

ترکیب: دانش شما + ممتوای بی نظیر تدریس ما



«آسان و روان، حرفه‌ای و متمایز تدریس کنید.»



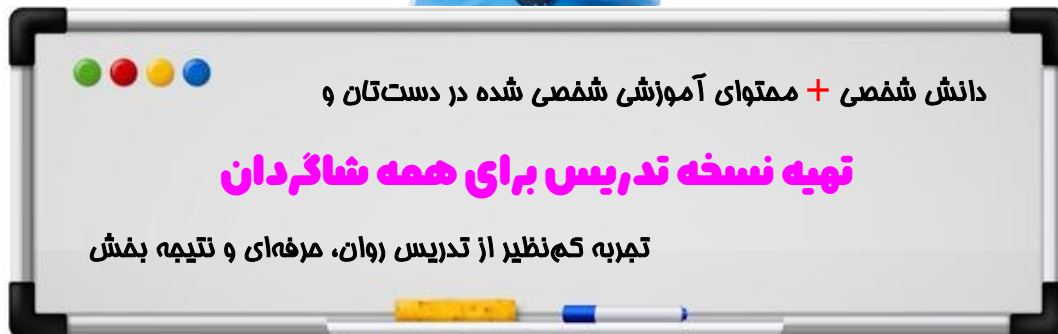


«چاپ تمام رنگی جزوه اختصاصی شما برابر هزینه فایل»

(مذف هزینه چاپ)



کلاس ایده‌ال:



سرعت آموزش خود را دو برابر کنید!

(رفع مشکل کمبود وقت برای تدریس کامل کتاب)



پیشنهادات ویژه چاپ:

چاپ کلاسی: بین ۷۰ تا ۸۰ درصد تخفیف برای سفارش ۱۰ جلد یا بیشتر.

چاپ تک جلد: بدون هزینه اضافه، معادل هزینه فایل در آدرستان تحویل می‌شود.

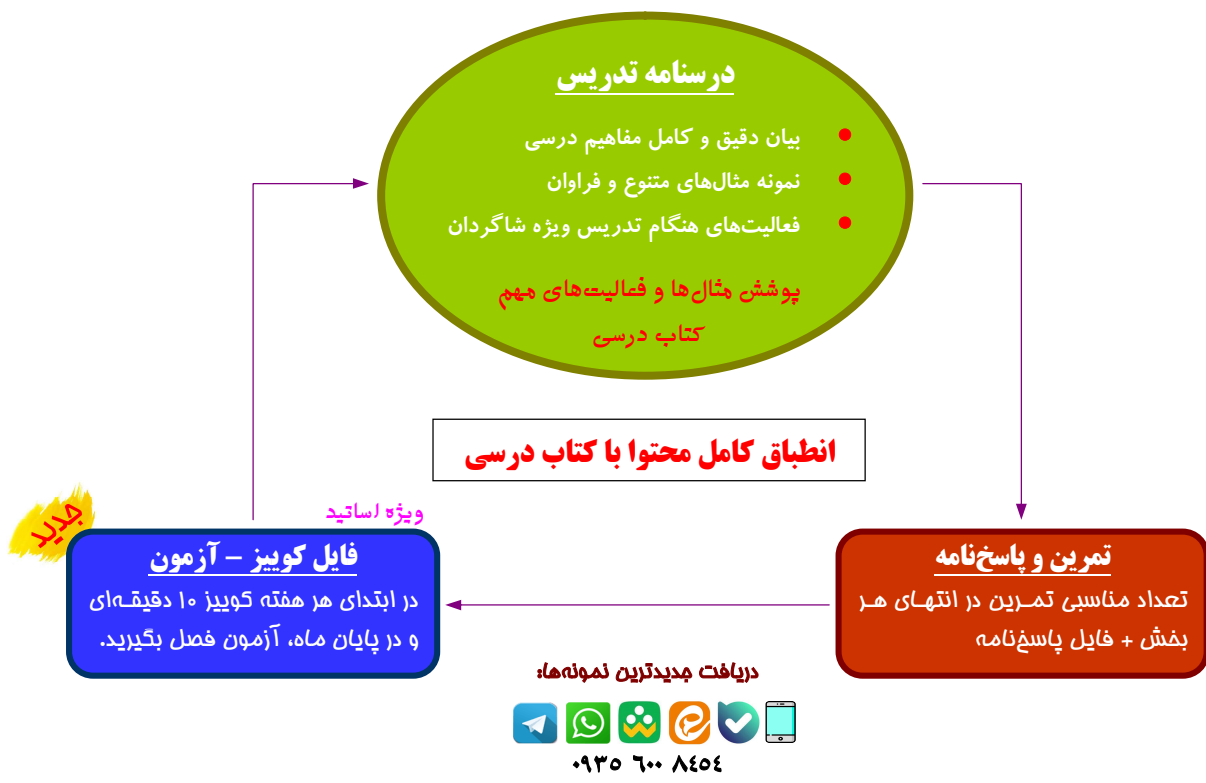
(یک جلد هدیه نسخه خودآموز به مدرس در سفارشات ۲۰ جلد یا بیشتر)

(نسخه تدریس در دست شاگردان)

پلد نمونه از نتایج درفشان برخی از همکاران مجموعه درس آموزه: **(خرداد و تابستان ۱۴۰۴)**

- از یک جمع چند نفره خصوصی، تمام افراد نمره ۱۹/۵ یا ۱۹/۷۵ کسب کردند؛ (حسابان دوازدهم نهایی)
- از یک گروه ۲۷ نفره در آموزشگاه، چند نفر ۲۰ و اکثراً نمره بالاتر از ۱۵ نهایی و از یک گروه ۱۱ نفره، پنج نفر نمره ۱۹/۵ یا بالاتر و هیچ کدام کمتر از ۱۸ نبودند؛ (دوازدهم انسانی نهایی)
- از جمع شاگردان فقط یکی از اساتید، کسب ۱۰ رتبه دو رقمی منطقه ۲ در رشته‌های ریاضی، تجربی و انسانی. (کنکور ۱۴۰۴)
- کسب درصد ریاضی فقط ۳ درصد کمتر از رتبه یک کنکور تجربی. (کنکور ۱۴۰۲)

محتوای تشریحی و نهایی



(خدمات منحصر به فرد گروه درس آموز)

اطلاعات شخصی مدرس، لوگو و تبلیغات شخصی یا مدرسه یا آموزشگاه، روش‌های ارتباطی با شما و ... روی جلد و در تمام صفحات درسنامه، به زیباترین شکل ممکن درج می‌شود.

و

در کل مجموعه، هیچ نام یا نشانی از گروه ما درج نمی‌شود.



۲

هندسه

۳۹

ترسیم هندسی، تناسب و خواص آن، استدلال ریاضی و قضیه تالس، تشابه مثلث‌ها و کاربرد در قائم‌الزاویه

۱

هندسه تحلیلی و جبر

۲

هندسه تحلیلی، معادله درجه دوم، نمودار تابع درجه دو، معرفی و حل معادلات گویا و اصم

۵

تابع نمایی و لگاریتم

۱۱۸

تابع نمایی، نمودار و معادله، مفهوم لگاریتم و تابع لگاریتمی، خواص لگاریتم و کاربرد لگاریتم

۴

مثلثات

۹۶

واحدهای زاویه، روابط مثلثاتی و محاسبات، توابع مثلثاتی و رسم نمودار

۳

تابع

۶۸

مقدمات توابع، انواعی از تابع، توابع یک به یک، وارون‌پذیری و تعیین وارون تابع، جبر توابع

۷

امتمال و آمار

۱۶۷

مقدمات احتمال، مدل احتمال شرطی و قوانین ضرب احتمال، آمار توصیفی (شاخص‌های مرکزی و پراکندگی)

۶

مد و بیوستگی

۱۴۶

فرآیند میل کردن، مفهوم و قوانین محاسبه حد تابع، حدهای مبهم، بیوستگی و ناپیوستگی



آموزش:

ریاضی یازدهم تجربی



هندسه تحلیلی و جبری

صفحه	فهرست
۳	هندسه تحلیلی
۱۷	معادله درجه دوم
۲۵	نمودار تابع درجه دو
۳۳	معادلات گویا و اصم



1 هندسه تحلیلی

یادآوری:

معادله‌ی هر خط بر حسب x و y از درجه‌ی یک است، مانند:

$$2x + y = -3 \quad \text{یا} \quad x + 2 = 1 \quad \text{یا} \quad 2y = -3$$

یک کار معمول برای خط‌ها، نمایش هندسی آن‌ها است:

روش رسم:

چون از هر دو نقطه فقط یک خط می‌گذرد:

رسم خط، با تعیین مختصات دو نقطه روی آن انجام می‌شود.

