کنید: (شرط فطی بودن)

چنان که در نمونه‌ی خطی قبل هم دیده می‌شود، در دنباله‌ی خطی $t_n = an + b$ ، مقدار تغییر جملات متوالی همیشه مقداری ثابت است، (برابر a ، یعنی: ضریب n). نمونه‌ی دیگر:

در دنباله‌ی خطی $a_n = 4n - 3$ چند جمله را نوشته‌ایم؛ می‌بینید اختلاف جملات متوالی برابر ۴ است:

$$1, 5, 9, 13, \dots$$

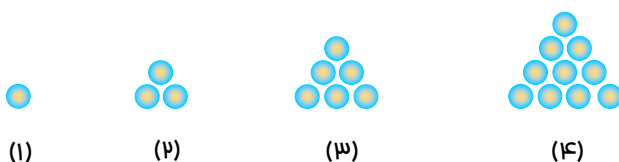
اگر تشخیص دهید یک الگو خطی است، تعیین فرمول آن الگو آسان می‌شود.

مثال: در یک الگوی خطی، جمله‌ی چهارم ۱۷ و جمله‌ی نهم ۳۷ است. الگو را مشخص کرده و سپس: الف) جمله‌ی بیستم الگو را حساب کنید.

ب) کدام شماره از الگو برابر ۶۱ خواهد بود؟

در الگوهای غیرخطی، معمولاً با نوشتن جملات و مقایسه با شماره‌ی هر کدام، فرمول جمله‌ی عمومی تعیین می‌شود.

مثال: (الگوی مثلثی) تعداد گوی‌ها در شکل‌های زیر را در نظر بگیرید:



الف) الگوی تعداد گوی‌ها را مشخص کنید.



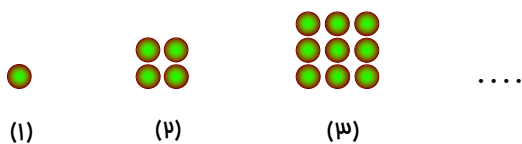
ب) در شکل بیست و سوم چند گوی وجود دارد؟

پ) در شکل چندم تعداد گوی‌ها برابر ۶۶ است؟

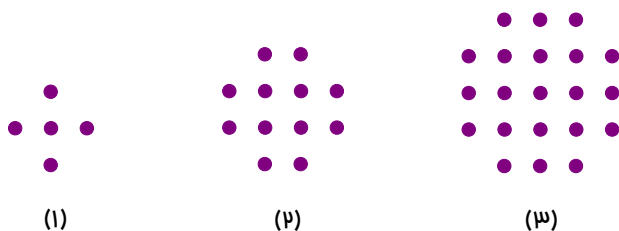
توجه: (الگوی مربعی)

بد نیست بدانیم به الگوی غیرخطی مقابل «الگوی مربعی» گفته می‌شود:

واضح است که جمله‌ی عمومی آن به صورت $t_n = n^2$ می‌باشد.



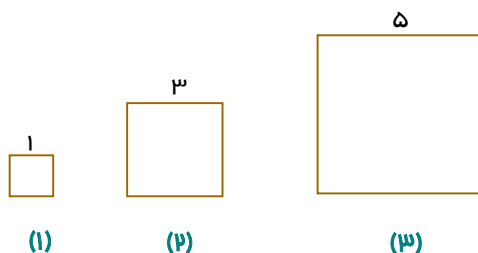
مثال: (از کتاب) در الگوی زیر، شکل بعدی را رسم کرده و الگوی شکل n ام را مشخص کنید.



پاسخ

مثال: در مربع‌های زیر، الگوی محیط‌ها و مساحت‌ها را مشخص

کنید. کدام الگو خطی و کدام غیر خطی است؟



پاسخ



اکنون به بیان مفهومی کلی‌تر از الگوها توجه کنید.

دنباله:

«دنباله» هر رشته‌ای از اعداد (معمولاً منظم) است که به دنبال هم نوشته شده باشند. به هر عدد در رشته، یک «جمله» از دنباله گفته؛ مانند الگوها، اولین جمله را با a_1 ، دومین جمله را با a_2 و ... نشان می‌دهیم. بنابراین نمایش یک دنباله چنین است:

$$a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots$$

بنابراین:

در یک دنباله، a_n نشان دهنده‌ی جمله‌ای دلخواه است که به آن «جمله‌ی عمومی» یا «جمله‌ی n ام» گفته می‌شود.

مثال:

① در دنباله‌ی $a_n = \frac{2^{n-1} - 24}{n + 9}$ ، جمله‌ی یازدهم را بیابید.

② در دنباله‌ی $a_n = \frac{8 - n}{1 - 2n}$:

الف) کدامین جمله برابر $\frac{1}{7}$ است؟

ب) چند جمله منفی هستند؟

③ جمله‌ی چندم رشته اعداد زیر برابر $\frac{7}{12}$ است؟

$$\frac{2}{12}, \frac{5}{17}, \frac{8}{22}, \dots$$

ویژه دانش آموز

۶. دنباله‌ی $a_n = \frac{22 - 3n}{3 + n}$ چند جمله‌ی مثبت دارد؟

جواب: ۷

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



در پایان این بخش، به دو نوع دنباله اشاره‌ای مختصر خواهیم داشت. اولی، نوع مهمی از دنباله‌های غیرخطی است.

