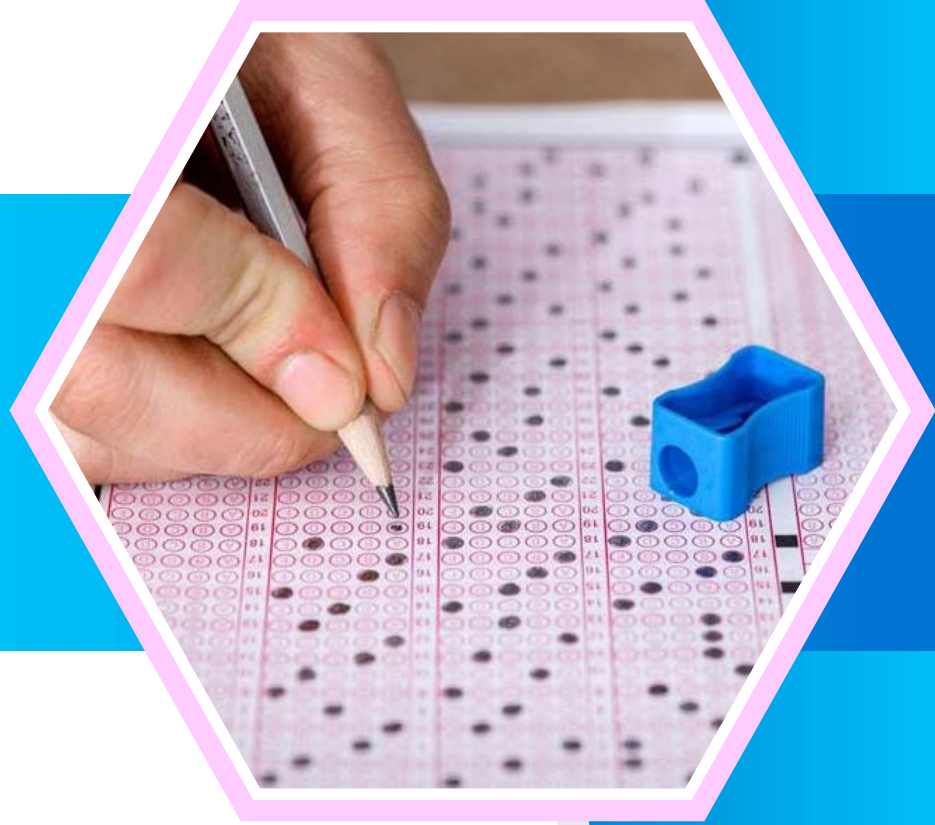


نمونہ نکتہ و تست:

رياضیے یازدهم

Dr. Ali Reza Nooreddiny
PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴



گروه علمی درس آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش آموزان کشور (نهایی ۲۰)



کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه

در ۴ سطح و زمینه گوناگون:

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

۵:

آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

درس آموز؛ (منحصر به فرد)

این مجموعه با ساختار جدید و ارتقای کیفیت ارائه شده است.

جزئیات محتوا

سطح نرمال آموزش کنکور

جهت آمادگی شرکت در آزمون‌ها و کنکور



سطح پیشرفته آموزش

ویژه کسب نمره کامل 100% در آزمون‌ها و کنکور



طرح و تشریح

صدها مثال و تست متوسط، دشوار و دشوارتر



بانک تمرین تست

شامل صدها تست متوسط و دشوار (پاسخ‌نامه تشریحی جداگانه دارد).



آموزش کنکور

(درسنامه ممور)

هسته اصلی این پک آموزشی، یک درسنامه دقیق و مفهومی، نکات و تکنیک‌های سریع با پوشش کامل از ممتوای آموزشی مربوطه است.

پوشش آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها

Up to date

۲	هندسه تملیلی و جبر خطوط در صفحه، معادله درجه دوم، گویا و اصم	۱
۵۶	هندسه ترسیم، تناسب و خواص، استدلال و تشابه در مثلث	۲
۹۵	تابع انواع توابع، ا به ۱ و وارون پذیری، جبر توابع	۳
۱۳۲	مثلثات واحد رادیان، روابط و توابع مثلثاتی	۴

۵	نمایی و لگاریتم توابع نمایی و لگاریتم، خواص، معادلات و کاربرد	۱۵۹
۶	مد و پیوستگی فرآیند حدی، محاسبه حد، پیوستگی توابع	۱۹۳
۷	آمار و احتمال احتمال شرطی، شاخص مرکزی و پراکندگی آماری	۲۳۳



هندسه تحلیلی و جبر

صفحه	فهرست
۳	دستگاه مختصات
۸	معادله ی خط
۲۱	معادلات درجه دوم
۳۱	نمودار تابع درجه دوم
۴۱	معادلات گویا و اصم
۵۰	ویژه صد درصدی ها

اطلاعات ضروری در مورد نقاط در دستگاه مختصات:

ایستگاه ۱: دستگاه مختصات

برای نقاط $A(x_1, y_1)$ و $B(x_p, y_p)$ در صفحه:

- مختصات نقطه‌ی M وسط پاره خط AB :

$$x_M = \frac{x_1 + x_p}{2}, \quad y_M = \frac{y_1 + y_p}{2}$$

- فاصله‌ی دو نقطه فوق، (طول پاره خط AB):

$$AB = \sqrt{(x_p - x_1)^2 + (y_p - y_1)^2}$$

بویژه: فاصله‌ی $A(x_1, y_1)$ تا مبدأ برابر است با:

$$OA = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}$$

کاربرد ساده:

اگر سه رأس مثلث داده شوند، با محاسبه‌ی طول اضلاع، نوع مثلث معلوم می‌شود:

متساوی اضلاع یا متساوی الساقین یا مختلف اضلاع

بعلاوه:

اگر $(a^2 = b^2 + c^2)$ باشد، مثلث قائم الزاویه است. (a ضلع بزرگ‌تر مثلث)

یک نمونه ساده:

در مثلث با رئوس: مبدأ O ، $A(4, 5)$ و $B(2, 1)$ ، طول میانه‌ی OM را حساب می‌کنیم. ابتدا، تعیین مختصات نقطه‌ی M وسط ضلع AB :

$$x_M = \frac{2+4}{2} = 3, \quad y_M = \frac{1+5}{2} = 3 \rightarrow M(3, 3)$$

طول میانه‌ی OM ، همان فاصله‌ی M از نقطه‌ی O (یعنی مبدأ) برابر است با:

$$OM = \sqrt{3^2 + 3^2} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$$

تیب سوالات

اگر $A(4, 4)$ و $B(1, 1)$ دو رأس متقابل یک مربع باشند، مساحت مربع کدام است؟

۱۱ 4

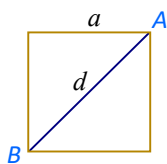
۱۰ 3

۹ 2

۸ 1

گزینه ۲

فاصله‌ی دو رأس متقابل، همان طول قطر مربع است:



$$d = \sqrt{(4-1)^2 + (4-1)^2} = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

چون بین قطر d و ضلع a در مربع، همیشه رابطه‌ی $d = a\sqrt{2}$ وجود دارد، در نتیجه:

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = a^2 = \frac{18}{2} = 9$$

---◇---

◇ دایره‌ای از نقاط $(0,1)$ و $(3,0)$ گذشته و $x = 2 + y$ معادله‌ی قطری از آن است. فاصله‌ی مرکز دایره تا مبدأ کدام است؟

④ $2\sqrt{2}$

③ $2\sqrt{5}$

② $\sqrt{5}$

① $\sqrt{2}$

گزینه ۱

مرکز دایره روی قطر $y = x - 2$ قرار دارد، پس آن را به صورت مجهول $(a, a - 2)$ در نظر می‌گیریم. چون فاصله‌ی مرکز تا نقاط روی دایره برابر است:

$$\sqrt{(a-0)^2 + (a-2-1)^2} = \sqrt{(a-3)^2 + (a-2-0)^2} \rightarrow a^2 + (a-3)^2 = (a-3)^2 + \underbrace{(a-2)^2}_{a^2 - 4a + 4}$$

$$\rightarrow 0 = -4a + 4 \Rightarrow a = 1$$

پس مرکز $(1, -1)$ و فاصله‌اش تا مبدأ برابر $\sqrt{2}$ است.

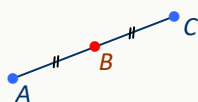
---◇---

استفاده از مختصات وسط پاره‌خط:

ایستگاه ۲: برخی کاربردها

قرینه‌ی نقاط:

اگر C قرینه‌ی A نسبت به نقطه‌ی B باشد:



$$y_B = \frac{y_A + y_C}{2} \text{ و } x_B = \frac{x_A + x_C}{2} \text{ است: چون } B \text{ وسط } AC \text{ است}$$

$$C = (2x_B - x_A, 2y_B - y_A) \text{ با طرفین - وسطین خواهیم داشت:}$$

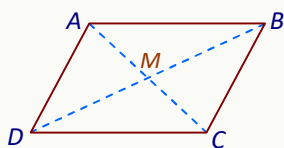
حالت خاص: (قرینه‌ی A نسبت به مبدأ):

$$A' = (2(0) - x_A, 2(0) - y_A) \Rightarrow A' = (-x_A, -y_A) \text{ مختصات قرینه می‌شوند:}$$

رئوس متوازی‌الاضلاع:

چون در متوازی‌الاضلاع، قطرهای یکدیگر را نصف می‌کنند، رابطه‌ی مفیدی

بین مختصات رئوس نوشته می‌شود:



$$\left. \begin{aligned} x_M &= \frac{x_A + x_C}{2} \\ x_M &= \frac{x_B + x_D}{2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow x_A + x_C = x_B + x_D$$

به صورت مشابه داریم:

$$y_A + y_C = y_B + y_D$$

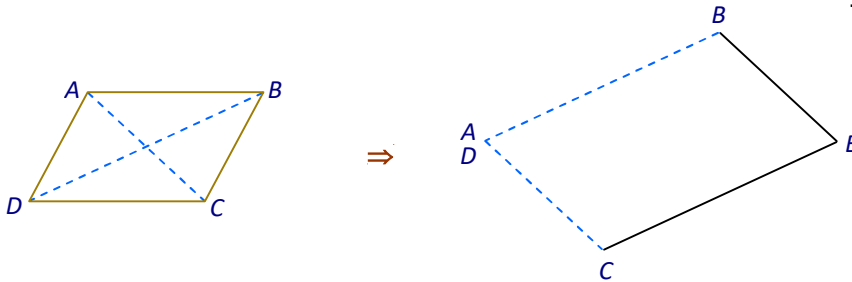
بعلاوه:

الف) نقطه $A = (a, b)$ را در نظر بگیرید: قرینه‌اش نسبت به محور طول: $(a, -b)$ ، قرینه نسبت به محور عرض: $(-a, b)$ ، قرینه نسبت به خط $y = x$: (b, a) و قرینه نسبت به خط $y = -x$: $(-b, -a)$ است. (**دلیل**: نمایش در دستگاه)

ب) چند مطلب ساده‌ی دیگر در مورد متوازی‌الاضلاع:

۱) چهار مثلث حاصل از رسم قطرها در شکل بالا دو به دو هم‌نهشت، ولی مساحت هر چهارتا یکسان است.

۲) اگر قطرها را از یک نقطه رسم کرده و توسط آن‌ها متوازی‌الاضلاعی تشکیل دهیم، مساحت آن دو برابر مساحت متوازی‌الاضلاع اولیه خواهد شد.



توجه کنید:

خواص فوق در مورد مربع، مستطیل و لوزی نیز برقرار است.

قرینه‌ی نقطه‌ی $A(3a+1, a+3)$ نسبت به نقطه‌ی $B(2a, 2-a)$ روی خط $2x - 3y = 6$ قرار دارد. طول AB کدام است؟

۴ $\sqrt{34}$

۳ $\sqrt{13}$

۲ ۵

۱ ۴

گزینه ۳

تعیین مختصات نقطه‌ی قرینه:

$$A' = (2(2a) - (3a+1), 2(2-a) - (a+3)) = (a-1, -3a+1)$$

جایگذاری در معادله‌ی خط:

$$2(a-1) - 3(-3a+1) = 6 \rightarrow 11a - 5 = 6 \Rightarrow a = 1$$

بنابراین $A(4, 4)$ و $B(2, 1)$ بوده و:

$$AB = \sqrt{(2-4)^2 + (1-4)^2} = \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

نقاط $A(-3, 2)$ و $B(-1, 2)$ دو رأس متوازی‌الاضلاع $ABCD$ بوده و $M(1, -1)$ محل برخورد قطرهای آن است. طول ضلع AD کدام است؟

۴ $3\sqrt{6}$

۳ $\sqrt{6}$

۲ $6\sqrt{2}$

۱ $\sqrt{2}$

گزینه ۲

به شکل متوازی‌الاضلاع بالا نگاه کنید؛

چون نقطه‌ی M وسط پاره‌خط BD است، مختصات D تعیین می‌شود:

$$x_M = \frac{x_B + x_D}{2} \rightarrow 1 = \frac{-1 + x_D}{2} \rightarrow -1 + x_D = 2 \rightarrow x_D = 3$$

$$y_M = \frac{y_B + y_D}{2} \rightarrow -1 = \frac{2 + y_D}{2} \rightarrow 2 + y_D = -2 \rightarrow y_D = -4$$

اکنون طول ضلع AD قابل محاسبه است:

$$AD = \sqrt{(3 - (-3))^2 + (-4 - 2)^2} = \sqrt{36 + 36} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

❓ دو انتهای یکی از قطرهای مستطیلی $A(1, 7)$ و $C(-4, 19)$ هستند. اگر زاویه‌ی بین دو قطر 30° باشد، مساحت مستطیل کدام است؟

④ $\frac{169\sqrt{3}}{4}$

③ $\frac{169}{2}$

② 169

① $\frac{169}{4}$

گزینه ۱

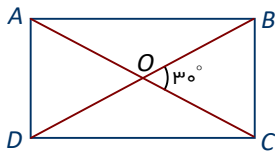
می‌دانیم قطرها برابرند و یکدیگر را نصف می‌کنند.

$$AC = \sqrt{(-4-1)^2 + (19-7)^2} = \sqrt{25 + 144} = 13 \Rightarrow OC = \frac{13}{2}, OB = \frac{13}{2}$$

با توجه به این که قطرها، چهار مثلث هم مساحت می‌سازند:

$$S_{\triangle OBC} = \frac{1}{2} \times OB \times OC \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{13}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{169}{16}$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = 4 \times \frac{169}{16} = \frac{169}{4}$$



روش دوم:

فرض کنید توسط قطرها یک متوازی‌الاضلاع به مساحت S ساخته‌ایم. طبق خواص گفته شده‌ی بالا:

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2} S = \frac{1}{2} AC \times DB \times \sin 30^\circ = \frac{1}{2} \times 13 \times 13 \times \frac{1}{2} = \frac{169}{4}$$

تمرین تست (۱)



۱- نقاط $A(1, 2)$ ، $B(2, -1)$ و $C(-1, -1)$ رأس‌های مثلث ABC هستند. نوع این مثلث کدام است؟