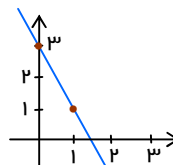
برای نمونه:

خط به معادله‌ی $y = -2x + 3$ را رسم می‌کنیم. برای این کار، جای x دو عدد دلخواه قرار داده و y را مشخص می‌کنیم؛ با نمایش نقاط حاصل در دستگاه، خط رسم می‌شود:

$$\begin{aligned} x=0: & y = -2(0) + 3 = 3 \\ x=1: & y = -2(1) + 3 = 1 \end{aligned}$$



x	0	1
y	3	1



مثال: خط‌های $x = -3$ و $2y - 4 = 0$ را رسم کنید.

پاسخ

برخورد خط با محورها:

دو عدد مهم در مورد خط‌ها:

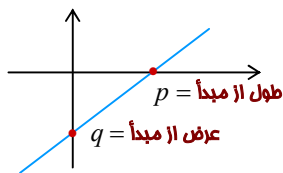
- **عرض از مبدأ:**
این عدد (q) عرض نقطه‌ای است که خط در آن محور y را قطع کرده. نقطه‌ی مربوطه: $(0, q)$
- **طول از مبدأ:**
این عدد (p) طول نقطه‌ای است که خط در آن محور x را قطع کرده. نقطه‌ی مربوطه: $(p, 0)$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



هر دو مقدار در شکل دیده می‌شوند:



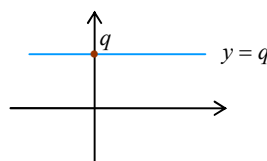
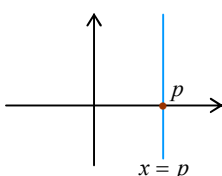
روش مناسبه:

در معادله قرار می‌دهیم: $y = 0$ \Leftarrow جواب x ، طول از مبدأ فضا است.

در معادله قرار می‌دهیم: $x = 0$ \Leftarrow جواب y ، عرض از مبدأ فضا است.

حالت‌های خاص:

خط افقی، طول از مبدأ نداشته و خط عمودی، عرض از مبدأ ندارد.



مثال: عرض از مبدأ و طول از مبدأ خط $l: -5x + 2y = 4$ را مشخص کنید.



شیب خط:

وقتی دو نقطه از یک خط را داشته باشیم:

نسبت تغییر عرض نقاط به تغییر طول نقاط را شیب آن خط می‌گویند.

یعنی:

اگر دو نقطه‌ی دلخواه (x_1, y_1) و (x_2, y_2) از خط داده شوند، شیب خط برابر عدد ثابت زیر است:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad (x_2 \neq x_1)$$

برای نمونه:

شیب خط گذرا از دو نقطه‌ی $(2, -1)$ و $(0, 2)$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\underbrace{(2, -1)}_{x_1, y_1}, \underbrace{(0, 2)}_{x_2, y_2} \Rightarrow m = \frac{2 - (-1)}{0 - 2} = \frac{3}{-2} \Rightarrow m = -\frac{3}{2}$$

مثال: خطی محورهای مختصات را در طول ۲ و عرض ۳- قطع کرده است. شیب آن را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.

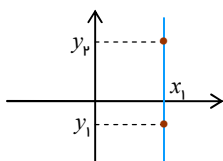


پاسخ ✓

توجه کنید:

چند مطلب مرتبط با شیب خطها:

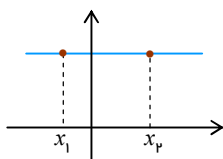
- اگر طولهای دو نقطه روی خط برابر باشند، یعنی: $x_1 = x_2$ ، مقدار شیب $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ تعریف نمی‌شود. این حالت فقط در مورد خطهای عمودی اتفاق می‌افتد:



پس:

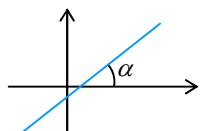
در مورد خطهای عمودی، شیب تعریف نشده است.

- اگر عرضها برابر باشند: $y_1 = y_2$ ، آنگاه شیب برابر $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خطهای افقی رخ می‌دهد. پس:

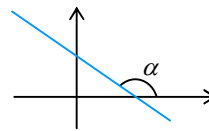


شیب هر خط افقی برابر صفر است.

- شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:



شیب مثبت $m = \tan \alpha$



شیب منفی $m = \tan \alpha$

نتیجه:

برای آن‌که دو خط موازی باشند، باید شیبهای آن‌ها برابر باشد.

مثال: خط l به معادله $l: 3x - y = 1$ بوده و خط l' با آن موازی است. شیب l' را تعیین کنید.

پاسخ ✓

توجه کنید:

چنان‌که در پاسخ مثال قبل هم دیده می‌شود، اگر معادله‌ی خط را به صورت مرتب شده‌ی $y = ax + b$ بنویسیم، عدد a ، یعنی ضریب x ، همان شیب (و b عرض از مبدأ) خط است. بنابراین؛

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



برای تعیین شیب خطی چون $2x - 3y = 6$ ، از این پس مانند زیر، y را تنها می‌کنیم:

$$-3y = -2x + 6 \xrightarrow{\div(-3)} y = \frac{2}{3}x - 2 \Rightarrow \left(\text{شیب برابر } \frac{2}{3} \text{ است.} \right)$$

نوشتن معادله:

برای نوشتن معادله‌ی هر خط، به دو مورد نیاز داریم:

شیب: m و **مختصات یک نقطه روی آن:** (x_0, y_0)

با این اطلاعات، معادله‌ی خط را به صورت $y = mx + h$ (h مجهول است). نوشته و با جایگذاری مختصات (x_0, y_0) در معادله، مقدار h را معلوم می‌کنیم.

روش دوم:

معادله‌ی خط را می‌توانید یک‌بار به صورت زیر بنویسید:

$$y - y_0 = m(x - x_0)$$

زیرا:

وقتی (x, y) نقطه‌ی دلخواهی از خط باشد، طبق تعریف شیب، باید:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \Rightarrow y - y_0 = m(x - x_0)$$

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(2, -1)$ و $(0, 2)$ را بنویسید.

پاسخ

مثال: معادله‌ی خط با عرض از مبدأ ۲ و طول از مبدأ -۱ را بنویسید.

پاسخ

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که از نقطه‌ی $(-3, 1)$ گذشته و محور افقی را در نقطه‌ای به طول ۲ قطع کند.

پاسخ

مثال: معادله‌ی خط گذرا بر دو نقطه‌ی $(2, 0)$ و $(2, -1)$ را بنویسید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ ✓

مثال: معادله‌ی خطی بنویسید که با خط $l: 3x - y = 1$ موازی بوده و از مبدأ عبور کند.

پاسخ ✓

مثال: خطی گذرا از نقطه‌ی $(-1, 2)$ و موازی خط $l: 3x + y = 1$ ، محور x را با کدام طول قطع می‌کند؟

پاسخ ✓

نوشتن فوری معادله:

اگر شیب خط m و عرض از مبدأ خط، عدد q را داشته باشیم، معادله‌ی خط یک‌باره نوشته می‌شود:

$$y = mx + q \quad (\text{چرا!})$$

مثال: شیب و عرض از مبدأ خط $3x - 6y = 1$ را بیابید.

پاسخ ✓

مثال: معادله‌ی خطی موازی خط $l: -2x - y = 3$ و دارای عرض از مبدأ -5 را بنویسید.

پاسخ ✓

خطهای عمود بر هم:

شرط آن که دو خط با شیب‌های m و m' بر هم عمود باشند، آن است که:

$$m \times m' = -1 \Rightarrow m' = -\frac{1}{m}$$



بنابراین:

وقتی m را داریم، کافی است آن را معکوس و سپس قرینه کرده تا شیب خط عمود (m') حاصل شود.