دنباله‌ی درجه دوم:

در برخی از دنباله‌های غیرخطی، جمله‌ی عمومی با یک عبارت درجه دوم قابل بیان است:

$$t_n = an^2 + bn + c$$

توجه کنید:

اگر سه جمله از یک دنباله‌ی درجه دو را داشته باشید، با جایگذاری، ضرایب a ، b و c معلوم شده و دنباله مشخص خواهد شد.

مثال: با تعیین جمله‌ی عمومی دنباله‌ی درجه دوم زیر، جمله‌ی دهم آن را حساب کنید.

$$-1, 3, 9, \dots$$

پاسخ ✓

در نوع دیگری از دنباله، به نام «**دنباله‌ی بازگشتی**»، جملات دنباله چنان به هم وابسته‌اند که هر جمله با توجه به جملات قبلی به دست می‌آید. به نمونه‌ی بعد توجه کنید.

مثال: پنج جمله‌ی اول از دنباله‌ی زیر را بنویسید:

$$t_1 = -1, t_n = -2t_{n-1} + 1 \quad (n \geq 2)$$

پاسخ ✓

ویژه دانش آموز

۷. شش جمله‌ی اول از دنباله‌ی بازگشتی با اطلاعات زیر را بنویسید:

$$F_1 = 1, F_2 = 1, F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \quad (n > 2)$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مفاهیم زیر، خواص زیاد یا کم شدن جملات دنباله‌ها را بیان می‌کنند:

صعودی یا نزولی:

دنباله‌ی a_1, a_2, a_3, \dots را در نظر بگیرید. در این صورت:

○ دنباله را «صعودی» (افزایشی) گویند. هرگاه: $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq \dots$

یعنی جملات یا ثابت بوده و یا در حال زیاد شدن هستند.

○ دنباله را «نزولی» (کاهشی) گویند. هرگاه: $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \dots$

که در آن جملات یا ثابت بوده و یا در حال کاهش هستند.

دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد، «یکنوا» نامیده می‌شود.

برای نمونه:

دنباله‌ی $1, 4, 9, \dots$ صعودی و دنباله‌ی $5, 3, 1, \dots$ نزولی بوده و فقط دنباله‌ی ثابت مانند $1, 1, 1, \dots$ هم صعودی و هم نزولی است. البته، ممکن است دنباله یکنوا نباشد؛ مانند:

$3, 7, 5, 1, \dots$

مفاهیم بالا اهمیت زیادی داشته و از این پس مورد نیاز خواهند بود.

پاسخ دهید (۳)



۱- با توجه به تعداد نقاط در شکل‌ها، تعداد آن‌ها را در شکل هفدهم حساب کنید.



۲- چهار جمله‌ی اول دنباله‌های زیر را بنویسید:

الف) $a_n = \frac{2n^2}{3n-1}$ ب) $t_n = \frac{2^n - 1}{n+2}$ پ) $b_n = (-2)^n n$ ت) $c_n = \frac{(-1)^{n+1} n + 3}{n+2}$

۳- جمله‌ی دهم دنباله‌ی مثلثی چقدر از جمله‌ی ششم دنباله‌ی مربعی بیشتر است؟

۴- کدام جمله از دنباله‌ی $\frac{2n+40}{n}$ برابر ۱۰ است؟

۵- آیا عدد ۲۵ در بین جملات دنباله‌ی $t_n = n^2 - n + 13$ وجود دارد؟

۶- سومین جمله‌ی دنباله‌ی $t_n = (-3)^n + 2n$ با چندمین جمله‌ی دنباله‌ی $a_n = -5n + 14$ برابر خواهد بود؟

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

منتخب کتاب:

۱- جمله عمومی چند دنباله داده شده است. در هر مورد، چهار جمله اول دنباله را بنویسید و سپس به هر یک از آن‌ها یک الگوی هندسی نظیر کنید.

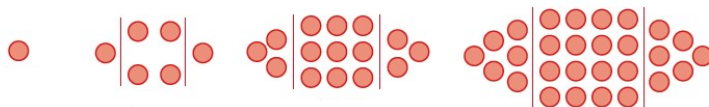
الف) $a_n = 4n$ ب) $b_n = 3n + 1$ پ) $c_n = n^2 + 2$ ت) $d_n = n^2 + n$

۲- به الگوی روبه‌رو توجه کنید:



الف) شکل بعدی را رسم کرده و تعداد کاشی‌های تیره‌ی آن را مشخص کنید.
ب) تعداد کاشی‌های تیره در هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی هفتم آن بنویسید.
پ) اگر n تعداد کاشی‌های سفید و t_n تعداد کاشی‌های تیره باشد، مقدار t_n را بر حسب n بنویسید.
ث) آیا در این الگو شکلی وجود دارد که شامل ۵۰ کاشی تیره باشد؟ اگر هست، تعداد کاشی‌های سفید آن چقدر است؟