④ هیچکدام

③ قائم الزاویه

② متساوی الساقین

① متساوی الاضلاع

۲- اگر نقاط $A(3, 1)$ و $B(3, -3)$ دو انتهای قطر بزرگ یک لوزی باشند و قطر کوچک آن نصف قطر بزرگ آن باشد، مساحت لوزی کدام است؟

④ 12

③ 2

② 8

① 4

۳- مرکز کوچک‌ترین دایره‌ای که از نقاط $A(a+1, -2a)$ و $B(a-3, 2)$ عبور می‌کند، روی نیمساز نواحی اول و سوم واقع است. شعاع دایره کدام است؟

④ 2

③ $2\sqrt{2}$

② $4\sqrt{2}$

① 4

۴- اگر $A(2,2)$ ، $B(6,2)$ و $C(10,8)$ سه رأس یک متوازی الاضلاع باشند، کدام نقطه نمی‌تواند محل تقاطع قطرهای این متوازی الاضلاع باشد؟

- ① $(4,2)$ ② $(6,5)$ ③ $(8,5)$ ④ $(6,4)$

۵- مرکز دایره به مختصات (α, β) روی خط $y - 2x = 0$ قرار داشته و این دایره از مبدأ مختصات می‌گذرد. اگر مساحت دایره 20π باشد، حاصل $\alpha + 2\beta$ کدام می‌تواند باشد؟

- ① ۸ ② ۶ ③ -۶ ④ ۱۰

۶- اگر قرینه‌ی نقطه‌ی A نسبت به مبدأ مختصات $(-1,4)$ باشد، قرینه‌ی $P(3,-2)$ نسبت به A کدام است؟

- ① $(-1,6)$ ② $(-1,-6)$ ③ $(1,6)$ ④ $(1,-6)$

۷- قرینه‌ی نقطه‌ی دلخواه A نسبت به نیمساز ربع دوم و چهارم را نسبت به خط $y = x$ تقارن می‌دهیم. نقطه‌ی حاصل چگونه است؟

- ① قرینه A نسبت به مبدأ
 ② قرینه A نسبت به محور طول
 ③ قرینه A نسبت به محور عرض
 ④ خود A

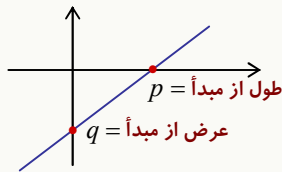
ساده‌ترین معادله در صفحه:

ایستگاه ۱: معادله خط

معادله‌ی یک خط بر حسب x و y درجه اول است و دو شکل مرتب $ax + by + c = 0$ (یا $y = mx + h$) دارد.

بعلاوه:

دو مفهوم ساده در مورد نمودار خط:



❖ «طول از مبدأ»: طول نقطه‌ی برخورد خط با محور x ها. (برای تعیین p ، در معادله، $y = 0$ را قرار دهید.)

❖ «عرض از مبدأ»: عرض نقطه‌ی برخورد خط با محور y ها. (برای تعیین q ، در معادله، $x = 0$ را قرار دهید.)

(توجه: طبق شکل، مساحت مثلثی که توسط خط و محورها ساخته می‌شود: $S = \frac{1}{2} |pq|$)

بعلاوه:

هر خط از بی‌شمار نقطه تشکیل شده و برای تعیین نقطه‌ای از آن کافی است:

- به x یا y عدد دلخواهی نسبت دهیم.
- با جایگذاری آن در معادله، برای متغیر دوم مقداری به دست آوریم.

رسم خط:

کافی است دو نقطه‌ی دلخواه از آن را مشخص کرده و سپس خط گذرا از آن دو را رسم کنید.

تیب سوالات

❖ نقاط $A(5, 2)$ و $B(-1, 4)$ داده شده‌اند. به ازای کدام مقدار a خط به معادله $y = ax + 7$ از وسط AB می‌گذرد؟

۲ ④

۱ ③

-۱ ②

-۲ ①

گزینه ۱

مختصات وسط AB به صورت $M = (2, 3)$ است و باید در معادله‌ی خط صدق کند:

$$3 = a(2) + 7 \rightarrow 2a = -4 \Rightarrow a = -2$$

--- ❖ ---

❖ مساحت مثلثی که خط $x - 2y = 5$ با محورهای مختصات تشکیل می‌دهد، کدام است؟

 $\frac{25}{2}$ ④

 $\frac{25}{4}$ ③

 $\frac{5}{4}$ ②

۵ ①

گزینه ۲

عرض و طول از مبدأ را حساب می‌کنیم:

$$x=0 \rightarrow -2y=5 \Rightarrow q=-\frac{5}{2} \quad \text{و} \quad y=0 \rightarrow x=5 \Rightarrow p=5$$

در نتیجه:

$$S = \frac{1}{2} |pq| = \frac{1}{2} |5 \times (-\frac{5}{2})| = \frac{25}{4}$$

مفهومی مهم در مورد خط‌ها:

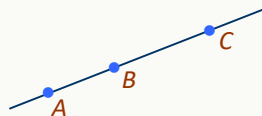
ایستگاه ۲: شیب خط

«شیب» خطی که از دو نقطه‌ی (x_1, y_1) و (x_2, y_2) عبور کند:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad (x_1 \neq x_2)$$

یک کاربرد:

شرط آن که سه نقطه‌ی $A(x_1, y_1)$ ، $B(x_2, y_2)$ و $C(x_3, y_3)$ در یک امتداد (روی یک خط راست) باشند، آن است که:



$$m_{AB} = m_{BC} \Rightarrow \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y_3 - y_2}{x_3 - x_2}$$

تعیین شیب از معادله:

خط را به صورت مرتب $y = mx + h$ با ضریب $+1$ در یک طرف نوشته و سپس:

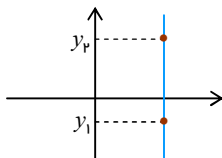
- شیب آن ضریب x ، یعنی عدد m است.

- عدد h عرض از مبدأ خط است.

به موارد ساده‌ی زیر توجه داشته باشید:

- اگر طول دو نقطه برابر باشد، یعنی: $x_1 = x_2$ ، شیب $m = \frac{y_2 - y_1}{0}$ تعریف نشده است. این حالت فقط در مورد خط-

های عمودی اتفاق می‌افتد:

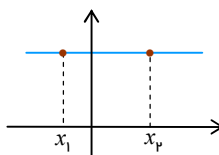


پس:

برای خط‌های عمودی، شیب تعریف نشده است.

- اگر عرض‌های دو نقطه برابر باشند، یعنی: $y_1 = y_2$ ، آنگاه شیب $m = \frac{0}{x_2 - x_1} = 0$ است. این حالت فقط در مورد خط-

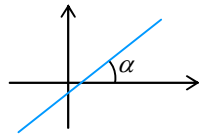
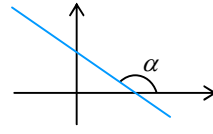
های افقی اتفاق می‌افتد:



پس:

شیب هر خط افقی برابر صفر است.

شیب خط، دقیقاً تانژانت زاویه‌ی بین خط با جهت مثبت محور طول است:

 $m = \tan \alpha$ شیب مثبت $m = \tan \alpha$ شیب منفی

تیب سوالات

❓ دو نقطه با مختصات $(-\frac{1}{3}, b)$ و $(-\frac{1}{2}, a)$ دو رأس مجاور یک مربع بوده و روی خط Δ قرار دارند. اگر شیب خط Δ

برابر $\sqrt{3}$ باشد، طول قطر این مربع کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

4 $\frac{\sqrt{3}}{2}$

3 $\frac{\sqrt{2}}{2}$

2 $\frac{\sqrt{2}}{3}$

1 $\frac{\sqrt{3}}{3}$

گزینه ۲ ✓

با توجه به شیب خط، داریم: $(\frac{b-a}{-\frac{1}{3} + \frac{1}{2}} = \sqrt{3} \Rightarrow b-a = \frac{\sqrt{3}}{6})$. محاسبه‌ی طول ضلع مربع:

$$\sqrt{(-\frac{1}{3} + \frac{1}{2})^2 + (b-a)^2} = \sqrt{\frac{1}{36} + \frac{3}{36}} = \sqrt{\frac{4}{36}} = \frac{1}{3}$$

طول قطر طبق رابطه‌ی $d = a\sqrt{2}$ برابر $\frac{\sqrt{2}}{3}$ می‌باشد.

❓ شیب کدام خط از بقیه بیشتر است؟

1 $4x - 3y = 1$

2 گذرا از نقاط $(-1, 3)$ و $(1, 2)$

3 با محور طول زاویه‌ی 60° تشکیل دهد.

4 طول از مبدأ ۱ و عرض از مبدأ ۲ داشته باشد.

گزینه ۳ ✓

باید شیب هر کدام از خطها معلوم گردد:

$3y = 4x - 1 \xrightarrow{\div 3} y = \frac{4}{3}x - \frac{1}{3} \Rightarrow m = \frac{4}{3} \cong 1/3$

مورد اول:

$m = \frac{3-2}{-1-1} = -\frac{1}{2}$

مورد دوم:

$m = \tan 60^\circ = \sqrt{3} \cong 1/7$

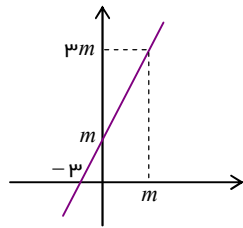
مورد سوم:

$m = \frac{2-0}{0-1} = -2$

مورد چهارم: خط از نقاط $(1, 0)$ و $(0, 2)$ می‌گذرد و بنابراین:



در شکل مقابل، مقدار m کدام است؟



- ۱ ۶
- ۲ ۵
- ۳ ۰
- ۴ ۳

گزینه ۱

با توجه به سه نقطه $(-۳, ۰)$ و $(۰, m)$ و $(m, ۳m)$ که روی یک خط هستند:

$$\frac{۳m - ۰}{m - (-۳)} = \frac{m - ۰}{۰ - (-۳)} \rightarrow ۹m = m^2 + ۳m \rightarrow m^2 - ۶m = 0 \Rightarrow m = ۰, m = ۶$$

طبق شکل باید $m > ۰$ باشد.



ایستگاه ۳: نوشتن معادله

اطلاعات لازم برای نوشتن معادله‌ی یک خط:

«مختصات یک نقطه روی آن» و «شیب»

اگر نقطه روی خط (x_1, y_1) و شیب m باشد، معادله:

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

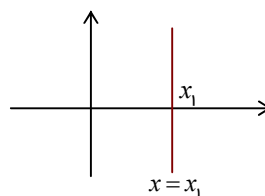
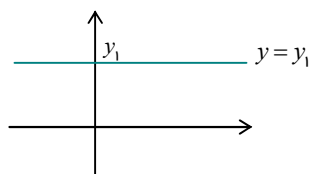
بعلاوه:

اگر خط از نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) بگذرد، معادله آن را می‌توان یکباره نیز نوشت:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

حالت‌های خاص:

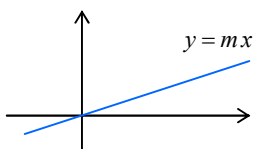
- معادله‌ی خط عمود گذرنده از (x_1, y_1) به صورت $x = x_1$ و معادله‌ی خط افقی گذرنده از (x_1, y_1) به صورت $y = y_1$ است.



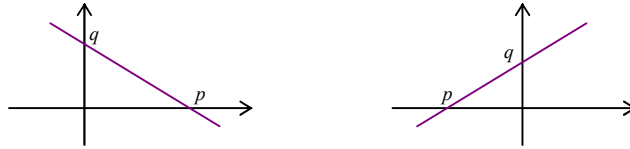
بویژه:

خط $x = ۰$ ، محور y ها و خط $y = ۰$ ، معادله‌ی محور x ها است.

- معادله‌ی خط با شیب m که از مبدأ عبور کند به صورت $y = mx$ است.



▪ معادله‌ی خطی که از نقاط $(p, 0)$ و $(0, q)$ عبور کند به صورت $\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$ است.



▪ معادله‌ی نیمساز ربع‌های اول و سوم به صورت $y = x$ و معادله‌ی نیمساز ربع‌های دوم و چهارم $y = -x$ است.

تیب سوالات

❖ در خطی با طول از مبدأ ۳ و عرض از مبدأ -۱، عرض نقطه‌ی به طول ۶ روی آن خط کدام است؟

۳ ④

-۱ ③

۲ ②

۱ ①

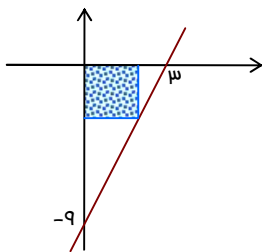
گزینه ۱ ✓

طبق مطلب قبل، معادله‌ی خط به صورت $\frac{x}{۳} + \frac{y}{-۱} = ۱$ است و در نتیجه:

$$x = ۶: \frac{۶}{۳} - y = ۱ \Rightarrow y = ۱$$

--- ❖ ---

❖ در شکل مقابل، قطر مربع هاشور خورده کدام است؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۳)



۳ / ۵√۲ ②

۹ / √۲ ①

۲ / ۵√۲ ④

۹ / ۲√۲ ③

گزینه ۳ ✓

رأس مربع روی خط (به معادله: $\frac{x}{۳} + \frac{y}{-۹} = ۱$ یا: $y = ۳x - ۹$) را $(t, -t)$ می‌گیریم. پس:

$$-t = 3t - 9 \rightarrow t = \frac{9}{4} \xrightarrow{d = a\sqrt{2}} d = \frac{9}{4} \sqrt{2} = \frac{9}{2\sqrt{2}} \quad (t \text{ طول ضلع مربع است.})$$

--- ❖ ---

❖ قرینه‌ی خط $۳y - ۲x = ۴$ را نسبت به خط $y = x$ ، خط d می‌نامیم. عرض از مبدأ خط d کدام است؟ (کنکور ۹۷)

۲ ④

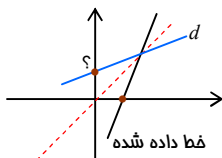
۱ ③

-۱ ②

-۲ ①

گزینه ۱ ✓

روش اول: کافی است به شکل عمل انجام شده در تست نگاه کنید:



می‌بینید که:

عرض از مبدأ خط حاصل، همان طول از مبدأ خطی است که نسبت به نیمساز قرینه می‌شود:

$$y = 0: \quad 0 - 2x = 4 \Rightarrow x = -2$$

روش دوم: با توجه به روش قرینه سازی نسبت به خط $y = x$ ، کافی است x و y جابه‌جا شوند:

$$3x - 2y = 4 \xrightarrow{x=0} y = -2$$

---◇---

ایستگاه ۴: مقایسه خطها

دو خط به شکل مرتب $y = mx + h$ و $y = m'x + h'$:

◆ موازی‌اند، هرگاه $m = m'$ ؛ (برابری شیب‌ها)

◆ بر هم عمودند، هرگاه $m' = -\frac{1}{m}$ ؛ یعنی: شیب‌ها قرینه و وارون باشند. ($m \times m' = -1$)

«اگر دو خط موازی نباشند، متقاطع‌اند و نقطه برخوردشان، از تشکیل دستگاه و حل آن مشخص می‌شود.»

بعلاوه:

اگر دو خط به صورت $ax + by + c = 0$ و $a'x + b'y + c' = 0$ نوشته شوند، آنگاه:

▪ موازی‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'}$ و در غیر این صورت متقاطع‌اند.