توجه کنید:

در مطلب بالا، خطها باید موازی محورهای مختصات نباشند. (در آن حالت، معادله عمود بدیهی است. چرا؟)

مثال: (مشابه کتاب) وضعیت هر جفت از خطهای داده شده را مشخص کنید.

الف) $x=2$ و $2y+1=0$

ب) $x-2y=1$ و $y=2x-3$

پ) $3x-2y=0$ و $y=-\frac{2}{3}x+4$

مثال: (از کتاب) خط l به معادله $2y-3x=1$ و خط d با عرض از مبدأ 5 به معادله $y=mx+5$ را در نظر بگیرید. الف) m را طوری بیابید که خط d موازی باشد.

ب) به ازای چه مقداری از m ، دو خط بر یکدیگر عمود هستند؟

مثال: خطی گذرنده از نقطه $(1,-2)$ و عمود بر خط $2y+x=1$ ، محور y را با کدام عرض قطع می کند؟

پاسخ

مثال: (از کتاب) مربع $ABCD$ با دو رأس مجاور $A(5,1)$ و $B(1,4)$ داده شده است. الف) معادله ضلع AB را بنویسید.

ب) با استفاده از قسمت قبل، معادله ضلع AD را بنویسید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پ) اگر مختصات C به صورت $(7, 9)$ باشد، مختصات رأس D را تعیین کنید.

توجه کنید:

می‌توان نشان داد، اگر دو خط به صورت استاندارد $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ داده شوند، آنگاه آن‌ها:

- موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت خط‌ها متقاطع‌اند.
- بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.
- بر هم عمودند، هرگاه: $aa' + bb' = 0$.

فاصله‌ی دو نقطه:

اگر نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شوند، فاصله‌ی آن‌ها برابر است با:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(دلیل این مطلب، با رسم شکل و استفاده از رابطه‌ی فیثاغورس به آسانی بیان می‌شود.)

یوئزه:

- اگر دو نقطه طول برابر داشته باشند، یعنی $x_2 = x_1$ ، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(y_2 - y_1)^2} = |y_2 - y_1|$$

- اگر دو نقطه عرض برابر داشته باشند، یعنی $y_2 = y_1$ ، آنگاه:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

- فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ ساده‌تر قابل بیان است:

$$OA = \sqrt{(x_1 - 0)^2 + (y_1 - 0)^2} = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

برای نمونه:

اگر نقاط $A(2, -1)$ و $B(3, 2)$ داده شوند:

الف) طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB = \sqrt{(3 - 2)^2 + (2 - (-1))^2} = \sqrt{1 + 9} = \sqrt{10}$$

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی A تا مبدأ:

$$OA = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4 + 1} = \sqrt{5}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: مثلث ABC با رأس‌های $A(1, 2)$ ، $B(2, -1)$ و $C(-1, -1)$ داده شده است.

الف) آیا مثلث ضلع‌های برابر دارد؟

ب) آیا مثلث قائم‌الزاویه است؟

مثال: (از کتاب) مثلث ABC با رأس‌های $A(2, 0)$ ، $B(5, 4)$ و $C(-2, 3)$ داده شده است. به دو روش نشان دهید

مثلث قائم‌الزاویه است و سپس مساحت آن را بیابید.

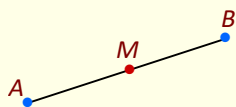
پاسخ ✓

مثال: اگر $A(4, 4)$ و $B(1, 1)$ دو رأس متقابل (روبروی) یک مربع باشند، مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ ✓

وسط پاره‌خط:

اگر نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_2, y_2)$ داده شوند، مختصات نقطه‌ی وسط آن‌ها M چنین است:



$$(x_M = \frac{x_1 + x_2}{2}, y_M = \frac{y_1 + y_2}{2}) \Rightarrow M(x_M, y_M)$$

(دلیل این مطلب را می‌توان با نمایش مختصات هر سه نقطه روی محورهای مختصات بیان کرد.)

مثال: نقاط $A(3m-1, 2m-5)$ و $B(3-m, 1-4m)$ مفروض‌اند. اگر نقطه‌ی M وسط پاره‌خط AB روی محور x ‌ها

واقع باشد، مقدار m را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ ✓

مثال: در مثلث با رئوس $A(0, 3)$ ، $B(-3, 1)$ و $C(3, 1)$ ، فاصله‌ی نقطه‌ی A از وسط ضلع BC (یعنی طول میانه‌ی AM) را حساب کنید.

پاسخ ✓

در دو مثال بعد، خاصیت‌هایی از نقاط در صفحه آورده می‌شود.

مثال: قرینه‌ی نقطه‌ی $P(\alpha, \beta)$ را نسبت به مبدأ مختصات به دست آورید.

پاسخ ✓

تلیجه:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(a, b)$ نسبت به مبدأ به صورت $P'(-a, -b)$ تعیین می‌شود.

مطلب بالا را می‌توان با کلیت بیشتری بررسی کرد:

مثال: (از کتاب) مختصات قرینه‌ی نقطه‌ی $E(1, 2)$ را نسبت به نقطه‌ی $M(-1, 4)$ مشخص کنید.

پاسخ ✓

توجه کنید:

مانند آن‌چه در مثال بالا دیدیم، می‌توان در کل نشان داد:

قرینه‌ی نقطه‌ی $P(a, b)$ نسبت به نقطه‌ی دلخواه $M(\alpha, \beta)$ برابر $P'(2\alpha - a, 2\beta - b)$ است.

مثال: چهارضلعی $ABCD$ را یک متوازی‌الاضلاع در نظر گرفته و روابط بین طول و عرض رأس‌های آن به صورت زیر را نشان دهید:

$$x_A + x_C = x_B + x_D \quad \text{و} \quad y_A + y_C = y_B + y_D$$

توجه فرمایید:

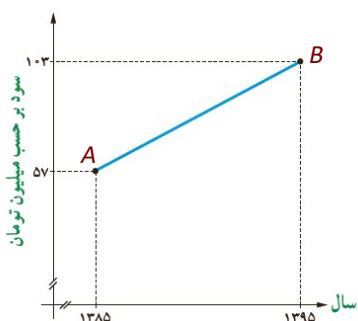
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



در نتیجه:

اگر فقط مختصات سه رأس معلوم باشد، رأس چهارم را می توان مشخص کرد.

پاسخ



مثال: (از کتاب) سود سالانه ی یک کارگاه کوچک تولیدی از سال ۱۳۸۵ تا

۱۳۹۵ طبق نمودار روبه رو سیر صعودی داشته است.

الف) میانگین سود سالانه ی کارگاه در این دهه چقدر بوده است؟

ب) در کدام سال، مقدار سود سالانه با این میانگین سود ده ساله برابر بوده است؟

پ) اگر سود سالانه در طول یک دهه ی آینده با همین روند افزایش یابد، انتظار می رود در سال ۱۴۰۵ سود سالانه چقدر باشد؟

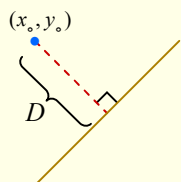
منظور از فاصله ی نقطه تا یک خط، کوتاه ترین فاصله ی بین آن نقطه تا تمام نقاط روی خط است. این فاصله برابر طول پاره خط عمود رسم شده از نقطه بر خط بوده و چنین محاسبه می شود:

فاصله ی نقطه تا خط:

باید ابتدا خط را به صورت مرتب $ax + by + c = 0$ نوشت. سپس:

فاصله ی یک نقطه ی (x_0, y_0) از این خط برابر است با:

$$D = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



بویژه:

فاصله ی مبدأ مختصات: $(0, 0)$ تا این خط برابر است با:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: دو خط $l_1: 2x + y = -1$ و $l_2: -x + 2y = -7$ داده شده‌اند.

الف) نقطه‌ی برخورد دو خط را مشخص کنید.

ب) فاصله‌ی نقطه‌ی $C(7, 9)$ از خط l_2 را به دست آورید.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

نقطه‌ی $A(3, 0)$ یکی از رئوس مربعی است که یک ضلع آن منطبق بر خط $l: y - x = 5$ می‌باشد. مساحت این مربع را به دست آورید.

پاسخ

مثال: نقطه‌ی $A(2, 3)$ رأس مربعی است که خط $2x + y - 2 = 0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع را حساب کنید.