۳- الگوی روبه‌رو را در نظر بگیرید:



الف) شکل بعدی را رسم کنید، سپس تعداد نقاط هر مرحله را به صورت یک دنباله تا جمله‌ی ششم آن بنویسید.
ب) جمله عمومی الگو را بیابید.
پ) شکل دهم در این الگو چند نقطه دارد؟

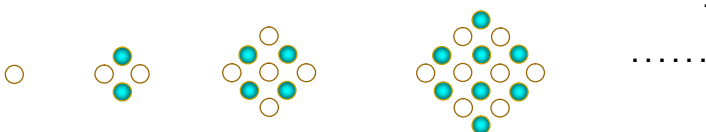
۴- برای هر یک از دنباله‌های درجه دو زیر، جمله‌ی عمومی را به دست آورید و سپس برای هر کدام، یک الگوی هندسی نظیر کنید.

الف) $5, 8, 13, 20, 29, \dots$ ب) $5, 12, 22, 35, 51, \dots$

سؤال ترکیبی:

۱- در الگوی زیر:

الف) تعداد گوی‌های سفید در شکل یازدهم را بیابید.
ب) تعداد گوی‌های رنگی در شکل دهم را حساب کنید.





۲- دنباله‌ی $t_n = (k+3)n^2 - kn + k - 2$ خطی است و $a_{3n-2} = t_{n+2} - 3$. جمله‌ی هفتم دنباله‌ی a_n را بیابید.



چالش (ویژه علاقمندان)

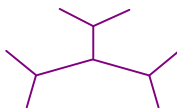
۱- در الگوی زیر b_n تعداد پاره خط‌های شکل شماره‌ی n را نشان می‌دهد. b_{14} را محاسبه کنید.

•

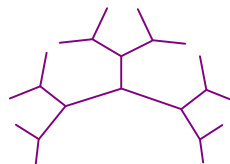
b_1



b_2



b_3



b_4



دنباله‌ی حسابی

دو نوع خاص از دنباله‌ها که گاهی «تصاعد» هم نامیده می‌شوند، به دلیل خواص و کاربردهای مهمی که دارند، در این بخش و بخش بعدی بررسی خواهند شد. برای معرفی اولین آن‌ها، به دنباله‌های زیر توجه کنید:

$$-5, 0, 5, 10, 15, \dots \quad \text{و} \quad 8, 5, 2, -1, \dots$$

در هر دو مورد، هر جمله با عدد ثابتی جمع شده و جمله‌های بعد به دست آمده‌اند؛ به عبارت دیگر:

تفاوت هر جمله نسبت به جمله‌ی قبل همواره عدد ثابتی است.

دنباله حسابی:

هر گاه در دنباله‌ای، اختلاف هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت باشد، به آن دنباله، «دنباله‌ی حسابی» یا دنباله‌ی عددی و به آن عدد ثابت «قدرنسبت» گفته و آن را با d نشان می‌دهیم.

(بنابراین، دنباله‌ی حسابی همان دنباله‌ی خطی است!)

نمونه‌ی دیگر؛

سال‌های برگزاری جام جهانی فوتبال در چندین سال اخیر نیز یک دنباله‌ی حسابی است:

$$2010, 2014, 2018, 2022, \dots$$

زیرا اختلاف جملات همواره ثابت است، ($d = 4$). چنان که می‌بینید:

«هر جمله با d جمع می‌شود تا جمله‌ی بعد حاصل گردد.»

برای نمایش ساده‌تر، معمولاً جمله‌ی اول دنباله‌ی حسابی را با a نشان می‌دهیم. همیشه d قدرنسبت است و الگوی

دنباله‌ی حسابی به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$a, \underbrace{a+d}_{a_2}, \underbrace{a+2d}_{a_3}, \underbrace{a+3d}_{a_4}, \dots$$

با ادامه‌ی این الگو، برای نمونه، جمله‌ی دهم به صورت $a_{10} = a + 9d$ خواهد بود و در کل:

جمله‌ی عمومی دنباله‌ی حسابی به صورت $a_n = a + (n-1)d$ است.

توجه داشته باشید:

به‌وضوح:

دنباله‌ی حسابی با شرط $d > 0$ ، یک دنباله‌ی صعودی و با شرط $d < 0$ ، دنباله‌ای نزولی است. ($d = 0$ ، دنباله‌ی ثابت)

در دنباله‌ی حسابی، قدرنسبت برابر است با «تفاضل» هر دو جمله‌ی متوالی، یعنی پشت سر هم:

$$d = a_2 - a_1 = a_3 - a_2 = \dots = a_n - a_{n-1} = \dots$$

مثال: در دنباله‌ی حسابی زیر، قدرنسبت و جمله‌ی هفدهم را مشخص کنید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$1, -\frac{1}{2}, -2, \dots$$

پاسخ

مثال: ✨

① جمله‌ی چهارم یک دنباله‌ی حسابی ۱۹ و جمله‌ی نهم آن ۶۴ است. الف) جمله‌ی عمومی دنباله را بیابید.