▪ در حالت موازی، دو خط بر هم منطبق‌اند، هرگاه: $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$.

▪ بر هم عمودند، هرگاه: $aa' + bb' = 0$.

تذکر:

بسیاری مواقع، مختصات رأسی از یک چندضلعی یا معادله برخی اضلاع داده می‌شود. چند کار مفید:

(۱) اگر نقطه و خط داده شدند، چک کنید نقطه روی خط است یا خیر؟

(۲) اگر معادله‌ی دو ضلع داده شده، موازی یا متقاطع بودن آن‌ها را چک کنید. (مختصات نقطه برخورد معمولاً لازم می‌شود).

(۳) بر حسب اطلاعات حاصل شده، یک شکل مناسب (تقریبی) رسم کنید.

تیپ سوالات

◇ به ازای کدام مقدار m دستگاه معادلات $\begin{cases} mx + y = m - 1 \\ 3x + (m - 2)y = 4 - 2m \end{cases}$ دارای بی‌شمار جواب است؟ (کنکور ۹۳)

④ هیچ مقدار m

③ ۳

② -۲

① -۱

گزینه ۱ ✓

دستگاه وقتی بی‌شمار جواب دارد که خط‌های متناظر بر هم منطبق باشند:

$$\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2} = \frac{m-1}{4-2m}$$

از حل معادله $\frac{m}{3} = \frac{1}{m-2}$ مقادیر $m = 3$ و $m = -1$ به دست می‌آیند. هر مقداری که شرط بالا را به صورت کامل برقرار سازد، جواب مسأله است:

$$m = -1: \frac{-1}{3} = \frac{1}{-1-2} = \frac{-1-1}{4+2} \quad \text{و} \quad m = 3: \frac{3}{3} = \frac{1}{3-2} \neq \frac{3-1}{4-6}$$

بنابراین فقط عدد -1 قابل قبول است.

---◇---

◇ دو ضلع OC و OA از متوازی‌الاضلاع $OABC$ به ترتیب روی محور x ها و نیمساز ربع اول واقع‌اند و مختصات رأس B به صورت $B(3, 2)$ است. مجموع طول و عرض رأس C کدام است؟

۴ ④

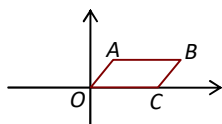
۳ ③

۱ ②

۲ ①

گزینه ۲ ✓

با توجه به شکل تقریبی، ضلع BC موازی نیمساز $y = x$ ، دارای شیب $m = 1$ است و معادله آن:



$$y - 2 = 1(x - 3) \rightarrow y = x - 1$$

در این خط قرار می‌دهیم: $y = 0$ تا مختصات C مشخص گردد:

$$0 = x - 1 \rightarrow x = 1 \Rightarrow C(1, 0)$$

---◇---

◇ نقاط $A(2, 0)$ و $C(0, -1)$ دو رأس یک مربع و روی یک قطر هستند. کدام نقطه یک رأس مربع روی قطر دیگر است؟

(نوبت ۱ - کنکور ۱۴۰۳)

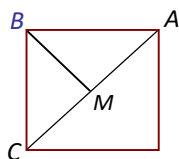
$(\frac{5}{4}, \frac{1}{4})$ ④

$(\frac{3}{4}, -\frac{5}{4})$ ③

$(\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$ ②

$(0, \frac{3}{2})$ ①

گزینه ۲ ✓



به سادگی داریم: $m_{AC} = \frac{1}{2}$ ، $AC = \sqrt{5}$ و نقطه‌ی وسط AC به صورت $M(1, -\frac{1}{2})$ است.

چون $BM \perp AC$ است، $m_{BM} = -1 \div (\frac{1}{2}) = -2$ معادله BM :

$$y + \frac{1}{2} = -2(x - 1) \Rightarrow y = -2x + \frac{3}{2}$$

B را به صورت مجهول $(x, -2x + \frac{3}{2})$ گرفته و کافی است طول BM برابر نصف قطر باشد:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (-2x+\frac{3}{2})^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} \rightarrow \underbrace{(x-1)^2 + 4(x-1)^2}_{5(x-1)^2} = \frac{5}{4} \rightarrow x-1 = \pm \frac{1}{2} \rightarrow \begin{cases} x = \frac{3}{2} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

---◇---

◇ دایره به مرکز $O(2, -3)$ مفروض است. از نقطه‌ی $A(8, -5)$ واقع بر محیط دایره، خط d را مماس بر دایره رسم می-

کنیم. این خط محور x را در کدام نقطه قطع می‌کند؟

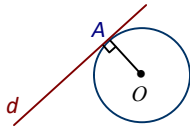
$(\frac{19}{3}, 0)$ ④

$(\frac{29}{3}, 0)$ ③

$(-\frac{29}{3}, 0)$ ②

$(-\frac{19}{3}, 0)$ ①

گزینه ۳

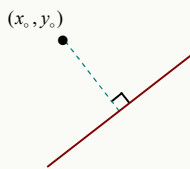
می‌دانیم خط مماس باید بر شعاع OA عمود باشد:

$$m_{OA} = \frac{-5+3}{8-2} = -\frac{1}{3} \Rightarrow m_d = 3$$

اکنون معادله‌ی خط d نوشته شده و تقاطع مورد نظر تعیین می‌شود:

$$y - (-5) = 3(x - 8) \xrightarrow{y=0} 5 = 3x - 24 \Rightarrow x = \frac{29}{3}$$

ایستگاه ۵: فاصله تا خط

۱) فاصله‌ی نقطه‌ی (x_0, y_0) از خط به شکل مرتب $ax + by + c = 0$:

$$\frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (\text{صورت کسر: نقطه در معادله خط جایگزین شده})$$

حالت خاص:

$$\frac{|c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط فوق}$$

۲) فاصله‌ی دو خط موازی:

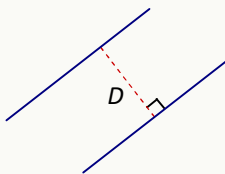
هر یک از روش‌های زیر برای محاسبه D قابل استفاده است:

می‌توان معادله‌ها را به صورت مشابه $ax + by + c = 0$ و $ax + by + c' = 0$ نوشت.

$$D = \frac{|c - c'|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{در این حالت}$$

می‌توان معادله‌ها را به صورت مشابه $y = mx + h$ و $y = mx + h'$ نوشت.

$$D = \frac{|h - h'|}{\sqrt{1 + m^2}} \quad \text{در این حالت}$$



روش دیگر: (فاصله‌ی دو خط موازی)

نقطه‌ای دلخواه روی یکی از خط‌ها انتخاب کرده و فاصله‌اش تا خط دیگر را حساب کنید.

توجه کنید:

بیشترین کاربرد موارد بالا: «ابعاد و بویژه ارتفاع مثلث»، «ابعاد مربع یا مستطیل» و «شعاع دایره». وقتی معادله یک خط مماس بر آن داده شده است.

تیب سوالات

نقطه‌ی $A(2, 3)$ رأس مربعی است که خط $2x + y - 2 = 0$ یک قطر آن می‌باشد. مساحت مربع کدام است؟

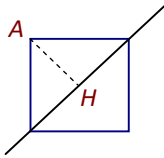
۲۰ ④

۱۰ ③

۵/۲ ②

۲۵ ①

گزینه ۳



با توجه به شکل، فاصله نقطه A از قطر مربع، نصف طول قطر را به دست می‌دهد:

$$AH = \frac{|2(2) + 3 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

پس قطر مربع $d = 2\sqrt{5}$ است. بین طول ضلع و قطر مربع رابطه‌ی $d = a\sqrt{2}$ برقرار است و در نتیجه طول ضلع مربع

$$a = \frac{d}{\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$$

$$S = a^2 = \left(\frac{2\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{4 \times 5}{2} = 10$$

توجه: مساحت مربع بر حسب قطر مستقیماً از رابطه‌ی $S = \frac{d^2}{2}$ حاصل می‌شود.

سه ضلع یک مثلث به معادلات $AB: y + 2x = 7$ ، $AC: 4y - 3x = 17$ و $BC: 2y - 7x = -19$ هستند. طول

ارتفاع BH کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

۳ 4

۲/۵ 3

۴/۴ 2

۱ 1

گزینه ۲

نقطه‌ی B از تقاطع AB و BC تعیین می‌شود:

$$\begin{cases} y + 2x = 7 \\ 2y - 7x = -19 \end{cases} \rightarrow x = 3, y = 1 \Rightarrow B(3, 1)$$

پاسخ، فاصله‌ی B تا خط AC است:

$$BH = \frac{|4(1) - 3(3) - 17|}{\sqrt{(4)^2 + (-3)^2}} = \frac{|-22|}{\sqrt{25}} = \frac{22}{5} = 4\frac{2}{5}$$

دایره‌ی به مرکز (۲، ۱) بر دو خط $3x + 4y = 5$ و $12y - 5x = a$ مماس است. مقادیر ممکن برای a کدام اند؟

-۱ و -۳ 4

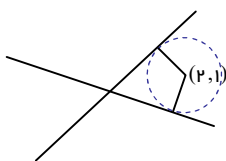
۱۵ و -۱۱ 3

۱ و ۳ 2

-۱۵ و ۱۱ 1

گزینه ۳

فاصله‌ی مرکز تا دو خط $3x + 4y - 5 = 0$ و $5x + 12y - a = 0$ برابر شعاع بوده و لازم است برابر باشند:



$$\frac{|3(2) + 4(1) - 5|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{|-5(2) + 12(1) - a|}{\sqrt{(-5)^2 + 12^2}} \rightarrow \frac{5}{5} = \frac{|2-a|}{13} \rightarrow |2-a| = 13$$

$$\rightarrow 2-a = \pm 13 \Rightarrow \begin{cases} a = 15 \\ a = -11 \end{cases}$$

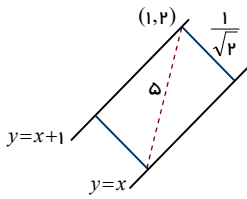
❖ دو ضلع مقابل به هم یک مستطیل روی خطوط به معادله‌ی $y - ax = 1$ و $ay - x = a - 1$ واقع هستند. اگر قطر مستطیل برابر ۵ و نقطه‌ی $(1, 2)$ یک رأس مستطیل باشد، مساحت مستطیل کدام است؟ (نوبت ۱ - کنکور ۱۴۰۲)

- ① ۲/۵ ② ۳/۵ ③ $\sqrt{۴۶}$ ④ $۲\sqrt{۳۴}$

گزینه ۲

شیب خطها باید برابر باشد:

$$(y = ax + 1, \quad ay = x + a - 1 \xrightarrow{\div a} y = \frac{1}{a}x + 1 - \frac{1}{a}) \rightarrow a = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \pm 1$$



برای $a = 1$ ضلعها به صورت $y = x + 1$ و $y = x$ بوده و رأس $(1, 2)$ فقط در این حالت روی ضلع اول قرار دارد. فاصله‌ی این دو خط یکی از اضلاع مستطیل را مشخص می‌کند:

$$y = x, \quad y = x + 1 \Rightarrow \frac{|1 - 0|}{\sqrt{1 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

تعیین طول ضلع دیگر توسط رابطه‌ی فیثاغورس و سپس محاسبه‌ی مساحت:

$$x^2 + \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 5^2 \rightarrow x = \sqrt{25 - \frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{49}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} \Rightarrow S = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7}{2} = ۳/۵$$

--- ❖ ---

تمرین تست (۲)



۱- اگر خط به معادله‌ی $y = (2m - n)x + n + 1$ از نقاط $A(1, 2)$ و $B(-3, 0)$ بگذرد، شیب خط به معادله‌ی $ny + 2mx + 1 = 0$ کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ -۲ ④ ۲

۲- مساحت ناحیه‌ی محدود به محور x ها و نیمساز ناحیه‌ی سوم و خط به معادله‌ی $y = 2(x + 3)$ کدام است؟

- ① ۶ ② ۸ ③ ۹ ④ ۱۲

۳- خط گذرنده از نقطه‌ی $(-1, 2)$ و عمود بر خط $2y + x = 0$ محور x ها را با کدام طول قطع می‌کند؟

- ① ۴ ② ۲ ③ -۲ ④ -۴

۴- سه خط $\begin{cases} x + y = 7 \\ 2x - 4y + 10 = 0 \\ (k + 1)x - ky = 0 \end{cases}$ در یک نقطه متقاربانند، (یعنی هر سه در یک نقطه با هم برخورد می‌کنند). k کدام است؟

- ① ۳ ② ۴ ③ ۵ ④ ۶

۵- اگر سه نقطه‌ی $(m, 2)$ ، $(0, m)$ و $(-1, 0)$ روی یک خط راست باشند، مقدار m کدام است؟

- ① -۱ ② ۲ و -۱ ③ ۱ و -۲ ④ ۲

۶- هرگاه $A(2, -2)$ و $C(3, 2)$ دو رأس مربع $ABCD$ باشند، معادله‌ی قطر BD کدام است؟

- ① $y = -x + \frac{5}{8}$ ② $y = -\frac{1}{4}x + \frac{5}{8}$ ③ $y = \frac{1}{4}x + \frac{5}{8}$ ④ $y = x + \frac{5}{8}$

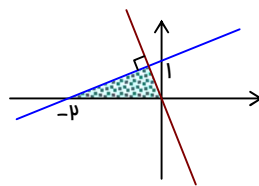
۷- معادله‌ی عمود منصف پاره‌خط AB که در آن $A(-a, b)$ و $B(b, 0)$ هستند، به صورت $y = 3x + 4$ است. فاصله‌ی مبدأ مختصات از A کدام است؟

- ① $\sqrt{2}$ ② $2\sqrt{2}$ ③ $\sqrt{5}$ ④ $2\sqrt{5}$

۸- دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-1)x + y = m-2 \\ 4x + (m-1)y = 2 \end{cases}$ فاقد جواب است. خط $(m-2)x + my = 3$ بر کدام خط زیر عمود است؟

- ① $2y - 3 = 6x$ ② $2x - 4 = 6y$ ③ $y - 5 = 3x$ ④ $y + \frac{1}{3}x = -1$

۹- مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار در شکل مقابل کدام است؟



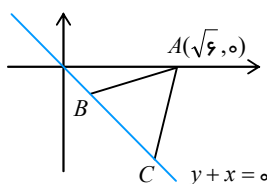
- ① $0/6$ ② $0/8$ ③ 1 ④ $1/2$

۱۰- فاصله‌ی مبدأ مختصات از خط به معادله‌ی $2y = mx + b$ گذرنده بر نقطه‌ی $(1, 2)$ برابر یک است. m کدام است؟

- ① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ $-\frac{2}{3}$ ④ $-\frac{3}{2}$

۱۱- دو نقطه روی خط $2x + y = 1$ وجود دارند که از خط گذرا بر نقطه‌ی $(1, 2)$ و دارای شیب 2 ، به فاصله‌ی $\sqrt{5}$ هستند. فاصله‌ی این دو نقطه کدام است؟