پاسخ

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

دایره‌ی به مرکز $M(3, -1)$ بر خط به معادله‌ی $y = \frac{4}{3}x$ مماس است. مساحت دایره را حساب کنید.

پاسخ

مثال: فاصله‌ی دو خط موازی $l_1: 2x + y = -1$ و $l_2: 2y = -4x + 3$ را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



پاسخ ✓

توجه کنید:

همیشه می‌توان با ضرب عددهای مناسب در معادلات دو خط موازی، آن‌ها را با ضرایب مشابه به شکل $l_1: ax + by + c = 0$ و $l_2: ax + by + c' = 0$ نوشت. در این صورت، فاصله‌ی آن‌ها مستقیماً چنین محاسبه می‌شود:

$$D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

برای نمونه؛

در مثال قبل، معادله‌ی اول را در عدد ۲ ضرب کنید؛ خواهیم داشت:

$$\left. \begin{array}{l} l_1: 4x + 2y + 2 = 0 \\ l_2: 4x + 2y - 3 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow D = \frac{|2 - (-3)|}{\sqrt{4^2 + 2^2}} = \frac{5}{\sqrt{20}} = \frac{5}{2\sqrt{5}}$$

مثال: معادلات دو ضلع یک مربع به صورت $2x + 3y = -4$ و $4x + 6y + m = 0$ است. اگر مساحت مربع $\frac{9}{13}$ باشد، مقدار m را حساب کنید.

پاسخ ✓

پاسخ دهید (۱) ?

۱- وضعیت خط‌های $x - 2y = 0$ و $y + 2x = -1$ را نسبت به هم بررسی کرده و آن‌ها را در دستگاه مختصات رسم کنید.

۲- نقطه‌ی $P(4 - 3m, 2m - 6)$ روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد. فاصله‌ی P از مبدأ را بیابید.

۳- معادله خطی که از مبدأ مختصات و محل برخورد دو خط به معادله‌های $2x + 3y + 8 = 0$ و $2x - 7y + 12 = 0$ می‌گذرد، را بنویسید.

۴- اگر $A(4, 4)$ و $B(1, 1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع را بیابید.

۵- فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $2y = mx + b$ گذرنده بر نقطه‌ی $(1, 2)$ برابر ۱ است. m را بیابید.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

یک ضلع مستطیلی روی خط $x = y - 1$ واقع بوده و نقاط $(-3, 2)$ و $(3, 4)$ دو سر قطری از آن هستند. مساحت مستطیل را حساب کنید.



۲ معادله درجه دوم

در این بخش، تکمیل مبحث حل معادله‌ی درجه دوم و سپس ارتباط بین جواب‌های این نوع معادلات بررسی می‌شود. ابتدا روش‌های حل را یادآوری می‌کنیم.

توجه کنید:

سریع‌ترین روش حل معادله، در صورت امکان، روش تجزیه کردن و استفاده از قاعده‌ی زیر است:

$$P \times Q = 0 \Rightarrow P = 0 \text{ یا } Q = 0$$

مثال: معادلات زیر را به ساده‌ترین روش حل کنید.

الف) $x^2 - 4x + 4 = 1$

ب) $x^2 - 3x = 0$

پ) $x^2 - x = 6$

ت) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

روش دلتا:

شکل کلی معادله‌ی درجه دوم به صورت $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ بوده و در آن اعداد a , b و c را **ضرایب معادله** می‌گوئیم. در این معادله، جواب‌ها بر حسب عدد $\Delta = b^2 - 4ac$ تعیین می‌شوند:

▪ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مختلف** (متمايز) α و β دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$$

و

$$\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

▪ اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله **دو ریشه‌ی مضاعف** (برابر یا تکراری) دارد که عبارتند از:

$$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$$

▪ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله **هیچ جواب ندارد**.

مثال: معادلات درجه دوم زیر را حل کنید.

الف) $4x^2 - x - 1 = 0$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$3x^2 - x = -6 \quad (\text{ب})$$

مثال: مقدار t را طوری تعیین کنید که معادله $(2-t)x^2 - x = 3$:

الف) دارای ریشه‌ی مضاعف باشد.

ب) جواب حقیقی نداشته باشد.

👉 حالت‌های خاص: (مهم)

معادله $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$ را در نظر بگیرید:

❖ اگر a و c مختلف‌العلامت باشند، معادله همیشه دو جواب متمایز دارد.
زیرا:

$$\Delta = b^2 - \underbrace{4ac}_{\substack{\geq 0 \\ > 0}} \Rightarrow \Delta > 0 \quad (\text{مقدار دلتا الزاماً مثبت می‌شود})$$

❖ در دو حالت مهم زیر، جواب‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ در لحظه تعیین می‌شوند:

▪ اگر جمع ضرایب برابر صفر شود: $a + b + c = 0$ ، آنگاه یکی از ریشه‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است.

▪ اگر $a - b + c = 0$ (یا: $b = a + c$) باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

برای نمونه:

در معادله $3x^2 + 4x + 1 = 0$ که بالاتر به روش تجزیه حل شد، شرط $b = a + c$ برقرار است: چون $4 = 3 + 1$. پس جواب‌ها فوری -1 و $-\frac{c}{a} = -\frac{1}{3}$ به دست خواهند آمد.

مثال: طول و عرض مستطیلی به ترتیب $7x + 1$ و $x + 3$ است. اگر مساحت مستطیل 32 واحد مربع باشد، مقدار x را

بیابید.





تبدیل به درجه دوم: (تغییر متغیر)

گاهی یک معادله درجه دوم نیست، ولی ظاهر یا کلیت آن شبیه معادلات درجه دوم است. چنین معادله‌ای معمولاً با تغییر کوچکی تبدیل به معادله درجه دوم شده و سپس حل می‌شود. نمونه‌ها:

الف) برای حل معادله‌ی درجه چهارم $x^4 - 3x^2 - 4 = 0$ ، قرار می‌دهیم: $x^2 = t$ و در نتیجه یک معادله درجه دوم به صورت $t^2 - 3t - 4 = 0$ خواهیم داشت. حل معادله‌ی جدید به روش کوتاه:

$$t = -1, t = -\frac{c}{a} = -\frac{-4}{1} = 4$$

اکنون طبق تغییر متغیری که انجام داده‌ایم، دو جواب برای معادله‌ی اصلی حاصل می‌شود:

- $t = 4: x^2 = 4 \Rightarrow x = 2, -2$
- $t = -1: x^2 = -1$ غیر ممکن

ب) سؤال نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳: معادله‌ی $x^4 - 3x^2 + 1 = 0$ دارای دو جواب حقیقی است. (درست □ - نادرست □)

جواب:

به نمونه‌های دیگری توجه کنید:

مثال: در معادله‌ی $(2x-1)^2 + 2(2x-1) - 3 = 0$ ریشه‌ها را مشخص کنید.

پاسخ ✓

مثال: معادله‌ی $(x^2-1)^2 + x^2 - 1 = 6$ را با روش تغییر متغیر حل کنید.

پاسخ ✓

در ادامه، ارتباط بین جواب‌ها و ضرایب معادله‌ی درجه دوم را ببینید:

روابط بین ریشه‌ها:

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، آنگاه:

▪ **مجموع ریشه‌ها:** برابر است با: $s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$

▪ **ماصل ضرب ریشه‌ها:** برابر است با: $p = \alpha\beta = \frac{c}{a}$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



گاهی فاصله یا اختلاف دو ریشه مورد نظر است که می‌توانید رابطه $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ را به کار ببرید.

توجه کنید:

روابط بالا با توجه به مقادیر $\alpha, \beta = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ نوشته شده‌اند. برای نمونه:

$$p = \alpha\beta = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \times \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = -\frac{(\sqrt{\Delta})^2 - b^2}{4a^2} = -\frac{b^2 - 4ac - b^2}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

تذکر مهم:

هر وقت در مورد ریشه‌های α و β از یک معادله‌ی درجه دوم صحبت می‌شود:

باید از برقراری شرط $\Delta \geq 0$ مطمئن باشید؛ در صورت لزوم، باید آن را چک کنید.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $2x^2 - 6x - 1 = 0$ باشند؛

الف) مقادیر $s = \alpha + \beta$ و $p = \alpha\beta$ را حساب کنید.

ب) حاصل $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}$ را به دست آورید.