ب) جمله‌ی بیستم دنباله چه عددی است؟

② در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی ۳۹ است. جمله‌ی اول و قدر نسبت را معلوم کنید.

نوبت شماست.

ویژه دانش‌آموز

۸. در یک دنباله حسابی جملات یازدهم و شانزدهم به ترتیب ۳۱ و ۴۶ هستند. جمله‌ی هشتم را مشخص کنید.

جواب: ۲۲

توجه کنید:

اگر دو جمله‌ی دلخواه a_m و a_n از یک دنباله‌ی حسابی معلوم باشند، آنگاه:

$$d = \frac{a_n - a_m}{n - m}$$

دلیل:

کافی است فرمول جمله‌ی عمومی به کار رود:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$a_n - a_m = a + (n-1)d - [a + (m-1)d] = a + nd - d - a - md + d = nd - md$$

$$\rightarrow a_n - a_m = (n-m)d \Rightarrow d = \frac{a_n - a_m}{n-m}$$

برای نمونه:

در فعالیت قبل می‌توانستیم قدر نسبت را یک‌باره (بدون حل دستگاه) تعیین کنیم:

$$d = \frac{a_{16} - a_{11}}{16 - 11} = \frac{46 - 31}{5} = \frac{15}{5} = 3$$

مفهوم مهمی در دنباله‌های حسابی:

واسطه حسابی

هرگاه سه عدد a, b, c سه جمله‌ی متوالی (پشت سر هم) از یک دنباله‌ی حسابی باشند، آنگاه:

$$b = \frac{a+c}{2} \quad \text{یا} \quad 2b = a+c$$

بعلاوه: در چنین حالتی، b را «**واسطه‌ی حسابی**» یا «**میانگین حسابی**» بین عددهای a و c گوئیم.

دلیل:

قدر نسبتِ دنباله‌ی a, b, c را به دو صورت نوشته و برابر می‌گیریم:

$$d = b - a = c - b \rightarrow b + b = a + c \Rightarrow 2b = a + c$$

مثال: اعداد $2p+3, 3p+4, 5p-1$ سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی حسابی هستند. قدر نسبت این دنباله چیست؟

پاسخ

مثال: بین دو عدد -17 و 308 چهار عدد (واسطه‌ی حسابی) درج کرده‌ایم به طوری که اعداد حاصل تشکیل دنباله حسابی می‌دهند. آن اعداد را تعیین کنید.

پاسخ

توجه کنید:

وقتی بخواهید بین عددهای a و b ، تعداد n واسطه‌ی حسابی درج کنید، می‌توانید قدرنسبت را یک‌باره حساب کنید:

$$d = \frac{b-a}{n+1}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: (از کتاب) بین ۱۸ و ۶۲ سه واسطه‌ی حسابی درج کنید.

پاسخ

مورد بعدی، خاصیت جالبی از دنباله‌ی درجه دوم را بیان می‌کند.

ویژه دانش‌آموز

۹. در دنباله‌ی درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ ، نشان دهید دنباله‌ی $a_n = t_{n+1} - t_n$ ، یعنی دنباله‌ی:

$$t_2 - t_1, t_3 - t_2, t_4 - t_3, \dots$$

یک دنباله‌ی حسابی (خطی) است و سپس با کاربرد این خاصیت، جمله‌ی ششم دنباله‌ی درجه دوم $1, 3, 9, \dots$ را بدون تعیین جمله‌ی عمومی، مشخص کنید.

پاسخ دهید (۱۴) ?

۱- الف) واسطه‌ی حسابی دو عدد ۳ و ۱۳ برابر ۸ است. (درست - نادرست)
 ب) جمله‌ی عمومی دنباله‌ی $2, 7, 12, 17, \dots$ به صورت است.

۲- جمله‌ی دهم یک دنباله‌ی حسابی از جمله‌ی سوم آن ۴۲ واحد کوچک‌تر است. قدر نسبت دنباله را تعیین نمایید.

۳- در یک دنباله حسابی جملات دوم و هشتم قرینه‌اند و جمله‌ی هفتم برابر ۴ است. جمله‌ی اول، قدرنسبت و جمله‌ی هجدهم را تعیین کنید.

۴- در دنباله‌ی حسابی زیر مقدار a ، قدرنسبت و جمله‌ی صدم را بیابید.

$$a, 3a + 5, 4a + 9, \dots$$

۵- عددهای $5x + 6$ ، $5x$ و $3x - 2$ به ترتیب جملات اول تا سوم یک دنباله‌ی حسابی هستند. چندمین جمله‌ی دنباله برابر $249 -$ است؟

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



- ۶- الف) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت مثبت مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۲ باشد.
 ب) یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت منفی مثال بزنید که جمله‌ی چهارم آن ۱۲ باشد.
 پ) یک دنباله‌ی حسابی مثال بزنید که فقط سه جمله‌ی مثبت داشته، بقیه‌ی جملات دنباله منفی باشند.

۷- زوایای یک مثلث تشکیل دنباله‌ی حسابی داده‌اند. اگر بزرگ‌ترین آن‌ها 100° باشد، دو زاویه‌ی دیگر را تعیین کنید.