- ① 4 ② $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{5}}{2}$ ④ 5



۱۲- اگر مثلث ABC در شکل روبه‌رو متساوی‌الاضلاع باشد، مساحت آن کدام است؟

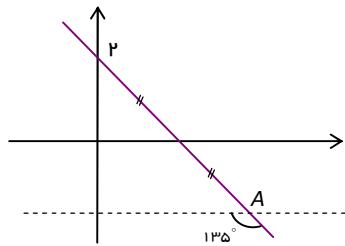
- ① 9 ② $2\sqrt{3}$ ③ $\sqrt{3}$ ④ 3

۱۳- نقطه $(-6, 3)$ یک رأس متوازی‌الاضلاعی است که دو ضلع آن روی خطوط $x - 3y = 4$ و $x + 4y = -3$ هستند. بیشترین فاصله وسط قطر از اضلاع کدام است؟

- ① $\frac{19}{2\sqrt{10}}$ ② $\frac{19}{\sqrt{10}}$ ③ $\frac{\sqrt{65}}{\sqrt{2}}$ ④ $\frac{\sqrt{65}}{2}$

۱۴- دو خط $3x - 4y = 1$ و $2by + x = 3b + 1$ موازی‌اند. مجذور فاصله‌ی دو خط کدام است؟

- ① $0/16$ ② $0/25$ ③ $0/64$ ④ $1/44$



۱۵- در شکل مقابل، فاصله‌ی نقطه‌ی A از مبدأ مختصات کدام است؟

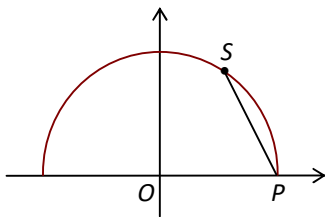
(نوبت ۱- ریاضی ۱۴۰۳)

۲ $3\sqrt{6}$

۱ $2\sqrt{5}$

۴ $5\sqrt{2}$

۳ $4\sqrt{3}$



۱۶- نقطه $S(a, 3)$ روی نیم‌دایره شکل زیر داده شده است. اگر طول وتر

PS برابر شعاع نیم‌دایره باشد، مقدار a کدام است؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۴)

۲ $\frac{\sqrt{3}}{2}$

۱ $\frac{1}{2}$

۴ $\sqrt{3}$

۳ ۱

۱۷- دو خط با عرض از مبدأهای ۲ و -۱ هر دو با جهت مثبت محور طول زاویه‌ی 30° درجه می‌سازند. فاصله‌ی بین این دو خط کدام است؟

۴ $\frac{3}{2}$

۳ $3\sqrt{3}$

۲ $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

۱ ۳

۱۸- دو ضلع مستطیلی منطبق بر دو خط $2y+x=6$ و $2x-y=7$ و یک رأس آن نقطه‌ی $A(8, 5)$ است. مساحت مستطیل کدام است؟

۴ $7/2$

۳ $12/8$

۲ $11/4$

۱ $9/6$

۱۹- نقطه‌ی $A(7, 6)$ رأس یک متوازی‌الاضلاع است که دو ضلع آن منطبق بر دو خط $2y-3x=11$ و $3y+4x=8$ هستند. مختصات وسط یک قطر آن کدام است؟

۴ $(3, 5)$

۳ $(4, 3)$

۲ $(1, 5)$

۱ $(3, 4)$

۲۰- در مثلث با رأس‌های $A(-1, 2)$ ، $B(3, 0)$ و $C(1, -2)$ ، طول ارتفاع AH کدام است؟

۴ $3\sqrt{2}$

۳ $2\sqrt{3}$

۲ $3\sqrt{21}$

۱ ۳

۲۱- مساحت متوازی‌الاضلاع $ABCD$ که سه رأس آن $A(1, 5)$ ، $B(7, 3)$ و $C(2, -2)$ باشند، کدام است؟

۴ ۲۰

۳ $20\sqrt{2}$

۲ $40\sqrt{2}$

۱ ۴۰

۲۲- در مثلثی معادله‌ی سه ضلع AB ، AC و BC به ترتیب $y=2x$ ، $y=-4x+12$ و $y=\frac{1}{2}x-4$ است. اگر معادله‌ی

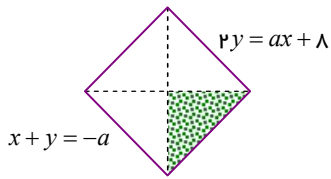
ارتفاع وارد بر BC به صورت $ax+by+c=0$ باشد، نسبت a به c کدام است؟

۴ $-\frac{1}{2}$

۳ $-\frac{1}{4}$

۲ $-\frac{1}{6}$

۱ $-\frac{1}{10}$



۲۳- در مربع شکل روبه‌رو، مساحت ناحیه‌ی سایه‌دار کدام است؟

۱ ۲

۲ ۱

$\frac{1}{4}$ ۴

$\frac{1}{2}$ ۳

۲۴- نقطه‌ی C قرینه‌ی $A(a, 4)$ نسبت به $B(2, -1)$ است و فاصله‌ی C از خط $x + 2y = 3$ برابر $\frac{\sqrt{5}}{5}$ است. مجموع

مقادیر ممکن برای a کدام است؟

-۱۰ ۴

-۲۲ ۳

-۲ ۲

۲ ۱

یادآوری:

معادله درجه دوم پس از ساده شدن به شکل $ax^2 + bx + c = 0$ با شرط $(a \neq 0)$ است؛ جوابها بر حسب $\Delta = b^2 - 4ac$:

♦ اگر $\Delta > 0$ باشد، معادله دو ریشهی مختلف (متمايز) α و β دارد که عبارتند از:

$$\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} \quad \text{و} \quad \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

♦ اگر $\Delta = 0$ باشد، معادله دو ریشهی مضاعف (برابر) دارد که عبارتند از:

$$\alpha = \beta = -\frac{b}{2a}$$

♦ اگر $\Delta < 0$ باشد، معادله هیچ جوابی ندارد.

حالت‌های ویژه: (بسیار مهم)

در معادله‌ی بالا، همواره به سه حالت زیر توجه داشته باشید:

- اگر a و c مختلف‌العلامه باشند، همیشه $\Delta > 0$ است و معادله یک جواب مثبت و یک جواب منفی دارد.
- اگر $a + b + c = 0$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها 1 و دیگری $\frac{c}{a}$ است.
- اگر $b = a + c$ باشد، آنگاه یکی از ریشه‌ها -1 و دیگری $-\frac{c}{a}$ است.

◊ کدام یک از عددهای زیر، یک ریشه‌ی معادله‌ی $x^2 - (a-1)x + (a-2) = 0$ است؟

4 $a-2$

3 $2-a$

2 $1-a$

1 $a-1$

گزینه 4 ✓

$$1 - a + 1 + a - 2 = 0$$

به مجموع ضرایب نگاه کنید؛

پس یکی از ریشه‌ها 1 و دیگری برابر است با؛

$$\frac{c}{a} = \frac{a-2}{1} = a-2$$

◊ ---

توجه کنید: (مهم)

هر وقت در مورد ریشه‌های α و β از یک معادله‌ی درجه دوم صحبت می‌شود، باید از وجود جواب‌ها مطمئن باشید.

(در صورت لزوم باید شرط $\Delta \geq 0$ را چک کنید.)

ایستگاه ۱: ارتباط ریشه‌ها

α و β را ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ بگیرید. آنگاه:

$$p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \quad \text{اصل ضرب ریشه‌ها؛} \quad s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \quad \text{مجموع ریشه‌ها؛}$$

برخی عبارتهای خاص بر حسب s و p :

$$\alpha^p + \beta^p = (\alpha + \beta)^p - 2\alpha\beta = s^p - 2p$$

جمع مجهولات:

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = \frac{\beta + \alpha}{\alpha\beta} = \frac{s}{p}$$

جمع معکوسها:

$$\frac{1}{\alpha^p} + \frac{1}{\beta^p} = \frac{\beta^p + \alpha^p}{\alpha^p \beta^p} = \frac{s^p - 2p}{p^p}$$

جمع معکوس مجهولات:

جمع مکعب ریشهها:

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = s^3 - 3ps$$

بعلاوه:

اختلاف (فاصله) ریشهها به آسانی به صورت $|\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$ و یا $|\alpha - \beta| = \sqrt{s^2 - 4p}$ محاسبه می‌شود.

نتایج ساده:

معادله وقتی دو جواب قرینه دارد که $s = -\frac{b}{a} = 0$ ، یعنی $b = 0$ باشد. شرط ریشههای وارون:

$$p = 1 \Rightarrow a = c$$

بررسی یک نمونه:

اگر α و β جوابهای معادله $3x^2 + x + 2 = 0$ باشند، مقدار $3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2$ را حساب می‌کنیم. چون:

$$s = \alpha + \beta = -\frac{b}{a} \Rightarrow s = -\frac{1}{3} = \frac{1}{3} \quad \text{و} \quad p = \alpha\beta = \frac{c}{a} \Rightarrow p = \frac{2}{-3} = -\frac{2}{3}$$

است، در نتیجه:

$$3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 = 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = 3ps \Rightarrow 3\left(-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

تیب سوالات

اگر مجموع ریشههای معادله $2x^2 + mx + n = 0$ برابر 2 و حاصل ضرب آنها $-\frac{5}{2}$ باشد، مقدار $m + n$ کدام است؟

4 9

3 -9

2 -1

1 1

گزینه 3

باید داشته باشیم:

$$-\frac{b}{a} = 2 \rightarrow -\frac{m}{2} = 2 \Rightarrow m = -4 \quad \text{و} \quad \frac{c}{a} = -\frac{5}{2} \rightarrow \frac{n}{2} = -\frac{5}{2} \Rightarrow n = -5$$

در نتیجه $m + n = -9$ است.

معادله $x^2 + (m^3 - m)x + 3m + 1 = 0$ به ازای کدام مقدار m دو ریشهی حقیقی قرینه دارد؟

4 0

3 1 و 0

2 1 و 0 و -1

1 -1

گزینه ۱

باید جمع ریشه‌ها صفر باشد؛ $b = 0 \Rightarrow -\frac{b}{a} = 0$ پس؛

$$m^3 - m = 0 \rightarrow m(m-1)(m+1) = 0 \rightarrow m = 0, 1, -1$$

(فقط برای $m = -1$ مقدار Δ منفی نشده و قابل قبول است.)

به ازای کدام مقدار m در معادله $x^2 - mx + 8 = 0$ یکی از ریشه‌ها مربع دیگری است؟

۴ 1

۸ 2

۲ 3

۶ 4

گزینه ۴

شرط داده شده را به صورت $x'' = (x')^2$ در نظر گرفته و فرمول ضرب ریشه‌ها را به کار می‌پریم؛

$$x'x'' = \frac{c}{a} \rightarrow x'(x')^2 = 8 \rightarrow (x')^3 = 8 \rightarrow x' = 2$$

بنابراین یکی از ریشه‌های معادله ۲ است و می‌توانیم آن را در معادله جایگزین x سازیم؛

$$2^2 - m \times 2 + 8 = 0 \rightarrow 2m = 12 \Rightarrow m = 6$$

به ازای کدام مقدار m مجموع مجذورات دو ریشه‌ی حقیقی معادله $2x^2 - mx + m - 1 = 0$ برابر ۴ است؟

۶ 4

۲ 3

-۲ 2

-۶ 1

گزینه ۲

باید شرط $\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = 4$ برقرار باشد. طبق نکته‌ی قبل و این که $s = -\frac{b}{a} = -\frac{-m}{2} = \frac{m}{2}$ و $p = \frac{c}{a} = \frac{m-1}{2}$ است، باید داشته باشیم؛

$$\left(\frac{m}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{m-1}{2}\right) = 4 \rightarrow \frac{m^2}{4} - m + 1 = 4 \xrightarrow{\times 4} m^2 - 4m - 12 = 0 \Rightarrow m = -2, m = 6$$

برای $m = 6$ مقدار دل‌مانگس می‌شود.

مجموع جذر معکوس ریشه‌های معادله $36x^2 - (m+14)x + 1 = 0$ برابر ۵ است. حاصل ضرب ریشه‌های معادله

$mx^2 + 3x + 2 = 0$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

-۳ 4

-۲ 3

۲ 2

۳ 1

گزینه ۳

داریم؛ $\sqrt{\frac{1}{\alpha}} + \sqrt{\frac{1}{\beta}} = 5$ و یا؛ $\frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha\beta}} = 5$. توان رسانی و جایگذاری؛

$$(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})^2 = (5\sqrt{\alpha\beta})^2 \rightarrow \alpha + \beta + 2\sqrt{\alpha\beta} = 25\alpha\beta$$

$$\xrightarrow{\alpha + \beta = \frac{m+14}{36}, \alpha\beta = \frac{1}{36}} \frac{m+14}{36} + 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{25}{36} \xrightarrow{\times 36} m+14+12=25 \Rightarrow m=-1$$

پس معادله‌ی دوم به صورت $x^2 + 3x + 2 = 0$ بوده و جواب: $\frac{c}{a} = -2$.

--- ❖ ---

❖ α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 6x + a = 0$ هستند. اگر $\alpha < \beta < 0$ و $3\alpha^2 + 2\beta^2 = 12\sqrt{2} + 85$ باشد، مقدار a چقدر است؟ (ریاضی ۱۴۰۱)

۲ ④

۱ ③

$\frac{21}{5}$ ②

$\frac{13}{4}$ ①

گزینه ۳

با توجه به این که $\alpha + \beta = -6$ و $\alpha\beta = a$ است:

$$\alpha^2 + \beta^2 = s^2 - 2p = 36 - 2a \quad \text{و} \quad \underbrace{|\alpha - \beta|}_{< 0} = \frac{\sqrt{\Delta}}{|1|} \rightarrow \alpha - \beta = -\sqrt{\Delta} = -\sqrt{36 - 4a} = -2\sqrt{9 - a}$$

پناپراین:

$$3\alpha^2 + 2\beta^2 = \frac{5}{2}(\alpha^2 + \beta^2) + \frac{1}{2}(\alpha^2 - \beta^2) = \frac{5}{2}(36 - 2a) + \frac{1}{2}(-6)(-2\sqrt{9 - a})$$

$$= 90 - 5a + 6\sqrt{9 - a} \rightarrow 90 - 5a + 6\sqrt{9 - a} = 12\sqrt{2} + 85 \rightarrow 5 + 6\sqrt{9 - a} = 5a + 12\sqrt{2}$$

واضح است که تساوی به ازای $a = 1$ برقرار است.