مثال: در معادله‌ی $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ مقدار m را در صورت امکان طوری حساب کنید که:

الف) ریشه‌های معادله قرینه‌ی هم باشند.

ب) ریشه‌های معادله عکس هم باشد.

مثال: اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $3x^2 + x + 2 = 0$ باشند، حاصل $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ را به دست آورید.

پاسخ

مثال: به ازای چه مقداری از m در معادله‌ی $x^2 - mx + 8 = 0$ یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



عبارت‌های خاص:

با داشتن عددهای: $\alpha + \beta = s$ و $\alpha\beta = p$ ، محاسبه‌ی برخی عبارت‌های خاص بر حسب s و p :

■ **جمع مجذورات:**

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = s^2 - 2p$$

■ **جمع معکوس‌ها:**

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{s}{p}$$

■ **جمع معکوس مجذورات:**

$$\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} = \frac{\beta^2 + \alpha^2}{\alpha^2\beta^2} = \frac{s^2 - 2p}{p^2}$$

■ **جمع مکعبات:**

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = s^3 - 3ps$$

مثال: مقدار m را طوری حساب کنید که مجموع مجذورات دو ریشه حقیقی معادله‌ی $x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴

باشد.



گاهی لازم است با داشتن ریشه‌ها یا حتی فقط با داشتن جمع و ضرب آن‌ها، معادله‌ی مربوطه را نوشت:

نوشتن معادله:

هرگاه **مجموع** ریشه‌ها s و **حاصل‌ضرب** ریشه‌ها p معلوم باشند، آن معادله به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x^2 - sx + p = 0$$

دلیل:

اگر x' و x'' را ریشه‌های معادله بگیریم، باید عامل‌های $x - x'$ و $x - x''$ در معادله موجود باشند. در نتیجه:

$$(x - x')(x - x'') = 0 \rightarrow x^2 - x'x - xx'' + x'x'' = 0 \Rightarrow x^2 - \underbrace{(x' + x'')}x + \underbrace{x'x''}_p = 0$$

برای نمونه:

اگر جواب‌های معادله‌ای $2 - \sqrt{3}$ و $2 + \sqrt{3}$ باشند، چون:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



$$s = 2 - \sqrt{3} + 2 + \sqrt{3} = 4 \quad \text{و} \quad p = (2 - \sqrt{3})(2 + \sqrt{3}) = 4 - 3 = 1$$

این معادله به صورت $x^2 - 4x + 1 = 0$ خواهد بود.

مثال: معادله‌ای که ریشه‌های آن عددهای $\frac{1}{p}$ و $3 -$ باشند را به دو روش بنویسید:

الف) به روش مستقیم.

ب) به روش فرمولی بالا.

گاهی لازم می‌شود:

اگر x' و x'' ریشه‌ها بوده و a (ضریب x^2 در معادله) هم معلوم باشد، معادله باید به صورت زیر نوشته شود:

$$a(x - x')(x - x'') = 0$$

مثال: (از کتاب) آیا مستطیلی با محیط 11 cm و مساحت 6 cm^2 وجود دارد؟ اگر جواب مثبت است، طول و عرض آن را

مشخص کنید.

پاسخ

مثال: معادله‌ای با دو شرط زیر بنویسید:

الف) یکی از جواب‌های آن $1 - 2\sqrt{3}$ باشد.

ب) ضرایب آن عددهای گویا باشند.

پاسخ

در ادامه، با داشتن یک معادله، معادله‌ای مرتبط با آن می‌نویسیم.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - x - 1 = 0$ دو واحد کوچک‌تر باشد.

پاسخ

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



روش کوتاه:

- در سؤالاتی مانند مثال قبل، برای پاسخ دهی سریع‌تر، طبق مراحل زیر عمل کنید:
- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y بگیرید.
 - با توجه به شرط داده شده بین ریشه‌ها، رابطه‌ی بین x و y را بنویسید.
 - از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y به دست آورده و در معادله‌ی اولیه جایگزین کنید.
 - معادله‌ی به دست آمده را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم حاصل شود.

نمونه: پاسخ مثال قبل به این روش:

باید $y = x - 2$ باشد؛ پس $x = y + 2$ بوده و در نتیجه:

$$4(y+2)^2 - (y+2) - 1 = 0 \rightarrow 4y^2 + 16y + 16 - y - 2 - 1 = 0 \Rightarrow 4y^2 + 15y + 13 = 0$$

که همان معادله‌ی $4x^2 + 15x + 13 = 0$ است.

مثال: معادله‌ای بنویسید که ریشه‌های آن از معکوس ریشه‌های معادله‌ی $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر باشند.



هند مالت ساده:

اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند؛

الف) معادله‌ای که جواب‌های آن $-\alpha$ و $-\beta$ باشند، به صورت $ax^2 - bx + c = 0$ است.

ب) معادله‌ای که جواب‌های آن $\frac{1}{\alpha}$ و $\frac{1}{\beta}$ باشند، به صورت $cx^2 + bx + a = 0$ است.

سؤال: معادله‌ای که جواب‌های آن $-\frac{1}{\alpha}$ و $-\frac{1}{\beta}$ باشند، چگونه است؟



پاسخ دهید (۲) ?

۱- ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - 18(x^2 + x) + 72 = 0$ را مشخص کنید.

۲- ریشه‌های معادله‌ی $(x-1)^2 - 5|x-1| + 4 = 0$ را بیابید.

۳- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ ، حاصل عبارت $(x_1^2 - 4x_1 + 2)(x_2^2 - 4x_2 + 4)$ را حساب کنید؟ (x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند).

۴- اگر $k^2 - 3k + 7 = 0$ و $k'^2 - 3k' + 7 = 0$ باشد، $k + k'$ چقدر است؟

۵- در معادله‌ی $2x^2 - mx + 5m = 0$ ، مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های معادله عکس و قرینه‌ی هم باشند؟

۶- برای کدام مقدار m ، مجموع مربعات ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $mx^2 - (m+3)x + 5 = 0$ برابر ۶ است؟ (تجربی ۹۳)

- (۱) $-\frac{9}{5}$ (۲) ۱ (۳) ۱ و $-\frac{9}{5}$ (۴) ۱ و $-\frac{9}{5}$

۷- در معادله‌ی $x^2 - mx = 2$ رابطه‌ی $x_1(1+x_2) = 2$ بین ریشه‌ها وجود دارد. m کدام است؟

- (۱) $\frac{7}{2}$ (۲) $-\frac{5}{2}$ (۳) $\frac{5}{2}$ (۴) $-\frac{7}{2}$

۸- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $\frac{2+\sqrt{3}}{5}$ و $\frac{2-\sqrt{3}}{5}$ باشند. (نهایی-فرداد ۱۴۰۳)

۹- معادله‌ی درجه دومی بنویسید که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشند.

۱۰- ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + ax + b = 0$ یک واحد از ریشه‌های معادله‌ی $3x^2 + 7x + 1 = 0$ بیشتر است. b کدام است؟

- -2 -1 $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{3}$

منتخب کتاب:

۱- معادله‌ی $5x^3 + 1 = 4x^6$ را حل کنید.



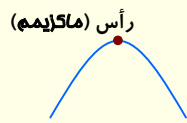
چالش (ویژه علاقمندان)

اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 - m = 0$ بوده و $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{3-\beta} = 1$ باشد، مقدار m را بیابید.

کلیت نمودار تابع درجه دوم را یادآوری می‌کنیم.

نمودار درجه دوم:

نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ همیشه یک «سهمی» به یکی از دو صورت زیر است:
 نمودار برای $a > 0$ دارای می‌نیم (کمترین y نمودار) و برای $a < 0$ دارای ماکزیم (بیشترین y نمودار) است. به نقطه‌ی ماکزیم یا می‌نیم «رأس» سهمی گفته می‌شود.



اگر $a < 0$ باشد:



اگر $a > 0$ باشد:

بنابراین:

بیشترین یا کمترین مقدار عبارت درجه دوم همان عرض رأس سهمی است.

نمودار سهمی همیشه دارای محور تقارن است:

رأس و محور تقارن:

طول رأس سهمی $x = -\frac{b}{2a}$ و عرض آن با جایگذاری طول در ضابطه مشخص می‌شود.