۸- مساحت یک مثلث قائم‌الزاویه ۲۴ سانتی‌متر مربع است و اضلاع آن تشکیل دنباله‌ی حسابی می‌دهند. محیط این مثلث را تعیین کنید.

۹- بین دو عدد ۸ و 63 تعدادی عدد طوری قرار می‌دهیم که کل اعداد تشکیل دنباله‌ی حسابی دهند. اگر تفاضل کوچک‌ترین و بزرگ‌ترین آن‌ها 33 باشد، آن اعداد را مشخص کنید.

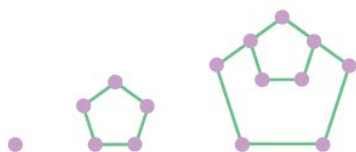
منتخب کتاب:

۱- در یک دنباله‌ی حسابی، مجموع سه جمله‌ی اول ۳ و مجموع سه جمله‌ی بعدی آن ۳۹ است. دنباله را مشخص کنید.

۲- الف) دو جمله‌ی بعدی الگوی زیر را با رسم شکل بیابید و دنباله را مشخص کنید.

ب) جمله‌ی عمومی آن را مشخص کنید.

پ) جمله چندم این دنباله 397 است؟



سؤال ترکیبی:

۱- واسطه‌ی حسابی بین دو عدد $\frac{1}{1-\sqrt{2}}$ و $\frac{1+2\sqrt{2}}{2}$ را حساب کنید.

۲- جمله‌ی عمومی دنباله‌ی غیرخطی زیر را بنویسید. (راهنمایی: دنباله درجه دوم است.)

$3, 5, 9, 15, \dots$



چالش (ویژه علاقمندان)

۱- در صد جمله‌ی اول دو دنباله‌ی حسابی $t_n = (a-2)n^3 + bn^2 + (a+b)n + 3 - a$ و $r_n = (c-4)(n-1)^3 + cn - 3$ تعداد جملات مشترک را مشخص کنید.



دنباله هندسی

به دنباله‌های زیر توجه کنید:

$$25, 5, 1, \frac{1}{5}, \dots \quad \text{و} \quad -1, 3, -9, 27, \dots$$

در هر دوی این دنباله‌ها، هر جمله در عدد ثابتی ضرب شده و جمله‌ی بعد به دست آمده است:

«سمت چپ، جملات در $\frac{1}{5}$ و سمت راست، جملات در -3 ضرب شده‌اند.»

به بیان دیگر:

- در سمت چپ، نسبت جملات متوالی همواره مقدار ثابت $\frac{1}{5}$ است: $\frac{5}{25} = \frac{1}{5} = \dots$
- در سمت راست نیز نسبت جملات متوالی همواره عدد -3 است: $\frac{3}{-1} = \frac{-9}{3} = \dots$

این‌گونه دنباله‌ها در کل به صورت زیر معرفی می‌شوند:

دنباله هندسی:

هر گاه در دنباله‌ای، نسبت هر دو جمله‌ی متوالی یک مقدار ثابت باشد، به آن «دنباله هندسی» و به آن عدد ثابت

«قدرنسبت» گفته و آن را با r نشان می‌دهیم:

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots = r$$

(جملات دنباله‌ی هندسی باید غیرصفر باشند.)

نمونه‌ای دیگر؛ دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی است:

$$-2, 6, -18, 54, \dots$$

زیرا نسبت جملات متوالی همواره ثابت است:

$$\frac{6}{-2} = \frac{-18}{6} = \frac{54}{-18} = -3 \Rightarrow r = -3$$

توجه کنید:

قدرنسبت همواره از «تقسیم» هر دو جمله‌ی متوالی به دست می‌آید:

$$r = \frac{a_2}{a_1} = \frac{a_3}{a_2} = \dots = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \dots$$

9:

هر جمله را در r ضرب کنید، جمله‌ی بعدی حاصل می‌شود: $a_1 \times r = a_2, a_2 \times r = a_3, \dots$

مثال: کدام دنباله هندسی است؟ قدرنسبت آن را معلوم کرده و دو جمله‌ی بعدی آن را بنویسید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, 2, \dots \quad \textcircled{1}$$

$$-2, \sqrt{2}, -1, \dots \quad \textcircled{2}$$

الگوی هندسی:

اگر a جمله اول و r قدرنسبت دنباله هندسی را نشان دهد، الگوی چنین دنباله‌ای به صورت زیر نوشته خواهد شد:

$$a, \underbrace{a \times r}_{a_2}, \underbrace{a \times r^2}_{a_3}, \underbrace{a \times r^3}_{a_4}, \dots$$

پس برای مثال، جمله دهم به صورت $a_{10} = ar^9$ خواهد بود و در نتیجه:

جمله عمومی دنباله هندسی به صورت $a_n = a \times r^{n-1}$ است.

مثال: در یک دنباله هندسی، جمله دوم -1 و جمله پنجم 8 است. جمله اول و قدرنسبت را معلوم کنید.

پاسخ

مثال: جمله‌های سوم و ششم یک دنباله هندسی به ترتیب 9 و 243 هستند. جمله عمومی و پنجم آن را محاسبه کنید.