--- ❖ ---

توجه کنید: (کاربردی و مهم)

ریشه‌ها در معادله صدق می‌کنند! یعنی: اگر x' و x'' ریشه‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، باید:

$$ax'^2 + bx' + c = 0 \quad \text{و} \quad ax''^2 + bx'' + c = 0$$

❖ در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 3x + 1 = 0$ حاصل $\sqrt{x'^2(3x'' - 1)}$ چقدر است؟

۱ ④

۲ ③

$\sqrt{3}$ ②

$\sqrt{2}$ ①

گزینه ۴

طبق نکته‌ی قبلی $x^2 - 3x + 1 = 0$ و در نتیجه تساوی $x'^2 = 3x'' - 1$ برقرار است. پناپراین:

$$\sqrt{x'^2(3x'' - 1)} = \sqrt{x'^2 x''^2} = |x'x''| = \left| \frac{c}{a} \right| = |1| = 1$$

--- ❖ ---

❖ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x - 5 = 0$ باشند، حاصل $\alpha^2 - 2\alpha + \beta$ کدام است؟

۴ ④

۶ ③

۸ ②

۳ ①

گزینه ۲

مانند قبل: $\alpha^2 - 3\alpha = 5$ و از طرفی $\frac{b}{a} = 3$ است. کافی است طرفین (این دو تساوی جمع شوند:

$$\alpha^2 - 3\alpha + \alpha + \beta = 5 + 3 \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha + \beta = 8$$

---◇---

◇ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 2x - 6 = 0$ باشند، حاصل عبارت $(\alpha^2 - 6)^3 + 8\beta^3$ کدام است؟

۳۵۲ ④

۴۴ ③

۲۶۴ ②

۸۸ ①

گزینه ۴ ✓

$\alpha^2 - 6 = 2\alpha \Rightarrow \alpha^2 - 2\alpha - 6 = 0$ و در نتیجه داریم:

$$\underbrace{(\alpha^2 - 6)^3}_{2\alpha} + 8\beta^3 = 8\alpha^3 + 8\beta^3 = 8(\alpha^3 + \beta^3) = 8(s^3 - 3ps)$$

با تعیین مقادیر $s = 2$ و $p = -6$ ، مقدار مورد نظر حاصل می‌شود:

$$8((2)^3 - 3(-6)(2)) = 8 \times 44 = 352$$

---◇---

◇ اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $x^2 + x - 1 = 0$ باشند، حاصل عبارت $\frac{\alpha^6}{(\beta+1)^6} + \frac{\beta^5}{(\alpha+1)^5}$ برابر کدام است؟

۰ ④

۱ ③

۳ ②

۲ ①

گزینه ۴ ✓

از معادله، عبارت‌های صورت سؤال را می‌سازیم:

$$x^2 + x = 1 \rightarrow x(x+1) = 1 \rightarrow x+1 = \frac{1}{x} \Rightarrow \alpha+1 = \frac{1}{\alpha}, \beta+1 = \frac{1}{\beta}$$

کافی است جایگذاری کنیم:

$$\frac{\alpha^6}{\left(\frac{1}{\beta}\right)^6} + \frac{\beta^5}{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^5} = \alpha^6 \beta^6 + \beta^5 \alpha^5 = (\alpha\beta)^5 (\alpha\beta + 1) = (-1)^5 (-1+1) = 0$$

---◇---

ایستگاه ۲: نوشتن معادله

حالت کلی: هر گاه s و p (جمع و ضرب ریشه‌ها) معلوم باشند، معادله چنین است:

$$x^2 - sx + p = 0$$

یک تکنیک سریع:

گاهی باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش با ریشه‌های یک معادله‌ی داده شده، ارتباط معلومی دارند. به جای

تعیین s و p (که ممکن، ولی زمان‌بر است)، چنین عمل کنید:

- ریشه‌ی معادله‌ی داده شده را x و ریشه‌ی معادله‌ی مورد نظر را y در نظر بگیرید.
- با توجه به شرط مسأله، رابطه‌ای بین x و y بنویسید.
- از رابطه‌ی نوشته شده، x را بر حسب y به دست آورده و در معادله‌ی داده شده جایگزین کنید.
- عبارت حاصل را ساده کنید تا یک معادله‌ی درجه دوم حاصل گردد.

توجه کنید:

حالت‌های ساده‌ی زیر را مستقیماً و بدون تکنیک‌های بالا هم می‌توان جواب داد:

(الف) وقتی ریشه‌های معادله $(x_1$ و $x_2)$ معلوم باشند، معادله مستقیماً به صورت $(x-x_1)(x-x_2)=0$ نیز نوشته می‌شود. بعلاوه، اگر ضریب x^2 در معادله (عدد a) داده شده باشد، باید معادله را به صورت $a(x-x_1)(x-x_2)=0$ در نظر بگیرد.

(ب) وقتی x_1 و x_2 ریشه‌های معادله‌ی $ax^2+bx+c=0$ باشند:

- معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس x_1 و x_2 باشند: $cx^2+bx+a=0$
- معادله‌ای که ریشه‌هایش قرینه‌ی x_1 و x_2 باشند: $ax^2-bx+c=0$
- معادله‌ای که ریشه‌هایش معکوس x_1 و x_2 باشند: $cx^2-bx+a=0$

بیان چند نمونه:

۱) معادله‌ی درجه دوم با دو شرط زیر را می‌نویسیم:

یکی از جواب‌های آن $1-2\sqrt{3}$ باشد. ضرایب آن عددهای گویا باشند.

چون یکی از جواب‌ها $1-2\sqrt{3}$ است، برای این که s و p عددهای گویا (غیر رادیکالی) به دست آیند، لازم است جواب دیگر مزدوج جواب اول باشد، یعنی: $1+2\sqrt{3}$. بنابراین:

$$s = 1 - 2\sqrt{3} + 1 + 2\sqrt{3} = 2 \quad \text{و} \quad p = (1 - 2\sqrt{3})(1 + 2\sqrt{3}) = 1^2 - (2\sqrt{3})^2 = 1 - 12 = -11$$

و معادله به صورت $x^2 - 2x - 11 = 0$ نوشته می‌شود.

۲) معادله‌ای می‌نویسیم که ریشه‌های آن از ریشه‌های معادله‌ی $4x^2 - x - 1 = 0$ دو واحد کوچک‌تر باشد.

روش عادی:

باید ریشه‌ها $\alpha - 2$ و $\beta - 2$ باشند. چون $\alpha + \beta = -\frac{b}{a} = \frac{1}{4}$ و $\alpha\beta = \frac{c}{a} = -\frac{1}{4}$ است، پس در معادله‌ی مورد نظر:

$$s = \alpha - 2 + \beta - 2 = \alpha + \beta - 4 = \frac{1}{4} - 4 = -\frac{15}{4}$$

$$p = (\alpha - 2)(\beta - 2) = \alpha\beta - 2(\alpha + \beta) + 4 = -\frac{1}{4} - 2\left(\frac{1}{4}\right) + 4 = \frac{13}{4}$$

$$x^2 - \left(-\frac{15}{4}\right)x + \frac{13}{4} = 0 \xrightarrow{\times 4} 4x^2 + 15x + 13 = 0 \quad \text{و معادله چنین است:}$$

روش سریع:

باید $y = x - 2$ و در نتیجه $x = y + 2$ باشد. جایگذاری و ساده سازی:

$$\underbrace{4(y+2)^2}_{4(y^2+4y+4)} - (y+2) - 1 = 0 \rightarrow 4y^2 + 15y + 13 = 0$$

تیب سوالات

ریشه‌های کدام معادله از معکوس ریشه‌های معادله‌ی درجه دوم $2x^2 - 3x - 1 = 0$ یک واحد کمتر است؟ (کنکور ۹۴)

۱) $x^2 + 5x + 2 = 0$

۲) $x^2 - 5x + 2 = 0$

۳) $x^2 + 3x + 1 = 0$

۴) $x^2 - 3x + 1 = 0$

گزینه ۴

طبق شرط داده شده می‌نویسیم $y = \frac{1}{x} - 1$ و بنابراین $x = \frac{1}{y+1}$ $\rightarrow \frac{1}{x} = y+1$ عبارت $\frac{1}{y+1}$ را در معادله جایگزین x می‌کنیم:

$$2 \times \frac{1}{(y+1)^2} - 3 \times \frac{1}{y+1} - 1 = 0 \xrightarrow{\times (y+1)^2} 2 - 3(y+1) - (y+1)^2 = 0$$

$$\rightarrow 2 - 3y - 3 - y^2 - 2y - 1 = 0 \rightarrow -y^2 - 5y - 2 = 0$$

$$\Rightarrow y^2 + 5y + 2 = 0$$

اگر $\frac{1}{\alpha-1}$ و $\frac{1}{\beta-1}$ ریشه‌های معادله $x^2 + 2x - 5 = 0$ باشند، α و β ریشه‌های کدام معادله هستند؟

$$5x^2 - 12x + 6 = 0 \quad \text{2}$$

$$5x^2 - 12x - 6 = 0 \quad \text{1}$$

$$5x^2 + 12x + 6 = 0 \quad \text{4}$$

$$-5x^2 - 12x + 6 = 0 \quad \text{3}$$

گزینه ۲

کافی است ابتدا ریشه‌های $\frac{1}{\alpha-1}$ و $\frac{1}{\beta-1}$ معکوس شده و سپس با عدد ۱ جمع شوند تا α و β به دست آیند. یعنی:

$$y = \frac{1}{x} + 1 \rightarrow \frac{1}{x} = y - 1 \Rightarrow x = \frac{1}{y-1}$$

جایگزینی:

$$\left(\frac{1}{y-1}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{y-1}\right) - 5 = 0 \xrightarrow{\times (y-1)^2} 1 + 2(y-1) - 5(y-1)^2 = 0$$

$$\rightarrow -5y^2 + 12y - 6 = 0 \Rightarrow 5y^2 - 12y + 6 = 0$$

توجه کنید: (تضییح متغیر)

برخی معادلات که ممکن است حتی درجه دوم نباشند، ولی کلیت آن‌ها شبیه این نوع معادلات است. با تغییر کوچکی تبدیل به درجه دوم شده و راهی برای حل پیدا می‌کنند.

برای نمونه:

در حل معادله‌ی درجه چهارم $(x^2 - 1)^2 + (x^2 - 1) = 6$ ، قرار می‌دهیم: $x^2 - 1 = t$ و در نتیجه معادله به صورت

$$t^2 + t - 6 = 0 \text{ تبدیل و حل می‌شود:}$$

$$(t+3)(t-2) = 0 \Rightarrow t = -3, t = 2$$

طبق تغییر متغیر به کار رفته:

- $t = 2$: $x^2 - 1 = 2 \rightarrow x^2 = 3 \Rightarrow x = \sqrt{3}, x = -\sqrt{3}$

- $t = -3$: $x^2 - 1 = -3 \rightarrow x^2 = -2$ غیر ممکن و جواب ندارد

پس معادله فقط دو جواب $\pm\sqrt{3}$ دارد.

در معادله $x^2(x-4)^2 - 2x^2 + 8x = 15$ ، نسبت ریشه‌ی بزرگ‌تر به ریشه‌ی کوچک‌تر کدام است؟

- 1 -1 2 $\frac{1}{5}$ 3 -5 4 1

گزینه 3

قرار می‌دهیم: $x(x-4) = t$ و معادله به صورت $t^2 - 2t - 15 = 0$ → $x^2(x-4)^2 - 2x(x-4) = 15$ تبدیل می‌شود. جواب‌های t مقادیر 3- و 5 هستند:

- $t = -3$: $x^2 - 4x + 3 = 0 \Rightarrow x = 1, x = 3$
- $t = 5$: $x^2 - 4x - 5 = 0 \Rightarrow x = -1, x = 5$

نسبت مورد نظر برابر $5 = -\frac{5}{-1}$ است.

اگر معادله $(m^3 + m)x^6 - 3x^3 + m^2 - 4 = 0$ دو جواب مختلف‌العلامت داشته باشد، محدوده‌ی m شامل چند عدد

طبیعی است؟

- 1 1 2 2 3 3 4 4

گزینه 1

معادله را به صورت $(m^3 + m)t^2 - 3t + m^2 - 4 = 0$ در نظر بگیرید. ($x^3 = t$) دقیقاً:

باید $\frac{c}{a} < 0$ باشد تا برای t و در نتیجه برای x دو جواب مثبت و منفی یافت شود.

$$\frac{m^2 - 4}{m^3 + m} < 0 \rightarrow \frac{(m-2)(m+2)}{m(m^2 + 1)} < 0 \rightarrow m = \pm 2, m = 0$$
 ریشه‌ها:

m	-2	0	2
$m^2 - 4$	+ 0 -		- 0 +
$m(m^2 + 1)$	-	-	+ +
	- 0 +		- 0 +

ت.ن

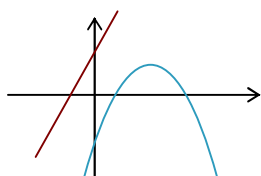
با تشکیل جدول تعیین علامت، فقط عدد طبیعی $m = 1$ قابل قبول خواهد بود.

نمرین تست (3)



1- خط $y = 2x + 4$ و سهمی $y = -x^2 + 2ax - 4$ به صورت روبه‌رو هستند.

a چند جواب صحیح دارد؟



- 1 1 2 2 3 3 4 4

2- در معادله $2x^2 - mx + 5m = 0$ مقدار m چقدر باشد تا ریشه‌های معادله عکس و قرینه‌ی هم باشند؟

$$\frac{1}{2} \text{ ①} \quad -\frac{1}{2} \text{ ②} \quad -\frac{2}{5} \text{ ③} \quad \frac{2}{5} \text{ ④}$$

۳- اگر α یکی از ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2 = 0$ باشد، مقدار عبارت $\frac{8}{\alpha^3} - \alpha^3$ کدام است؟

$$45 \text{ ①} \quad 9 \text{ ②} \quad -9 \text{ ③} \quad 35 \text{ ④}$$

۴- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 + x - 1 - m^2 = 0$ باشند، کمترین مقدار برای $\alpha^2 + \beta^2$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

$$1 \text{ ①} \quad 7 \text{ ②} \quad 3 \text{ ③} \quad 5 \text{ ④}$$

۵- در معادله‌ی درجه دوم $x^2 - 4x + 1 = 0$ حاصل عبارت $(x_1^2 - 4x_1 + 2)(x_2^2 - 4x_2 + 4)$ چقدر است؟
(x_1 و x_2 ریشه‌های معادله هستند.)

$$0 \text{ ①} \quad 1 \text{ ②} \quad 2 \text{ ③} \quad 3 \text{ ④}$$

۶- معادله‌ی درجه دومی که ریشه‌های آن $2 + \sqrt{4-a}$ و $2 - \sqrt{4-a}$ باشند، کدام است؟

$$x^2 + ax - 4 = 0 \text{ ①} \quad x^2 + 4x - a = 0 \text{ ②} \quad x^2 - 4x + a = 0 \text{ ③} \quad x^2 - ax + 4 = 0 \text{ ④}$$

۷- اگر جواب‌های معادله $(m-1)x^2 - (2m+1)x + m = 5$ شیب‌های دو خط عمود بر هم باشند، مجموع مربعات جواب‌های این معادله کدام است؟

$$\frac{51}{4} \text{ ①} \quad \frac{53}{4} \text{ ②} \quad \frac{55}{4} \text{ ③} \quad \frac{57}{4} \text{ ④}$$

۸- معادله $3x^2 + (2m-1)x + 2 - m = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی است. اگر مجموع ریشه‌ها با معکوس حاصل ضرب آن دو ریشه برابر باشد، m کدام است؟ (کنکور ۹۹)

$$\frac{7}{2} \text{ ①} \quad -1 \text{ ②} \quad 3 \text{ ③} \quad -\frac{5}{2} \text{ ④}$$

۹- اگر $\sin x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$ باشد، ضرب مقادیر قابل قبول برای $\tan x$ کدام است؟

$$1 \text{ ①} \quad -1 \text{ ②} \quad 3 \text{ ③} \quad -3 \text{ ④}$$

۱۰- اگر α و β ریشه‌های معادله $x^2 - 3x - 2m + 1 = 0$ و $2\alpha - 3\beta = 6$ باشد، مقدار m کدام است؟

$$0 \text{ ①} \quad \frac{1}{2} \text{ ②} \quad -\frac{3}{2} \text{ ③} \quad -2 \text{ ④}$$