نتیجه:

خط عمودی به معادله‌ی $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی را مشخص می‌کند.

ضمناً، به آسانی می‌توان نشان داد:

عرض رأس سهمی یک‌بار از رابطه‌ی $-\frac{\Delta}{4a}$ نیز قابل محاسبه است.

برای نمونه:

در تابع $y = -x^2 + 4x - 3$ ، طول رأس (و همچنین معادله‌ی محور تقارن) $x = -\frac{4}{2(-1)} = 2$ بوده و بیشترین مقدار آن به دو روش گفته شده:

$$y_{\max} = -(2^2) + 4(2) - 3 = 1 \quad \text{و} \quad y_{\max} = -\frac{\Delta}{4a} = -\frac{4^2 - 4(-1)(-3)}{4(-1)} = -\frac{4}{-4} = 1$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



مثال: در تابع $y = x(2-x) + 4x - 1$ موارد زیر را پاسخ دهید:

الف) نمودار این تابع دارای می‌نیم است یا ماکزیمم؟

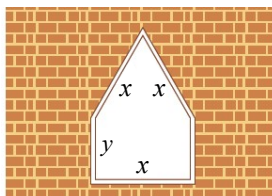
ب) طول نقطه‌ی می‌نیم یا ماکزیمم و سپس عرض آن را به دست آورید.

پ) معادله‌ی محور تقارن نمودار را بنویسید.

کاربردهایی از ماکزیمم یا می‌نیم عبارت درجه دوم:

مثال: دو برابر عددی از عدد دیگر ۶ واحد بیشتر است. اگر حاصل ضرب آن‌ها می‌نیم باشد، مجموع آن دو کدام است؟

پاسخ



مثال: (از کتاب) یک پنجره به شکل مستطیلی است که در بالای آن یک مثلث

متساوی‌الاضلاع قرار گرفته است. اگر محیط پنجره ۴ متر باشد، ابعاد مستطیل را طوری بیابید که پنجره حداکثر نوردهی را داشته باشد.

پاسخ

در ادامه، خصوصیات بیشتری از نمودار تابع درجه‌ی دوم بررسی می‌شود.

صفرهای تابع:

در مورد یک تابع $y = f(x)$:

هر نقطه‌ی برافورد نمودار با محور طول را یک «صفر» برای تابع گویند.

بنابراین:

صفرهای تابع f ، همان جواب‌های معادله‌ی $f(x) = 0$ هستند.

توجه فرمایید:

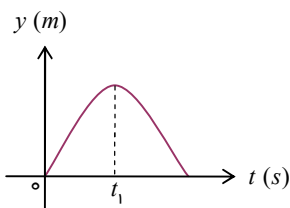
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



در نتیجه:

صفرهای تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، دقیقاً ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ هستند که در بخش قبل بررسی گردید.

مثال: اگر گلوله‌ای با سرعت اولیه‌ی $30 \frac{m}{s}$ به طرف بالا پرتاب شود، ضابطه‌ی مکان (ارتفاع) آن بر حسب زمان (t) به صورت $y = -5t^2 + 30t$ و نمودار مکان - زمان به صورت روبه‌رو است:



الف) نقاط برخورد نمودار با محور افقی چه چیزی را نشان می‌دهند؟

ب) نقطه‌ی به طول t_1 چه معنایی دارد؟

مثال: نمودار تابع $y = x^2 + mx - 3$ نسبت به خط $x = 1$ متقارن است. صفرهای تابع را مشخص کنید.



وضعیت نمودار:

در مورد وضع نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ در دستگاه مختصات به مواردی مهم توجه کنید:

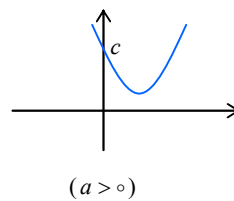
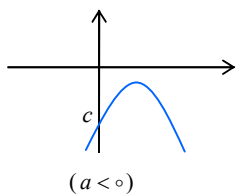
❖ نمودار همواره محور y ها را به عرض c قطع می‌کند:

$$x = 0 \Rightarrow y = c$$

❖ اگر $\Delta < 0$ باشد، نمودار محور طولها را قطع نمی‌کند. دقیق‌تر:

▪ اگر $a > 0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند.

▪ اگر $a < 0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند.



❖ اگر $\Delta = 0$ باشد، نمودار بر محور طولها مماس است. به‌طور دقیق:

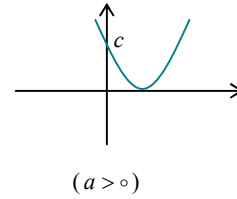
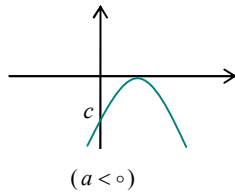
▪ اگر $a > 0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.

توجه فرمایید:

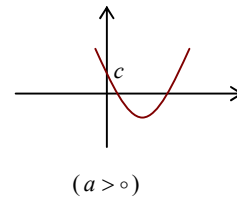
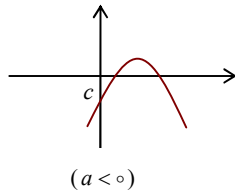
اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



▪ اگر $a < 0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.



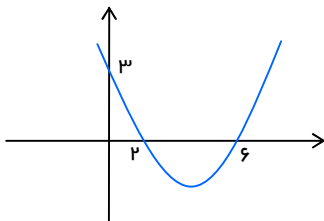
❖ اگر $\Delta > 0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



🌟 **مثال:** محدوده‌ی m را طوری مشخص کنید که نمودار سهمی $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور طول باشد.

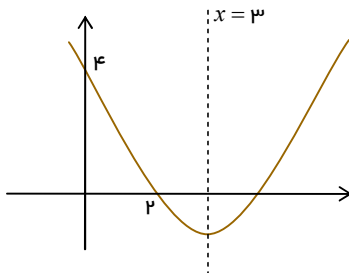
پاسخ

🌟 **مثال:** ضابطه‌ی سهمی شکل مقابل را بنویسید.



پاسخ

🌟 **مثال:** ضابطه‌ی جبری سهمی مقابل را بنویسید.



پاسخ



در پایان این بخش، تشخیص علامت صفرهای تابع سهمی (همان ریشه‌های معادله درجه دو) را بر حسب ضرایب معادله می‌آوریم. معادله $ax^2 + bx + c = 0$ را در نظر گرفته و فرض کنید $\Delta \geq 0$ باشد. در این صورت همواره دو ریشه α و β وجود داشته و اطلاعات دقیق‌تری از آن‌ها در دو حالت بعدی (**بر حسب علامت** $\frac{c}{a}$) معلوم می‌گردد.

حالت ۱: $\frac{c}{a} > 0$

ضرب ریشه‌ها مثبت است، پس معادله دو ریشه‌ی هم علامت داشته؛ به علاوه:

- اگر $-\frac{b}{a} > 0$ باشد، آنگاه هر دو ریشه مثبت‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت مثبت شده است).
- اگر $-\frac{b}{a} < 0$ باشد، آنگاه هر دو ریشه منفی‌اند. (چون جمع دو عدد هم‌علامت منفی شده است).

برای نمونه:

معادله $2x^2 + 5x - 1 = 0$ دو ریشه‌ی مثبت دارد. زیرا:

$$\frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} > 0 \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} = -\frac{5}{2} > 0$$

حالت ۲: $\frac{c}{a} < 0$

ضرب ریشه‌ها منفی است، پس معادله دو ریشه‌ی مثبت و منفی دارد. با فرض $\alpha < 0 < \beta$ می‌توان گفت:

- اگر $-\frac{b}{a} > 0$ باشد، آنگاه $|\alpha| < |\beta|$ ؛ یعنی ریشه‌ی مثبت اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند ۳- و ۴-).
- اگر $-\frac{b}{a} < 0$ باشد، آنگاه $|\alpha| > |\beta|$ ؛ یعنی ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. (مانند ۳- و ۲-).

توجه: در حالت $\frac{c}{a} < 0$ ، شرط $\Delta > 0$ فود به فود برقرار است.

می‌دانیم:

اگر $-\frac{b}{a} = 0$ (یعنی: $b = 0$) باشد، معادله دارای دو ریشه‌ی قرینه است: $\alpha = -\beta$.