پاسخ

توجه کنید:

اگر دو جمله دلخواه a_m و a_n از یک دنباله هندسی معلوم باشند، آنگاه:

$$r^{m-n} = \frac{a_m}{a_n}$$

دلیل:

کافی است فرمول جمله عمومی به کار رود:

$$\frac{a_m}{a_n} = \frac{ar^m}{ar^n} = r^{m-n}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



برای نمونه؛

اگر جملات سوم و هفتم دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۱۲ و ۱۹۲ باشند؛ وضعیت دنباله به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\frac{a_7}{a_3} = r^{7-3} = \frac{192}{12} = 16 \rightarrow r^4 = 16 \Rightarrow r = \pm 2$$

یکی از جملات را به کار می‌بریم:

$$a_3 = 12 \xrightarrow{ar^2=12} a(\pm 2)^2 = 12 \Rightarrow a = \frac{12}{4} = 3$$

توجه:

با اطلاعات بالا دو دنباله ساخته می‌شود:

$$r = 2: 3, 6, 12, 24, \dots \quad \text{و} \quad r = -2: 3, -6, 12, -24, \dots$$

مانند نمونه‌ی قبل، پاسخ دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱۰. در یک دنباله‌ی هندسی جملات دوم و هشتم به ترتیب ۸ و ۲ هستند. قدر نسبت را بیابید.

جواب: $r = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

اکنون فرض کنید سه عدد a, b, c جملات متوالی یک دنباله‌ی هندسی باشند. در این صورت:

$$r = \frac{b}{a} = \frac{c}{b} \rightarrow b^2 = ac \Rightarrow b = \pm\sqrt{ac}$$

پس مطلب زیر همواره درست است:

❁ میانگین هندسی:

اگر عددهای a, b, c سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله‌ی هندسی باشند، آنگاه:

$$b = \pm\sqrt{ac} \quad \text{یا} \quad b^2 = ac$$

بعلاوه؛ در چنین حالتی، b را «میانگین هندسی» بین a و c گوئیم.

توجه کنید:

در مطلب بالا، باید عددهای a و c هم‌علامت باشند و همیشه دو جواب قرینه‌ی $\pm\sqrt{ac}$ وجود دارد.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: مقدار x را طوری بیابید که دنباله‌ی زیر یک دنباله‌ی هندسی باشد:

$$1+x, x, -x+1$$

پاسخ

توجه کنید:

وقتی بخواهید بین عددهای a و b تعداد n واسطه‌ی هندسی درج کنید، می‌توانید قدر نسبت را یک‌باره حساب کنید:

$$r^{n+1} = \frac{b}{a}$$

نمونه‌ی بعد را انجام دهید:

ویژه دانش‌آموز

۱۱. بین دو عدد ۵ و ۴۰۵ سه عدد درج کرده‌ایم تا اعداد حاصل تشکیل دنباله هندسی دهند. قدر نسبت و اعداد مربوطه را تعیین کنید.

جواب: $r = 3, -3$

گاهی سؤالات دنباله‌ی هندسی به صورت ترکیب با دنباله‌ی حسابی داده می‌شوند. نمونه‌هایی ببینید:

مثال: اگر $3^a, 9\sqrt{3}, 3^b$ به ترتیب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی بوده و a, c و b جملات متوالی یک دنباله‌ی حسابی باشند، c را معلوم کنید.

پاسخ

مثال: فرض کنید جمله‌های سوم، پنجم و دهم یک دنباله حسابی به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از یک دنباله هندسی باشند. در این صورت، قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را مشخص کنید.

پاسخ

نمونه فرماید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: دنباله‌ای مثال بنویسید که هم حسابی باشد و هم هندسی و قدر نسبت‌ها را در هر دو حالت تعیین کنید.

پاسخ

بد نیست بدانیم:

وقتی جملات دنباله‌ی هندسی مثبت هستند؛

- اگر $r > 1$ باشد، دنباله صعودی (افزایشی) است؛ مانند: $1, 3, 9, \dots$
- اگر $0 < r < 1$ باشد، دنباله نزولی (کاهشی) است؛ مانند: $9, 3, 1, \dots$

پاسخ دهید (۵)

۱- درستی یا نادرستی هر مورد را مشخص کنید:

- الف) جمله‌ی n ام یک دنباله‌ی هندسی به صورت $t_n = t_1 + r^{n-1}$ است.
- ب) دنباله‌ی ثابت هم حسابی و هم هندسی است.

۲- در یک دنباله‌ی هندسی روابط $a_4 a_3 = 4$ و $(a_4)^2 = 32$ برقرار است. جمله‌ی سیزدهم این دنباله را بیابید.

۳- اعداد زیر تشکیل دنباله‌ی هندسی می‌دهند. قدر نسبت را حساب کنید.

$$4x - 1, 2x + 1, x + 3$$

۴- بین دو عدد ۳ و ۹۶ تعداد چهار واسطه‌ی هندسی درج کنید.