۱۱- به ازای دو مقدار a ، یک ریشه‌ی معادله $3x^2 - ax + 4 = 0$ سه برابر ریشه‌ی دیگر است. اختلاف این دو مقدار a ، کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۱)

$$8 \text{ ①} \quad 9 \text{ ②} \quad 16 \text{ ③} \quad 18 \text{ ④}$$

۱۲- اگر α و β جواب‌های معادله $2x^2 + 2x - 1 = 0$ و $\frac{2\alpha + k}{\beta + 1} + \frac{2\beta + k}{\alpha + 1} = 1$ باشد، مقدار k برابر کدام است؟

- ① ۲/۵ ② -۲/۵ ③ -۱/۵ ④ ۱/۵

۱۳- در کدام مجموعه مقادیر a ، عدد -۲ بین ریشه‌های معادله‌ی $-x^2 + ax + ۲ = 0$ قرار دارد؟

- ① $a > ۱$ ② $a > ۲$ ③ $a < -۲$ ④ $a < -۱$

۱۴- اگر α و β جواب‌های معادله‌ی $۲x^2 + ۱۳x - ۸ = 0$ باشند، مقدار $\frac{\alpha}{\beta^2 - ۴} - \frac{۲\beta}{۱۳\alpha}$ کدام است؟

- ① $-\frac{۱۳۵}{۱۰۴}$ ② $-\frac{۲۰۱}{۱۰۴}$ ③ $\frac{۲۰۱}{۱۰۴}$ ④ $\frac{۱۳۵}{۱۰۴}$

۱۵- ریشه‌های معادله‌ی $۲x^2 - ax + b = 0$ نیم واحد از ریشه‌های معادله‌ی $۲ax^2 + ax - ۶ = 0$ بیشتر است. مقدار $\left[\frac{ab}{۴}\right]$

کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

- ① -۴ ② -۳ ③ -۲ ④ -۱

۱۶- حاصل ضرب ریشه‌های معادله‌ی $(x+۱)(x+۳)(x+۵)(x+۷) = ۲۰$ کدام است؟

- ① ۱۵ ② ۸۵ ③ ۵ ④ ۲۲

۱۷- تعداد ریشه‌های معادله‌ی زیر چگونه است؟

$$(۲x-۱)(۲x+۱)(۲x+۳)(۲x+۵) = ۹$$

- ① دو ریشه‌ی مثبت و دو ریشه‌ی منفی دارد.
 ② یک ریشه‌ی مثبت و سه ریشه‌ی منفی دارد. (یکی از ریشه‌های منفی مضاعف است).
 ③ فقط دو ریشه‌ی مختلف‌العلامت دارد.
 ④ سه ریشه‌ی مثبت دارد. (یکی از این سه ریشه مضاعف است).

۱۸- مجموع ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(x^2 + x)^2 - ۱۸(x^2 + x) + ۷۲ = 0$ کدام است؟

- ① -۴ ② -۲ ③ ۲ ④ ۴

۱۹- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله‌ی $(۴ - x^2)^2 = ۲۳ - ۲x^2$ کدام است؟

- ① -۶ ② -۷ ③ ۷ ④ ۶

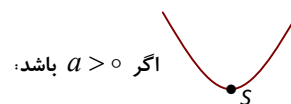
۲۰- برای کدام مقادیر m از معادله‌ی $x - ۲\sqrt{x} + m - ۱ = 0$ دو جواب متمایز برای x حاصل می‌شود؟

- ① $m \geq ۱$ ② $m < ۲$ ③ $۱ \leq m < ۲$ ④ هیچ مقدار



یادآوری:

- نمودار تابع $y = ax^2 + bx + c$ (با شرط: $a \neq 0$) یک سهمی با شکل و مشخصات زیر است:
- نمودار برای $a > 0$ دارای می‌نیم و برای $a < 0$ دارای ماکزیمم است. نقطه‌ی ماکزیمم یا می‌نیم «رأس» سهمی است.



- مختصات رأس S به صورت زیر است:

$$x_S = -\frac{b}{2a} \quad \text{و} \quad y_S = -\frac{\Delta}{4a}$$

و خط عمودی به معادله $x = -\frac{b}{2a}$ محور تقارن سهمی است.

توجه کنید:

بیشترین یا کمترین مقدار عبارت درجه دوم، همان y_S ، یعنی $(-\frac{\Delta}{4a})$ است. (روش دیگر: جایگذاری x_S در ضابطه)

برای نمونه:

سهمی $y = x(2-x) + 4x - 1$ را در نظر بگیرید.

الف) نمودار دارای ماکزیمم است. زیرا در شکل استاندارد، $a < 0$ است:

$$y = x(2-x) + 4x - 1 = 2x - x^2 + 4x - 1 \Rightarrow y = -x^2 + 6x - 1$$

ب) مختصات نقطه‌ی ماکزیمم:

$$x = -\frac{b}{2a} \rightarrow x = -\frac{6}{2(-1)} = 3 \quad \text{و} \quad y = -\frac{3^2 - 4}{-4} = 8$$

پ) معادله‌ی محور تقارن نمودار: $x = 3$

تیب سوالات

محور تقارن سهمی‌های $y = x^2 + ax - 2$ و $y = -x^2 - 2x + b$ مشترک هستند. اگر از دو نقطه با عرض یکسان روی دو سهمی خط $y = 1$ رسم شود، مقدار ab کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

۴ ④

۸ ③

۸ ②

۴ ①

گزینه ۲

محورهای تقارن به ترتیب $x = -\frac{a}{2}$ و $x = -\frac{-2}{2(-1)} = -1$ است. پس:

$$-\frac{a}{2} = -1 \Rightarrow a = 2$$

طبق شرط دوم، در چایی که $y = 1$ است، دو سهمی طول‌های یکسان دارند:

$$\begin{cases} 1 = x^2 + 2x - 2 \\ 1 = -x^2 - 2x + b \end{cases} \xrightarrow{+} 2 = -2 + b \Rightarrow b = 4, ab = 2 \times 4 = 8$$

--- ❖ ---

❖ به ازای کدام مقدار a ، تابع با ضابطه $f(x) = ax^2 - 2x + a$ ، روی محور x ها بیشترین مقدار خود را دارد؟

- 1 هیچ مقدار a 2 فقط $a = 1$ 3 فقط $a = -1$ 4 $a = \pm 1$

گزینه 3 ✓

کافی است عرض رأس برابر صفر شود:

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} = 0 \rightarrow \Delta = 0 \rightarrow 4 - 4a^2 = 0 \Rightarrow a = \pm 1$$

برای آن که سهمی دارای بیشترین مقدار باشد، لازم است که $a < 0$ بوده و بنابراین فقط $a = -1$ قابل قبول است.

--- ❖ ---

❖ نقطه می نیمم نمودار تابع $y = mx^2 - x + m$ در ناحیه ی چهارم دستگاه مختصات است. حدود m کدام است؟

- 1 $0 < m < 1$ 2 $0 < m < \frac{1}{2}$ 3 $|m| < 1$ 4 $|m| < \frac{1}{2}$

گزینه 2 ✓

چون می نیمم و ماکزیمم همان رأس سهمی است، باید $x_S > 0$ و $y_S < 0$ باشند:

$$x_S = -\frac{b}{2a} > 0 \rightarrow \frac{1}{2m} > 0 \Rightarrow m > 0$$

$$y_S = -\frac{\Delta}{4a} < 0 \rightarrow \frac{\Delta}{4a} > 0$$

طبق شرط اول، $a = m > 0$ است، بنابراین باید $\Delta > 0$ باشد:

$$1 - 4m^2 > 0 \rightarrow m^2 < \frac{1}{4} \Rightarrow -\frac{1}{2} < m < \frac{1}{2} \xrightarrow{m > 0} 0 < m < \frac{1}{2}$$

--- ❖ ---



❖ می خواهیم با ۲۲۰ متر تور سیمی در ساحل دریا محوطه ای مستطیل شکل ایجاد

کنیم. بیشترین مساحتی که می توان داشت، کدام است؟

- 1 ۵۹۵۰ 2 ۶۰۰۰ 3 ۶۰۵۰ 4 ۶۱۵۰

گزینه 3 ✓

اگر طول مستطیل را با x نشان دهیم، عرض آن باید $\frac{220 - x}{2} = 110 - \frac{x}{2}$ باشد. تعیین مساحت و ماکزیمم آن:

$$S = x(110 - \frac{x}{2}) = -\frac{1}{2}x^2 + 110x \xrightarrow{\frac{-b}{2a}} x = -\frac{110}{2(-\frac{1}{2})} = 110$$

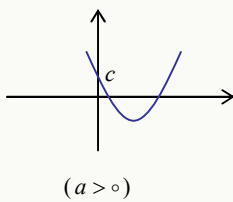
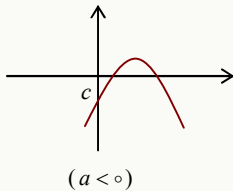
پس عرض $110 - \frac{110}{2} = 55$ بوده و بیشترین مساحت برابر است با:

$$S = 110 \times 55 = 6050$$

-----◇-----

اطلاعات بیشتری از نمودار و ریشه‌های $f(x) = ax^2 + bx + c$:

ایستگاه ۱: علامت ریشه‌ها



وقتی $\Delta > 0$ است، بر حسب علامت $\frac{c}{a}$ دو حالت کلی وجود دارد:

❖ اگر $\frac{c}{a} > 0$ باشد، ریشه‌ها هم علامت هستند و:

▪ در حالت $-\frac{b}{a} > 0$ هر دو ریشه مثبت‌اند.

▪ در حالت $-\frac{b}{a} < 0$ هر دو ریشه منفی‌اند.

❖ اگر $\frac{c}{a} < 0$ باشد، ریشه‌ها علامت‌های مخالف دارند.

توجه کنید:

حالت خاص $\frac{c}{a} = 0$ بدیهی است، (چون $c = 0$): $ax^2 + bx = 0 \Rightarrow x = 0, x = -\frac{b}{a}$

تیب سوالات

◇ خط $y = -2x + k$ نمودار $y = x^2 + 4x + 3$ را در دو نقطه‌ی مختلف در سمت چپ محور عرض قطع کرده است. حدود k کدام است؟

② $(-6, 3)$

① $(-6, +\infty)$

④ $(-3, 6)$

③ $(-\infty, 3)$

گزینه ۲ ✓

معادله‌ی حاصل از تقاطع نمودارها:

$$x^2 + 4x + 3 = -2x + k \rightarrow x^2 + 6x + 3 - k = 0$$

این معادله باید دو جواب منفی داشته باشد:

$$\frac{c}{a} > 0 \rightarrow \frac{3-k}{1} > 0 \Rightarrow k < 3 \quad (I) \quad \text{و} \quad -\frac{b}{a} < 0 \rightarrow -6 < 0 \quad (\text{خود به خود برقرار})$$

فراموش نکنید که شرط $\Delta > 0$ نیز ضروری است:

$$6^2 - 4(1)(3-k) > 0 \xrightarrow{+4} 3-k < 9 \Rightarrow k > -6 \xrightarrow{(I)} -6 < k < 3$$

-----◇-----

◇ معادله‌ی $(m-2)x^2 + 4x + m - 5 = 0$ دو ریشه‌ی بزرگ‌تر از یک دارد و مجموعه مقادیر m یک بازه است. نقطه‌ی میانی این بازه کدام است؟

④ $\frac{7}{4}$

③ $\frac{13}{8}$

② $\frac{11}{8}$

① $\frac{5}{4}$

گزینه ۱

دو ریشه‌ی $\alpha > 1$ و $\beta > 1$ می‌گیریم و بنابراین $\alpha - 1 > 0$ و $\beta - 1 > 0$ است. این شرایط معادل است با این‌که:

$$\alpha - 1 + \beta - 1 > 0 \rightarrow s > 2 \quad \text{و} \quad \frac{(\alpha - 1)(\beta - 1)}{\alpha\beta - (\alpha + \beta) + 1} > 0 \rightarrow p - s > -1$$

چاپگرایی از ضرایب معادله در روابط بالا و ضمناً شرط نامنفی بودن دلالت:

- $-\frac{4}{m-2} > 2 \rightarrow \frac{2}{2-m} > 1 \rightarrow 0 < 2-m < 2 \Rightarrow 0 < m < 2$
- $\frac{m-5}{m-2} + \frac{4}{m-2} > -1 \rightarrow \frac{m-1}{m-2} > -1 \xrightarrow{0 < m < 2 \Rightarrow m-2 < 0} m-1 < -(m-2) \Rightarrow m < \frac{3}{2}$
- $\Delta \geq 0 \rightarrow 16 - 4(m-2)(m-5) \geq 0 \xrightarrow{\div 4} m^2 - 7m + 6 \leq 0 \xrightarrow{m=1,6} 1 \leq m \leq 6$

اشتراک شرایط برابر پاره‌ی $(1, \frac{3}{2})$ و جواب $\frac{1+\frac{3}{2}}{2} = \frac{5}{4}$ خواهد بود.

وضعیت دقیق نمودار سهمی به وضعیت آن نسبت به محورها بستگی دارد.

ایستگاه ۲: سهمی و ممورها

توجه:

می‌دانیم نمودار $y = ax^2 + bx + c$ همیشه محور y ها را به عرض c قطع می‌کند: $x = 0 \Rightarrow y = c$
بنابراین:

نمودار سهمی لااقل از دو ناحیه عبور می‌کند.

سهمی و محور طول:

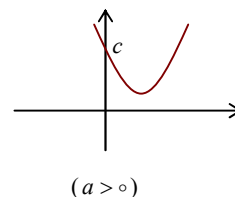
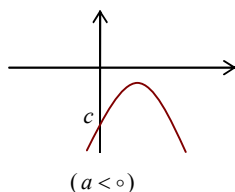
وضعیت نمودار بستگی به برخورد آن با محور طول دارد؛ یعنی: جواب‌های معادله‌ی $ax^2 + bx + c = 0$. بنابراین بر حسب مقدار Δ ، سه حالت اصلی داریم:

«برای $\Delta > 0$ دو تقاطع، برای $\Delta = 0$ نمودار مماس و برای $\Delta < 0$ ، نمودار برخورد با محور طول ندارد.»

جزئیات دقیق‌تر:

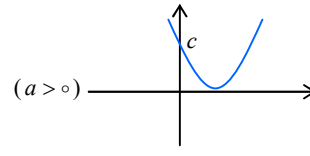
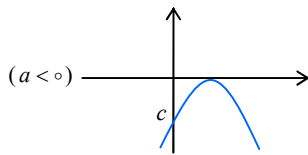
۱) اگر $\Delta < 0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را قطع نمی‌کند. به‌طور دقیق:

- اگر $a > 0$ باشد، نمودار بالای محور x است و فقط از نواحی اول و دوم عبور می‌کند. (y همواره مثبت)
- اگر $a < 0$ باشد، نمودار پایین محور x است و فقط از نواحی سوم و چهارم عبور می‌کند. (y همواره منفی)



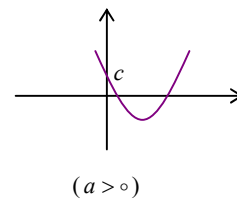
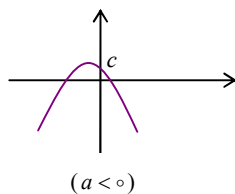
۲) اگر $\Delta = 0$ باشد، نمودار بر محور طول‌ها مماس است. به‌طور دقیق:

- اگر $a > 0$ باشد، نمودار از بالا بر محور x مماس می‌شود.
- اگر $a < 0$ باشد، نمودار از پایین بر محور x مماس می‌شود.