برای نمونه:

معادله $2x^2 + 5x - 1 = 0$ دو ریشه‌ی مختلف علامه دارد و ریشه‌ی منفی اندازه‌ی بزرگ‌تری دارد. زیرا:

$$\frac{c}{a} = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2} < 0 \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a} = -\frac{5}{2} < 0$$

توجه کنید:

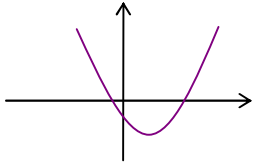
اگر $\frac{c}{a} = 0$ باشد، باید داشته باشیم: $c = 0$. در این حالت یکی از جواب‌ها صفر است و جواب دیگر باید $-\frac{b}{a}$ باشد.

مانند نمونه‌ی زیر:



$$-2x^2 + 3x = 0 \rightarrow x(-2x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = \frac{3}{2} \end{cases}$$

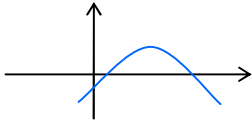
مثال: در تابع $y = ax^2 + bx + c$ با نمودار روبه‌رو، علامت تمام مقادیر a, b, c, Δ, s و p را مشخص کنید.



پاسخ

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۳

در سهمی $y = ax^2 + bx + c$ با نمودار داده شده، علامت $b \times c$ است.



پاسخ

مثال: وضعیت ریشه‌های معادله $2x^2 - x - 1 - m^2 = 0$ را مشخص کنید.

پاسخ



پاسخ دهید (۳)

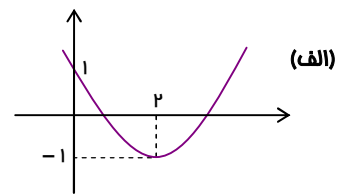
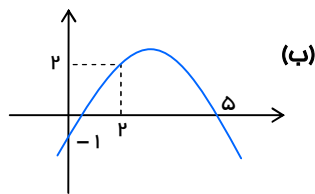
۱- مقدار ماکزیمم یا می نیمم نمودار منحنی $y = -3x^2 - 6x + 2$ و معادله ی محور تقارن آن را تعیین کنید.

۲- قرار است در کنار ساحل دریا، محوطه ای مستطیل شکل ایجاد کنیم. برای این کار، لازم است سه ضلع محوطه، نرده کشی شود. اگر فقط هزینه نصب ۶۰ متر نرده را در اختیار داشته باشیم، ابعاد مستطیل را طوری تعیین کنید که مساحت آن بیشترین مقدار ممکن گردد.

۳- نمودار $y = x^2 - 2x + 1 + a$, ($a > 0$) محور طولها را در چند نقطه قطع می کند؟

۴- اگر منحنی تابع درجه دوم $y = (a-1)x^2 + x + 3$ نسبت به خط $x = 2$ متقارن باشد، این منحنی محور x ها را با چه طول مثبتی قطع می کند؟

۵- ضابطه ی سهمی داده شده در شکل های زیر را بنویسید.



منتخب کتاب:

۱- مقدار ماکزیمم یا می نیمم توابع با ضابطه های زیر را به دست آورید:

الف) $f(x) = -2x^2 + 8x - 5$ ب) $g(x) = 3x^2 + 6x + 5$

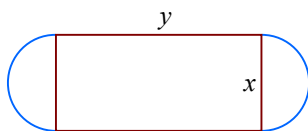
۲- موشکی که به طور عمودی رو به بالا شلیک شده، t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار می گیرد که

معادله ی آن به صورت $h(t) = 10t - 5t^2$, ($t \geq 0$) است.

الف) چقدر طول می کشد تا موشک به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

ب) ارتفاع نقطه ی اوج را بیابید.

پ) چند ثانیه پس از پرتاب، موشک به زمین باز می گردد؟



۳- استادیومی به شکل مقابل در حال ساخت است که در آن $x \geq 0$ و $y \geq 0$ و نیم

دایره ها به شعاع $\frac{x}{2}$ هستند. اگر محیط استادیوم ۱۵۰۰ متر باشد، x و y را طوری

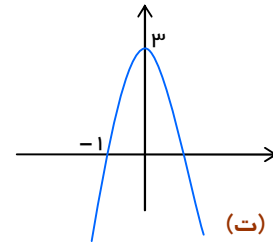
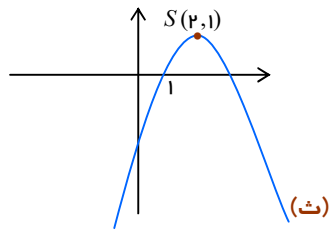
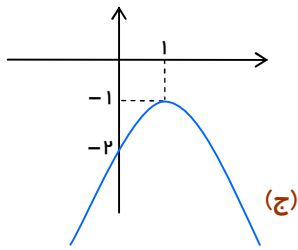
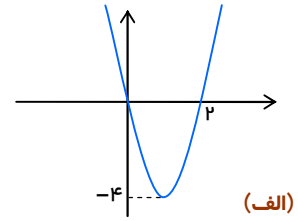
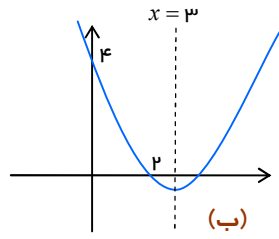
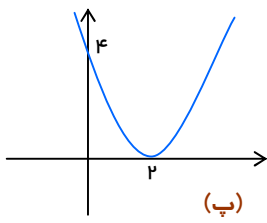
بیابید که:

الف) مساحت مستطیل حداکثر مقدار ممکن گردد. ب) مساحت استادیوم حداکثر مقدار ممکن شود.

۴- ضابطه ی جبری سهمی های زیر را بنویسید:

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



چالش (ویژه علاقمندان)

در سهمی $y = x^2 + (m - 3)x + 2m$ ، محدوده m را در هر یک از دو حالت زیر مشخص کنید:
 الف) نمودار فقط از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند.
 ب) نمودار از ناحیه‌ی چهارم عبور نکند.



معادله‌ای شامل کسرهایی با صورت و مخرج چندجمله‌ای، را یک معادله‌ی گویا گوئیم. مانند:

$$\frac{x+1}{2-x} = 1+2x$$

در این نوع معادلات، پذیرش جواب‌ها بستگی به دامنه دارد:

دامنه عبارت گویا:

در یک عبارت گویا، دامنه شامل تمام عددهای حقیقی، به جز ریشه‌های مخرج است:

$$D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$$

توجه کنید:

اگر عبارت گویا شامل چندین کسر باشد، باید ریشه‌های تمام آن‌ها از \mathbb{R} کم شود.

مثال: دامنه‌ی معادله‌ی زیر را مشخص کنید.

$$\frac{x}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-2}$$

پاسخ

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی گویا:

- با تجزیه‌ی مخرج‌ها، ک.م.م آن‌ها را تعیین کرده و سپس آن را در دو طرف معادله ضرب می‌کنیم.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله‌ای که به دست می‌آید را حل می‌کنیم.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که در دامنه قرار داشته باشند.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است جایگذاری آن در تمام مخرج‌ها، هیچ کدام از آن‌ها را صفر نکند.

مثال: وضعیت جواب‌های معادله‌ی $2x+1 = -\frac{3}{x}$ را مشخص کنید.



پاسخ ✓

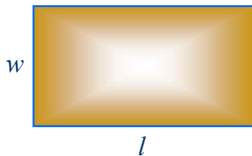
مثال: در معادله‌ی $\frac{x-1}{x-2} = \frac{x^2-2x+2}{x^2-2x} - \frac{x+1}{x}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ ✓

چند کاربرد جالب حل معادلات گویا را می‌آوریم. شروع با معرفی یک مستطیل خاص:

مستطیل طلایی:

اگر در یک مستطیل به طول l و عرض w داشته باشیم:



$$\frac{l}{w} = \frac{l+w}{l}$$

یعنی:

«نسبت مجموع طول و عرض به طول» برابر «نسبت طول به عرض» مستطیل باشد:

گوئیم: «مستطیل طلایی است» و «نسبت طول به عرض»، یعنی $\frac{l}{w}$ «نسبت طلایی» نامیده می‌شود.

مثال: (از کتاب) با انتخاب مستطیل طلایی با عرض ۱، طول آن $\frac{l}{w} = \frac{l}{1} = l$ که همان نسبت طلایی است را مشخص کنید.