۵- جمله‌های چهارم و هفتم یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب ۲۴ و ۱۹۲ هستند. قدر نسبت را حساب کنید. (نه‌این - فرورد ۱۴۰۳)

۶- در یک دنباله‌ی هندسی صعودی، جمله‌ی سوم ۱۰ و جمله‌ی هفتم ۴۰ است. جمله‌ی پنجم را به دست آورید.

۷- در یک دنباله هندسی مجموع جملات اول و سوم $1/5$ برابر مجموع جملات دوم و چهارم است. قدر نسبت جملات را به دست آورید.

۸- در یک دنباله‌ی حسابی جملات اول، پنجم و یازدهم به ترتیب سه جمله‌ی متوالی از دنباله‌ی هندسی صعودی‌اند. قدر نسبت دنباله‌ی هندسی را بیابید.

منتخب کتاب:

۱- درستی یا نادرستی جملات زیر را بررسی کنید. در صورت درست بودن، توضیح دهید و در صورت نادرست بودن، مثال نقض ارائه کنید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



الف) هر دنباله، یا حسابی است یا هندسی.

ب) دنباله ای وجود ندارد که هم حسابی باشد و هم هندسی.

۲- علی دوچرخه‌ای را به قیمت ۵۰۰ هزار تومان خرید. فرض کنید قیمت دوچرخه‌ی دست دوم، در هر سال ۲۰ درصد نسبت به سال قبل از خودش کاهش یابد.

الف) اگر بعد از سه سال قصد فروش دوچرخه‌اش را داشته باشد، به چه قیمتی می‌تواند آن را بفروشد.

ب) قیمت دوچرخه بعد از گذشت n سال از چه رابطه‌ای به دست می‌آید؟

۳- حاصل ضرب بیست جمله‌ی اول دنباله‌ی هندسی زیر را محاسبه کنید:

$$2, 4, 8, \dots$$

سؤال ترکیبی:

۱- با ضرب سه جمله‌ی متوالی یک دنباله‌ی هندسی به ترتیب در ۴، ۸ و ۱۶، یک دنباله‌ی حسابی حاصل می‌شود. اگر جمله‌ی سوم دنباله‌ی هندسی باشد، جمله‌ی اول آن را بیابید.



چالش (ویژه علاقمندان)

۱- در یک دنباله‌ی هندسی با سه جمله، بعد از درج دو عدد بین جملات دوم و سوم آن، پنج جمله از یک دنباله‌ی حسابی با قدرنسبت ۴ خواهیم داشت. قدرنسبت دنباله‌ی هندسی را مشخص کنید.

پاسخنامه

فعالیت‌های ویژه دانش آموز

۱- چون اشتراک دو بازه از -۲ شروع شده است، پس a در سمت راست -۳ قرار داشته و مقدار آن -۲ بوده است:

$$a = -2 \rightarrow [-2, b] \cap [-3, 0] = [-2, -1]$$

به طور مشابه، b در سمت چپ 0 قرار داشته و مقدار آن -1 بوده است. پس:

$$ab = (-2)(-1) = 2$$

۲- بدیهی است که $A = (-\infty, 2)$ و $B = (-3, +\infty)$ در نتیجه:

$$A \cap B = (-3, 2)$$

نقطه‌ی میانی یک بازه میانگین ابتدا و انتهای آن بازه است؛ پس:

$$\frac{-3+2}{2} = -\frac{1}{2}$$

۳- توجه کنید که $\frac{1}{0}$ تعریف نشده است و لذا $0 \notin A$ چون:

توجه فرمایید:

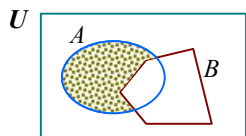
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$\frac{1}{1} = 1 \in \mathbb{Z} \quad \text{و} \quad \frac{1}{-1} = -1 \in \mathbb{Z}$$

پس عددهای 1 و -1 در A قرار دارند. سایر عددهای $\frac{1}{x}$ به صورت $\frac{1}{2}, \frac{1}{-2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{-3}, \dots$ هستند که هیچ کدام عضو \mathbb{Z} نیستند. بنابراین $A = \{1, -1\}$ و این مجموعه متناهی است.

۴- با قدری دقت به مفاهیم مربوطه و بخصوص متمم، می بینیم که هر دو مجموعه به صورت زیر هستند:



$$A - B = A \cap B'$$

پس همواره داریم:

۵- مشابه نمونه‌های حل شده، مجموعه‌های R و H را به ترتیب مجموعه‌ی افراد علاقمند به ریاضی و هندسه در نظر بگیرید. طبق فرض:

$$n(R) = 51 \quad \text{و} \quad n(H) = 42 \quad \text{و} \quad n(R \cap H) = 33$$

الف) تعداد افرادی که لاقل به یک درس علاقه دارند، $n(R \cup H)$ است:

$$n(R \cup H) = n(R) + n(H) - n(R \cap H) \rightarrow n(R \cup H) = 51 + 42 - 33 \\ \Rightarrow n(R \cup H) = 60$$