(بازهم نمودار فقط از دو ناحیه عبور می‌کند.)

۱۳) اگر $\Delta > 0$ باشد، نمودار محور طول‌ها را در دو نقطه قطع می‌کند.



نکات مهم این حالت:

- ۱) نمودار از سه یا چهار ناحیه عبور می‌کند. دقیقاً:
 - اگر ریشه‌ها هم‌علامت باشند ($\frac{c}{a} > 0$)، نمودار از سه ناحیه عبور می‌کند.
 - اگر ریشه‌ها دارای علامت‌های مخالف باشند، نمودار از هر چهار ناحیه عبور می‌کند.

مالت ویژه و مهم:

شرط آن‌که نمودار سهمی از هر چهار ناحیه عبور کند این است که $\frac{c}{a} < 0$.

زیرا در این حالت، شرط $\Delta > 0$ نیز خود به خود برقرار خواهد بود.

۱۲) به دلیل تقارن نمودار: «طول رأس، میانگین ریشه‌هاست!» در کل:

«طول رأس، میانگین طول هر دو نقطه‌ی هم عرض نمودار است.»

یک نمونه:

محدوده‌ی m را طوری مشخص می‌کنیم که نمودار تابع $y = (m-1)x^2 + \sqrt{3}x + m$ همواره زیر محور x ها باشد.

شرط‌های لازم: $a < 0$ و $\Delta < 0$

نامعادلات را حل کرده و بین جواب‌ها اشتراک می‌گیریم:

$$a < 0: m-1 < 0 \rightarrow m < 1$$

$$\Delta < 0: (\sqrt{3})^2 - 4(m-1)(m) < 0$$

نامعادله‌ی دوم به صورت $3 < 4m^2 + 4m - 3$ نوشته می‌شود؛ ریشه‌ها $-\frac{1}{4}$ و $\frac{3}{4}$ بوده و چون ضریب m^2 با نامساوی

علامت یکسان دارند، خارج دو ریشه پذیرفته می‌شود: $(m > \frac{3}{4}$ یا $m < -\frac{1}{4})$. اشتراک این جواب با شرط اول $m < 1$:

$$m < -\frac{1}{4}$$

تیب سوالات

نقاط $(3, -4)$ و $(-1/5, -4)$ روی نمودار یک تابع درجه دوم هستند. مجموع صفرهای تابع کدام است؟ (ریاضی ۱۴۰۳)

④ $\frac{5}{2}$

③ $\frac{5}{4}$

② $\frac{3}{4}$

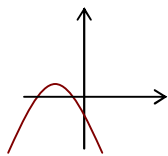
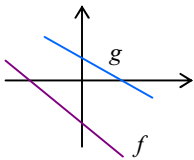
① $\frac{3}{2}$

گزینه ۱

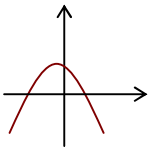
چون نقاط هم عرض هستند:

$$x_S = \frac{-1/5 + 3}{2} = \frac{x' + x''}{2} \Rightarrow x' + x'' = -1/5 + 3 = 1/5$$

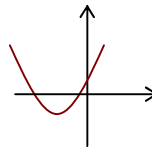
نمودارهای دو تابع خطی به صورت روبه‌رو است. نمودار تابع fg کدام می‌تواند باشد؟



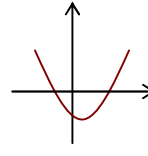
④



③



②



①

گزینه ۱

ضابطه‌ی توابع خطی درجه اول بوده و در نتیجه fg درجه دوم (سه‌می) است. با توجه به دو مورد، گزینه‌ی صحیح معلوم می‌شود:

① چون هر دو خط شیب (= ضریب x در ضابطه) منفی دارند، ضریب x^2 در ضابطه‌ی fg مثبت است. (ردگ ۳ و ۴)

② ریشه‌های $fg(x) = 0$ همان ریشه‌های $f(x)g(x) = 0$ و در نتیجه برخورد خطها با محور طول هستند؛ بنابراین باید یکی مثبت و دیگری منفی باشد. (ردگ ۲)

صفرهای تابع $y = 2x^2 - (m+2)x + m$ (یعنی: جواب‌های معادله $y = 0$) و نقطه تقاطع آن با محور عرض، رئوس یک مثلث هستند. اگر مساحت این مثلث برابر $\frac{3}{4}$ باشد، کدام می‌تواند طول رأس سه‌می $y = x^2 - mx + 1$ باشد؟ (نوبت ۲ - کنکور ۱۴۰۲)

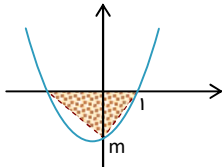
④ $-\frac{1}{2}$

③ $-\frac{3}{4}$

② $\frac{2}{3}$

① $\frac{1}{4}$

گزینه ۴



در معادله‌ی $2x^2 - (m+2)x + m = 0$ ، چون مجموع ضرایب صفر است، صفرها ۱ و

$$\frac{c}{a} = \frac{m}{2}$$

پس:

قاعده‌ی مثلث $|1 - \frac{m}{2}|$ و ارتفاع، فاصله‌ی برخورد سه‌می با محور عرض: $(0, m)$ تا محور طول، یعنی $|m|$ است.

بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} |m| \left| \frac{m}{2} - 1 \right| = \frac{3}{4} \xrightarrow{\times 4} |m(m-2)| = 3 \rightarrow m^2 - 2m = \pm 3$$

تنها در حالت $m^2 - 2m = 3$ ، دو جواب -1 و 3 برای m حاصل می‌شود. با توجه به شکل (و شرایط تست)، m الزاماً منفی است و با

جایگذاری $m = -1$ در سهمی دوم، جواب قطعی به سؤال داده می‌شود:

$$y = x^2 + x + 1 \Rightarrow x = -\frac{b}{2a} = -\frac{1}{2}$$

---◇---

◇ نمودار تابع درجه دوم $f(x) = ax^2 + 4x + 4 - a$ از هر چهار ناحیه عبور می‌کند. طول بالاترین نقطه‌ی نمودار در کدام محدوده واقع است؟

④ $x < 0$

③ $x < -2$

② $x > 2$

① $x > 0$

کزینه ۱ ✓

طبق شرط عبور از چهار ناحیه:

$$\frac{c}{a} < 0 \rightarrow \frac{4-a}{a} < 0 \xrightarrow{a=0, a=4} a < 0 \text{ یا } a > 4$$

با توجه به وجود بالاترین نقطه، فقط $a < 0$ قابل قبول است. طول رأس $x = \frac{-4}{2a} = -\frac{2}{a}$ است، با توجه به شرط $a < 0$:

$$a < 0 \rightarrow \frac{1}{a} < 0 \xrightarrow{\times(-2)} -\frac{2}{a} > 0$$

---◇---

◇ تحت کدام شرط، نمودار تابع $y = 2ax^2 + cx + b$ فقط از ربع سوم عبور نمی‌کند؟

④ $a < 0$

③ $b < 0$

② $c < 0$

① $ab < 0$

کزینه ۲ ✓

لازم است نمودار به یکی از صورت‌های روبه‌رو باشد:
پس:

باید $a > 0$ ، $b \geq 0$ و با توجه به رأس، $-\frac{c}{2(2a)} > 0$ باشد. در نتیجه:

$$-\frac{c}{4a} > 0 \rightarrow \frac{c}{4a} < 0 \xrightarrow{a > 0} c < 0$$

---◇---

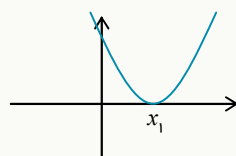
گاهی نمودار سهمی با اطلاعاتی روی آن داده می‌شود:

ایستگاه ۳: دو کاربرد نمودار

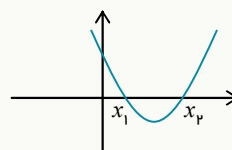
۱) نوشتن ضابطه:

بر حسب اطلاعات داده شده، ضابطه را به صورت $y = ax^2 + bx + c$ یا $y = a(x-h)^2 + k$ گرفته و با توجه به اطلاعات روی شکل، (جایگذاری مختصات نقاط، مختصات رأس و ...) ضرایب را مشخص می‌کنیم.

دو حالت ویژه:



$$y = a(x - x_1)^2$$



$$y = a(x - x_1)(x - x_p)$$

۲) علامت ضرایب:

با نگاه به نمودار سهمی $y = ax^2 + bx + c$ ، می‌توان علامت a ، b و c را مشخص کرد.

a : با نگاه به جهت دهانه سهمی

c : نقطه برخورد با محور عرض

برای تعیین علامت، از علامت طول رأس $(-\frac{b}{2a})$ استفاده کنید.

تیب سوالات

❖ فرض کنید رأس سهمی $y = ax^2 + bx + c$ گذرا بر نقطه‌ی $(3, 1)$ باشد. سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟

④ $(1, 5)$

③ $(2, 5)$

② $(5, -7)$

① $(5, -9)$

گزینه ۱

چون رأس داده شده، ضابطه باید به صورت $y = a(x+1)^2 + 9$ باشد. جایگذاری نقطه‌ی داده شده:

$$1 = a(3+1)^2 + 9 \rightarrow a = -\frac{1}{4} \Rightarrow y = -\frac{1}{4}(x+1)^2 + 9$$

با جایگذاری فقط $(5, -9)$ در ضابطه صادق است.

❖ با توجه به نمودار سهمی $f(x) = ax^2 + bx + c$ ، حاصل عبارت $2\alpha^3 + \alpha\beta^3$ کدام است؟

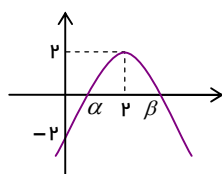
② ۲۴

① ۱۲

④ ۴۲

③ ۴۰

گزینه ۲



در نمودار می‌پینید:

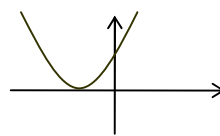
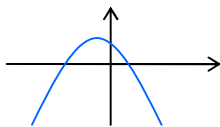
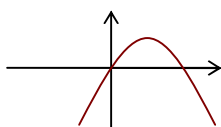
$c = -2$ است و علاوه طول و عرض رأس هر دو برابر ۲ هستند.

$$y = ax^2 + bx - 2 \rightarrow \begin{cases} -\frac{b}{2a} = 2 \Rightarrow b = -4a \\ a(2)^2 + b(2) - 2 = 2 \Rightarrow 4a + 2b = 4 \end{cases} \Rightarrow a = -1, b = 4$$

پس سهمی به صورت $-x^2 + 4x - 2 = 0$ بوده است. چون $p = \frac{c}{a} = 2$ و $s = -\frac{b}{a} = 4$

$$\begin{aligned} \alpha\beta^3 + 2\alpha^3 &= \alpha\beta\beta^2 + 2\alpha^2 = 2\beta^2 + 2\alpha^2 = 2(\beta^2 + \alpha^2) = 2(s^2 - 2p) \\ &= 2(16 - 4) = 24 \end{aligned}$$

❖ نمودارهای زیر مربوط به توابع چندجمله‌ای به فرم $y = ax^2 + bx + c$ است. در چه تعداد از آن‌ها حاصل abc عددی مثبت است؟



④ ۰

③ ۱

② ۲

① ۳

گزینه ۲

هر یک از نمودارها را بررسی می‌کنیم:

نمودار سمت راست: واضح است که $a > 0$ و $c > 0$ است. با توجه به طول رأس:

$$-\frac{b}{2a} < 0 \xrightarrow{a > 0} b > 0 \Rightarrow abc > 0$$

نمودار وسط: به طور مشابه دیده می‌شود که: $a < 0$, $b < 0$ و $c > 0$; در نتیجه: $abc > 0$.نمودار سمت چپ: چون $c = 0$ است، در نتیجه: $abc = 0$.

تمرین تست (۴)



۱- فرض کنید نقاط $(-2, 5)$ ، $(0, 5)$ و $(1, 1)$ بر سهمی $y = ax^2 + bx + c$ واقع باشند. این سهمی، از کدام یک از نقاط زیر می‌گذرد؟ (کنکور ۹۹)

- ① $(-1, 3)$ ② $(-1, 4)$ ③ $(2, 9)$ ④ $(2, 15)$

۲- خط به معادله $y = -\frac{5}{2}x$ محور تقارن منحنی با ضابطه $y = \frac{1}{4}x^2 - 3x + a$ را بر روی خود منحنی قطع می‌کند. a کدام است؟

- ① -1 ② -2 ③ 1 ④ 2

۳- راکتی که به طور عمودی شلیک شده t ثانیه پس از پرتاب در ارتفاع h متری از سطح زمین قرار دارد که در آن $h(t) = 200t - 5t^2$ برای $t \geq 0$ است. چند ثانیه طول می‌کشد تا راکت به بالاترین ارتفاع ممکن خود برسد؟

- ① 5 ② 20 ③ 15 ④ 10

۴- به ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از تمام نواحی عبور می‌کند؟

- ① $a \geq 2$ ② $a > 3$ ③ $a < 3$ ④ $a < 0$

۵- نمودار $y = x^2 - 2x + 1 + a$ ($a > 0$)، در چند نقطه محور طولها را قطع می‌کند؟

- ① بستگی به a دارد. ② 1 ③ 2 ④ 0

۶- اگر α و β صفرهای سهمی $y = 25ax^2 + 4x + \beta$ و $\beta > \alpha$ باشد، رأس این سهمی در کدام ناحیه از صفحه مختصات قرار دارد؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۳)

- ① اول ② دوم ③ سوم ④ چهارم

۷- سهمی $y = ax^2 + bx + c$ محور طول را در نقاط 1 و -3 و محور عرض را در نقطه 1 قطع کرده است. کمترین مقدار نمودار کدام است؟

- ① $-\frac{2}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ $\frac{4}{3}$ ④ $\frac{2}{3}$

۸- اگر کمترین یا بیشترین مقدار سهمی $y = (2a-1)x^2 - 8x + 6$ روی محور طول باشد، معادله‌ی محور تقارن سهمی کدام است؟

$x = \frac{11}{6}$ ④

$x = \frac{8}{3}$ ③

$x = \frac{3}{2}$ ②

$x = \frac{3}{4}$ ①

۹- نقطه $(5, 2)$ رأس یک سهمی است. اگر نمودار پاره خطی به طول ۶ از محور x جدا کند، برخورد نمودار با محور عرض در چه عددی است؟

$-\frac{4}{3}$ ④

$-\frac{8}{9}$ ③

$-\frac{32}{3}$ ②

$-\frac{32}{9}$ ①

۱۰- به‌ازای کدام مقادیر a ، نمودار تابع $f(x) = (a-3)x^2 + (a-2)x - 1$ فقط از ناحیه‌ی اول مختصات نمی‌گذرد؟