پاسخ ✓

مثال: شش کیلوگرم رنگ با غلظت ۲۰ درصد را با ده کیلوگرم رنگ با غلظت ۵۵ درصد را مخلوط کرده‌ایم. چند کیلوگرم از مایع آن را تبخیر کنیم تا غلظت رنگ به ۵۰ درصد برسد؟

پاسخ ✓



مثال: (از کتاب) اگر دو ماشین چمن زنی با هم کار کنند، می‌توانند در ۴ ساعت چمن یک زمین فوتبال را کوتاه کنند. با فرض این که سرعت کار یکی از آن‌ها دو برابر دیگری باشد، هر یک از آن‌ها به تنهایی در چند ساعت می‌توانند این کار را انجام دهند؟

پاسخ ✓

مطلب بعدی در سؤالات نسبتاً قوی و برای حل سریع مورد نیاز است:

جمع با معکوس:

در مورد عبارت $a + \frac{1}{a}$ ، یعنی:

«مجموع یک عبارت با معکوس خود»

دو مطلب مهم زیر وجود دارند:

▪ اگر a مثبت باشد، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \geq 2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = 2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = 1$ باشد.

▪ اگر a منفی باشد، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \leq -2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = -2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = -1$ باشد.

مثال: در معادله‌ی $\frac{x^2 - 2}{2x + 1} = 2 - \frac{2x + 1}{x^2 - 2}$ ریشه‌ها را بیابید.

پاسخ ✓

در پایان این فصل، روش حل معادلات رادیکالی (آصم) مانند نمونه‌های زیر را ببینیم:

$$2\sqrt{1-x} + x = 1 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x-2} = 2+x$$

روش حل:

برای حل یک معادله‌ی اصم:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارتها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رسانده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



توجه کنید:

(۱) چون مقادیر x نباید زیر رادیکال را منفی کنند، با حل نامعادلات مربوطه، می‌توان دامنه‌ی تغییر x را تعیین کرد. برای نمونه؛

در معادله‌ی $2\sqrt{-x} = \sqrt{2x+2}$ ، دامنه به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\left. \begin{array}{l} -x \geq 0 \rightarrow x \leq 0 \\ 2x+2 \geq 0 \rightarrow 2x \geq -2 \rightarrow x \geq -1 \end{array} \right\} \cap \rightarrow -1 \leq x \leq 0$$

البته، چنان‌که در بند بعدی آورده‌ایم، تعیین دامنه‌ی x ضروری نیست.

(۲) برای قابل قبول بودن یک جواب کافی است که آن در معادله صدق کند.

نهایی؛ خرداد ۱۴۰۲

معادله‌ی $2x = 1 - \sqrt{2-x}$ را حل کنید.



مثال: معادله‌ی $2x + \sqrt{2x-1} = 1$ را حل کنید.



مثال: معادله‌ی $\sqrt{x^2+x} - \sqrt{-x} = 0$ را حل کنید.



مثال: (از کتاب) توضیح دهید چرا معادلات زیر فاقد ریشه‌ی حقیقی هستند.

(الف) $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x+3} + 1 = 0$



$$\sqrt{1-x} + \sqrt{x-2} = 0 \quad \text{ب)}$$

پاسخ دهید (۴) ?

۱- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\frac{x^2 - 2x + 2}{x^2 - 2x} - \frac{x+1}{x} = \frac{x-1}{x-2} \quad \text{الف)}$$

$$\frac{x+2}{x-1} = 1 - \frac{3}{x+5} \quad \text{ب)}$$

۲- اگر معادلات $\frac{x+2}{x-2} - \frac{1}{x} = \frac{2}{x^2 - 2x}$ و $\frac{2k}{x+2} = 6 + kx$ جواب مشترک داشته باشند، مقدار k را بیابید.

۳- هنگامی که دو چاپگر با هم کار می‌کنند، فیش حقوق کارگران یک کارخانه در ۴ ساعت چاپ می‌شود. اگر چاپگر قدیمی به تنهایی برای این کار ۳ ساعت بیشتر نسبت به چاپگر جدید نیاز داشته باشد، در این صورت هر کدام از چاپگرها به تنهایی در چند ساعت این کار را تکمیل می‌کنند؟

۴- در ۲۰۰ کیلوگرم محلول آب نمک ۴ درصدی، چقدر از آب را تبخیر کنیم تا محلول ۷ درصدی داشته باشیم؟

۵- در یک محلول آب نمک، نسبت وزن آب به وزن نمک برابر ۶ است. اگر ۱۵ گرم نمک به این محلول اضافه شود، نسبت وزن آب به وزن محلول $\frac{3}{4}$ خواهد شد. وزن محلول اولیه چقدر بوده است؟

۶- خط یک متروی تهران به طول ۶۰ کیلومتر، میدان تجریش را به فرودگاه بین‌المللی متصل می‌کند. برای انجام یک آزمایش، قطاری مسیر شمال به جنوب این خط را با سرعت ثابت ۷ کیلومتر بر ساعت و بدون توقف در ایستگاه‌ها طی می‌کند. اگر در مسیر جنوب شمال، از سرعت قطار ۱۰ کیلومتر بر ساعت کاسته شود، زمان بازگشت نیم ساعت طولانی‌تر از زمان رفت خواهد شد. مطلوب است محاسبه طول زمان رفت و زمان برگشت این قطار.

۷- روی خط $y = 2x + 1$ ، نقطه‌ای بیابید که فاصله‌ی آن تا نقطه‌ی $A(3, 5)$ برابر ۵ باشد. (تعداد جواب‌ها چندتا است؟)

۸- هر یک از معادله‌های زیر را حل کنید:

$$\sqrt{x+2} + 4 = x \quad \text{الف)} \quad \text{(نهایی - فرداد ۱۴۰۳)}$$

$$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{-x} \quad \text{ب)}$$

$$2x + \sqrt{2x-1} = 1 \quad \text{پ)}$$

$$\sqrt{x-4} + \sqrt{x-4}\sqrt{x-4} = 2 \quad \text{ت)}$$

$$\frac{1}{\sqrt{t-3}} - \frac{2}{\sqrt{t}} = 0 \quad \text{ث)}$$

توجه فرمایید:

اطلاعات و تبلیغ مدرس یا آموزشگاه روی جلد و تمام اطراف این صفحه قابل درج است.



منتخب کتاب:

۱- هر یک از معادلات زیر را حل کنید:

الف) $\frac{2x}{x-3} + \frac{x+1}{x+4} = \frac{x-1}{x-3}$ ب) $\sqrt{x+1} - \sqrt{2x-5} = 1$ پ) $\sqrt{m} + \frac{1}{\sqrt{m}} = 2$

۲- علی به همراه چند نفر از دوستان خود ماهانه یک مجله ادبی ۱۶ صفحه‌ای منتشر می‌کند. پس از حروف چینی مطالب، او معمولاً ۲ ساعت برای ویرایش ادبی مجله وقت صرف می‌کند. اگر رضا به او کمک کند، کار ویرایش حدود ۱ ساعت و ۲۰ دقیقه به طول می‌انجامد. حال اگر رضا بخواهد به تنهایی کار ویرایش یک شماره از مجله را انجام دهد، نیازمند چه میزان وقت خواهد بود؟

۳- الف) عدد صحیحی بیابید که تفاضل آن از جذرش برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟
ب) عدد صحیحی بیابید که تفاضل جذرش از آن عدد برابر نصف آن عدد باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴- معادله‌ای شامل مجموع دو عبارت رادیکالی بنویسید که عدد ۱، یکی از ریشه‌های آن باشد.

۵- اگر یک شیء از بالای ساختمانی به ارتفاع ۵۰ متر سقوط آزاد کند، پس از t ثانیه در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار خواهد داشت به طوری که: $t = \sqrt{10 - \frac{h}{5}}$. این جسم، دو ثانیه پس از سقوط در چه ارتفاعی نسبت به سطح زمین قرار دارد؟

CHALLENGE

چالش (ویژه علاقمندان)

نشان دهید معادله‌ی $\sqrt[4]{x^{10} + 2x^6 - 9x^4 + 2x^3 - 12} + 5\sqrt{x^4 + 3x} = 0$ دقیقاً یک جواب دارد.

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