ب) تعداد افرادی که فقط به هندسه علاقه دارند، $n(H - R)$ است:

$$n(H - R) = n(H) - n(R \cap H) = 42 - 33 = 9$$

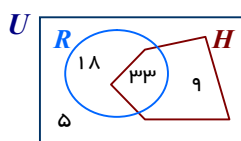
پ) افرادی که فقط به یکی از دو درس علاقه دارند، از کم کردن تعداد افراد مشترک از افرادی که لاقل به یک درس علاقمند هستند، به دست خواهد آمد:

$$n(R \cup H) - n(R \cap H) = 60 - 33 = 27$$

ت) توجه کنید: افرادی که به هیچ درسی علاقه ندارند، طبق قانون شمارش تعداد عضوهای متمم به دست می‌آید:

$$n((R \cup H)') = n(U) - n(R \cup H) = 65 - 60 = 5$$

توجه:



این مقادیر را در شکل مقابل هم می بینید:

۶- باید نامساوی زیر برقرار شود:

$$\frac{22 - 3n}{3 + n} > 0$$

توجه کنید که n عدد طبیعی و مثبت بوده و در نتیجه عدد 3 + n مثبت است. بنابراین برای مثبت بودن کسر، کافی است صورت کسر هم مثبت باشد:

$$22 - 3n > 0 \rightarrow -3n > -22 \rightarrow n < \frac{22}{3} \cong 7/3$$

پس: جواب فقط عددهای 1، 2، ... و 7 است.

نمونه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

۷- دو جمله‌ای اول دنباله داده شده است. برای تعیین جملات سوم به بعد، کافی است در رابطه‌ی $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ به جای عددهای ۳، ۴ و ... قرار گیرد:

$$\begin{aligned} n=3: F_3 &= F_{3-1} + F_{3-2} \rightarrow F_3 = F_2 + F_1 = 1+1 \Rightarrow F_3 = 2 \\ n=4: F_4 &= F_{4-1} + F_{4-2} \rightarrow F_4 = F_3 + F_2 = 2+1 \Rightarrow F_4 = 3 \\ n=5: F_5 &= F_{5-1} + F_{5-2} \rightarrow F_5 = F_4 + F_3 = 3+2 \Rightarrow F_5 = 5 \\ n=6: F_6 &= F_{6-1} + F_{6-2} \rightarrow F_6 = F_5 + F_4 = 5+3 \Rightarrow F_6 = 8 \end{aligned}$$

۸- طبق داده‌های مسأله می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} a_{11} = 31 \\ a_{16} = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a + 10d = 31 \\ a + 15d = 46 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -a - 10d = -31 \\ a + 15d = 46 \end{cases} \rightarrow 5d = 15 \Rightarrow d = 3$$

با جایگذاری عدد به دست آمده در معادله‌ی اول به جای d داریم:

$$a + 10(3) = 31 \rightarrow a = 1$$

پس جمله‌ی هشتم عبارت است از:

$$a_8 = a + 7d = 1 + 7(3) = 22$$

۹- کافی است $t_{n+1} - t_n$ را تشکیل داده و ساده کنیم:

$$\begin{aligned} \underbrace{a(n+1)^2 + b(n+1) + c}_{n^2 + 2n + 1} - (an^2 + bn + c) &= an^2 + 2an + a + bn + b + c - an^2 - bn - c \\ &= 2an + a + b \end{aligned}$$

می‌بینید که دنباله خطی است. در دنباله‌ی درجه دوم $1, 3, 9, \dots$ ، اختلاف جملات متوالی $3 - (-1), 9 - 3, \dots$ و یا $4, 6, \dots$ است. چون این دنباله حسابی است، جملات بعدی آن $8, 10, 12, 14, \dots$ خواهند بود. این جملات به آسانی جملات دنباله‌ی درجه دوم را مشخص می‌کنند:

$$\begin{array}{cccccc} -1, & 3, & 9, & 17, & 27, & 39, \dots \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ +4 & +6 & +8 & +10 & +12 & +14 \end{array}$$

چنان که می‌بینید $t_6 = 39$ است.

۱۰- با توجه به داده‌های $a_8 = 2$ و $a_6 = 8$ و استفاده از نکته‌ی گفته شده:

$$r^{8-2} = \frac{a_8}{a_6} \rightarrow r^6 = \frac{2}{8} \rightarrow r^6 = \frac{1}{4} \rightarrow r = \pm \sqrt[6]{\frac{1}{4}} = \pm \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$$

۱۱- عدد ۲ را به عنوان جمله‌ی اول و عدد 405 را به عنوان جمله‌ی آخر دنباله در نظر می‌گیریم:

$$5, \quad , \quad , \quad 405$$

بنابراین 405 جمله‌ی پنجم دنباله‌ی هندسی است که با استفاده از آن، قدرنسبت معلوم می‌شود:

$$a_5 = ar^4 \rightarrow 5 \times r^4 = 405 \rightarrow r^4 = \frac{405}{5} = 81 \rightarrow r^4 = 3^4 \Rightarrow r = \pm 3$$

پس دو جواب برای عددهای این دنباله وجود دارد:

$$r = 3 \rightarrow 5, 15, 45, 135, 405$$

$$r = -3 \rightarrow 5, -15, 45, -135, 405$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