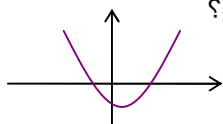
$2 < a < 2\sqrt{2}$ ②

$a < 2$ ①

$-2\sqrt{2} < a < 2\sqrt{2}$ ④

$a < -2\sqrt{2}$ ③

۱۱- در شکل مقابل، نمودار سهمی به معادله‌ی $y = ax^2 + bx + c$ داده شده است. کدام گزینه صحیح است؟



$abc > 0$ ④

$abc < 0$ ③

$b+c > 0$ ②

$b-c > 0$ ①

۱۲- برای کدام مقادیر a ، نمودار $f(x) = (a-3)x^2 + ax - 1$ از ناحیه‌ی اول محورهای مختصات نمی‌گذرد؟ (ریاضی ۹۲)

$0 < a < 3$ ④

$2 < a < 3$ ③

$0 < a \leq 2$ ②

$a \leq 2$ ①

۱۳- نقاط $A(3, y)$ و $B(-5, y)$ روی یک سهمی واقع شده‌اند و عرض رأس سهمی برابر ۱ است. اگر این سهمی، محور x ها را در نقاطی با طول‌های α و β قطع کند و $\alpha^2 + \beta^2 = 5$ باشد، این سهمی محور y ها را در نقطه‌ای با کدام عرض قطع می‌کند؟ (نوبت ۲- ریاضی ۱۴۰۲)

$\frac{1}{3}$ ④

$\frac{2}{3}$ ③

$-\frac{2}{3}$ ②

$-\frac{1}{3}$ ①

۱۴- رأس $y = kx^2 - 4x - 6$ روی خط $y = -4x - 4$ قرار دارد. عرض رأس سهمی کدام است؟ (نوبت ۱- ریاضی ۱۴۰۲)

۶ ④

۲ ③

-۴ ②

-۸ ①

۱۵- برای $m \in [a, +\infty) - \{b\}$ نمودار $y = (m-1)x^2 - mx + 1$ فقط از ناحیه‌ی سوم نمی‌گذرد. مقدار $a+b$ کدام است؟

۳ ④

۲ ③

۱ ②

۰ ①

ایستگاه ۱: معادله گویا

معادله‌ی گویا، شامل کسرهایی با مخرج چند جمله‌ای است. مانند:

$$\frac{x+1}{x-2} = 1+2x$$

ریشه‌های مخرج در دامنه قرار ندارند: $D = \mathbb{R} - \{\text{ریشه‌های مخرج}\}$

روش حل:

- مخرج مشترک کسرها را تعیین کرده و آن را در دو طرف معادله ضرب کنید.
- عبارت حاصل را ساده کرده و معادله را حل کنید.
- فقط جواب‌هایی مورد قبول هستند که هیچ مخرجی را صفر نکنند. (= در دامنه باشند).

(وقتی معادله بر حسب دو کسر باشد، طرفین- وسطین هم قابل استفاده است.)

توجه کنید:

اگر چند عبارت گویا داشته باشیم، در تعیین دامنه باید ریشه‌های تمام آن‌ها از \mathbb{R} کم شود. برای نمونه: در معادله‌ی:

$$\frac{x}{x^2+2x} = \frac{1}{x} - \frac{3}{x-2}$$

ریشه‌های هر سه مخرج:

$$x^2+2x=0 \Rightarrow \begin{cases} x=0 \\ x=-2 \end{cases} \quad \text{و} \quad x=0 \quad \text{و} \quad x-2=0 \Rightarrow x=2$$

بنابراین: $D = \mathbb{R} - \{0, 2, -2\}$

تیب سوالات

تعداد جواب‌های معادله‌ی $\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} - \frac{x+3}{x+2} = \frac{x+1}{x}$ کدام است؟

۴ 1

۳ 2

۱ 3

۰ 4

گزینه ۲

با استفاده از کم‌م‌م $x(x+2)$ می‌نویسیم:

$$x(x+2) \times \frac{x^2+2x+2}{x^2+2x} - x(x+2) \times \frac{x+3}{x+2} = x(x+2) \times \frac{x+1}{x}$$

$$\rightarrow x^2+2x+2-x^2-3x = x^2+x+2x+2 \rightarrow x^2+4x=0 \rightarrow x=0, -4$$

واضح است که فقط -4 قابل قبول بوده و معادله یک جواب دارد.

❖ معادله‌ی $1 - \frac{m}{x^2 + 4x + 2} = \frac{x^2}{1 + x^2}$ دو جواب حقیقی متمایز دارد. چند مقدار طبیعی برای m وجود دارد؟

- ۱ ۲ ۲ ۳ ۳ ۴ ۴ ۵

گزینه ۱

$$1 - \frac{x^2}{1+x^2} = \frac{m}{x^2+4x+2} \rightarrow \frac{1+x^2-x^2}{1+x^2} = \frac{m}{x^2+4x+2} \rightarrow mx^2+m = x^2+4x+2$$

$$\rightarrow (m-1)x^2 - 4x + m - 2 = 0 \xrightarrow{\Delta > 0} 16 - 4(m-1)(m-2) > 0$$

$$\xrightarrow{\div 4} (m-1)(m-2) < 4 \rightarrow m^2 - 3m - 2 < 0$$

جواب آخرین نامعادله به روش دلتا $\frac{3-\sqrt{17}}{2} < m < \frac{3+\sqrt{17}}{2}$ خواهد شد. مقادیر ممکن با توجه به $\sqrt{17} \cong 4/1$ عبارتند از:

$$m = 1, 2, 3$$

برای $m = 1$ معادله‌ی اولیه درجه دوم نخواهد شد؛ پس دو جواب وجود دارد.

--- ❖ ---

یک تیب مهم سؤال: (جواب نداشتن)

❖ اگر مجموعه جواب معادله‌ی $\frac{m+1}{3x} = \frac{5-x}{4x-x^2}$ تهی باشد، مقدار m کدام می‌تواند باشد؟

- ۱ ۰ ۲ ۱ ۳ ۴ ۴ ۱۱

گزینه ۴

با استفاده از ک.م.م $3x(4-x)$ می‌نویسیم: (طرفین - وسطین هم ممکن است!)

$$3x(4-x) \times \frac{m+1}{3x} = 3x(4-x) \times \frac{5-x}{4x-x^2} \rightarrow 4m+4-mx-x = 15-3x$$

$$\Rightarrow x = \frac{11-4m}{2-m}$$

برای جواب نداشتن، سه حالت داریم:

• معرج صفر شود:

$$2-m=0 \Rightarrow m=2$$

• ریشه صفر په‌دست آید:

$$\frac{11-4m}{2-m}=0 \rightarrow 11-4m=0 \Rightarrow m=\frac{11}{4}$$

• ریشه ۴ په‌دست آید:

$$\frac{11-4m}{2-m}=4 \rightarrow 11-4m=8-4m \Rightarrow 3=0 \quad (\text{غیر ممکن است}).$$

--- ❖ ---

چند نوع کاربرد:

❖ بهروز یک مجله را به تنهایی ۹ ساعت زودتر از فرهاد تایپ می‌کند. اگر هر دو با هم کار کنند، در ۲۰ ساعت این کار انجام

می‌شود. بهروز به تنهایی در چند ساعت این کار را انجام می‌دهد؟ (ریاضی ۹۸)

- ۱ ۳۲ ۲ ۳۳ ۳ ۳۵ ۴ ۳۶

گزینه ۴

فرض کنید پهروز در t ساعت مجله را تایپ کند. در این صورت:

- **اولاً:** فرهاد در $t+9$ ساعت این کار را انجام می‌دهد.
- **ثانیاً:** در یک ساعت، پهروز $\frac{1}{t}$ و فرهاد $\frac{1}{t+9}$ از کار تایپ را انجام خواهد داد. چون هر دو با هم در یک ساعت، $\frac{1}{30}$ از کار تایپ را کامل خواهند کرد:

$$\frac{1}{t} + \frac{1}{t+9} = \frac{1}{30} \xrightarrow{\times 30t(t+9)} 30(t+9) + 30t = t(t+9) \rightarrow t^2 - 31t - 180 = 0$$

$$\xrightarrow{t > 0} (t-36)(t+5) = 0 \Rightarrow t = 36$$

---◇---

◇ صد کیلوگرم محلول آب و شکر با غلظت ۲۵ درصد موجود است. اگر $\frac{1}{3}$ از آب آن را تبخیر کنیم، چند کیلوگرم شکر باید اضافه کرد تا غلظت آن ۸۰ درصد شود؟

۱۷۵ ④

۱۵۰ ③

۱۲۵ ②

۷۵ ①

گزینه ۴

در محلول اولیه، ۲۵ کیلوگرم شکر و ۷۵ کیلوگرم آب وجود داشته و بعد از تبخیر، $25 = 75 \times \frac{1}{3}$ کیلوگرم از آب کم می‌شود. اگر x کیلوگرم شکر برای تبدیل غلظت به ۸۰ درصد لازم باشد، باید:

$$\frac{25+x}{25+50+x} = \frac{80}{100} \rightarrow \frac{25+x}{75+x} = \frac{4}{5} \rightarrow 125+5x = 300+4x \Rightarrow x = 175$$

---◇---

◇ اگر هر دو شیر استخری باز باشند، استخر در سه ساعت پر می‌شود. در صورتی که شیر بزرگ به تنهایی باز باشد، ۲۰ دقیقه زودتر از شیر کوچک استخر را پر می‌کند. شیر کوچک به تنهایی استخر را تقریباً در چند ساعت پر می‌کند؟

۴ ④

۵ ③

۶ ②

۷ ①

گزینه ۲

فرض کنید شیر کوچک در t ساعت استخر را پر کند. در این صورت:

- **اولاً:** شیر بزرگ در $t - \frac{1}{3}$ ساعت این کار را انجام می‌دهد.
- **ثانیاً:** در یک ساعت، شیر کوچک $\frac{1}{t}$ و شیر بزرگ $\frac{1}{t - \frac{1}{3}} = \frac{1}{\frac{3t-1}{3}} = \frac{3}{3t-1}$ از استخر را پر خواهد کرد. طبق فرض، هر دو با هم در یک ساعت، $\frac{1}{30}$ از استخر را پر خواهند کرد. در نتیجه:

$$\frac{1}{t} + \frac{3}{3t-1} = \frac{1}{30} \xrightarrow{\times 30t(3t-1)} 30(3t-1) + 30t = t(3t-1) \rightarrow 9t - 3 + 9t = 3t^2 - t$$

$$\rightarrow 3t^2 - 19t + 3 = 0 \xrightarrow{\sqrt{\Delta} = \sqrt{325} \approx 18} t = \frac{19+18}{6} = \frac{37}{6} = 6\frac{1}{6} \approx 6$$



توجه کنید:

برای دو عدد مثبت a و b ، همواره نامساوی $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ برقرار است. (تساوی در حالت $a = b$ رخ می‌دهد).

دو حالت ویژه:

دو خاصیت زیر مربوط به «مجموع یک عبارت با معکوس فود» را می‌توان از خاصیت بالا نتیجه گرفت که در حل معادلات و نامعادلات کاربرد دارند.

■ برای $a > 0$ ، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \geq 2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = 2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = 1$ باشد.

■ برای a منفی، همواره داریم $a + \frac{1}{a} \leq -2$. به علاوه:

تساوی $a + \frac{1}{a} = -2$ فقط وقتی رخ می‌دهد که $a = -1$ باشد.

◇ معادله $(x + \frac{1}{x})^2 - 3(x + \frac{1}{x}) - 2 = 0$ چند جواب حقیقی متمایز دارد؟

۱ ④

۲ ③

۰ ②

۴ ①

گزینه ۴ ✓

قرار می‌دهیم: $x + \frac{1}{x} = t$. معادله به صورت $t^2 - 3t + 2 = 0$ نوشته شده و به روش سریع، جواب‌های $t = 1$ و $t = \frac{c}{a} = 2$ دارد. با توجه به نکته‌ی قبل:

$$x + \frac{1}{x} = 2 \Rightarrow x = 1 \quad \text{جواب ندارد.} \quad x + \frac{1}{x} = 1 \Rightarrow$$



◇ در مورد معادله $\frac{x^2 - 2}{2x + 1} = 2 - \frac{2x + 1}{x^2 - 2}$ کدام گزینه درست است؟

① دو ریشه مختلف‌العلامه دارد. ② ریشه حقیقی ندارد.

③ دو ریشه مثبت دارد. ④ دو ریشه منفی دارد.

گزینه ۱ ✓

به محض مشاهده‌ی دو عبارت معکوس هم در یک عبارت، نکته‌ی قبل را به یاد آورید!

$$\frac{x^2 - 2}{2x + 1} = 2 - \frac{2x + 1}{x^2 - 2} \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{2x + 1} + \frac{2x + 1}{x^2 - 2} = 2 \Rightarrow \frac{x^2 - 2}{2x + 1} = 1$$

حل این معادله‌ی جدید:

$$x^2 - 2 = 2x + 1 \Rightarrow x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow x = -1, 3$$

جواب‌های به دست آمده ریشه‌ی هیچ معرجه‌ی از معادله نبوده و هر دو قابل قبول هستند.



موضوع پایانی این بخش:

ایستگاه ۲: معادلات آصم

معادلاتی شامل رادیکال‌های مجهول، مانند:

$$2\sqrt{1-x} + x = 1 \quad \text{یا} \quad \sqrt{x-2} = 2+x$$

روش حل:

- عبارت رادیکالی را به یک طرف و سایر عبارتها را به طرف دیگر تساوی منتقل می‌کنیم.
- دو طرف را به توان رسانده تا رادیکال حذف شود.
- معادله‌ی حاصل را حل کرده و جواب‌ها را مشخص می‌کنیم.

توجه کنید:

برای قابل قبول بودن یک جواب، کافی است که در معادله صدق کند؛
یا هیچ رادیکالی با مقدار منفی برابر نشود!

توضیح دقیق‌تر:

اگر معادله‌ای به شکل $2\sqrt{p} + q = 1$ را تا آخر حل کردید؛ یا جواب را در کل معادله امتحان کنید و یا:
«جواب باید p را منفی نکند و چون $2\sqrt{p} = 1 - q$ ، جواب باید $1 - q$ را نیز منفی نکند.»

برای نمونه:

معادله‌ی $\sqrt{x^2 + x} - \sqrt{-x} = 0$ را حل می‌کنیم. چون دو عبارت رادیکالی داریم، یکی را در سمت چپ و دیگری را به سمت راست برده و توان‌رسانی:

$$\sqrt{x^2 + x} = \sqrt{-x} \rightarrow x^2 + x = -x \rightarrow x^2 + 2x = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = -2 \end{cases}$$

با آزمایش جواب‌ها می‌بینید که هر دو قابل قبول هستند:

$$x = 0: \sqrt{0^2 + 0} - \sqrt{-0} = 0 \Rightarrow 0 = 0 \quad \text{قابل قبول}$$

$$x = -2: \sqrt{(-2)^2 - 2} - \sqrt{-(-2)} = 0 \Rightarrow \sqrt{2} - \sqrt{2} = 0 \quad \text{قابل قبول}$$

تیب سوالات

با اگر عدد ۴ یکی از جواب‌های معادله‌ی $x + a = \sqrt{5x - x^2}$ باشد، جواب دیگر آن کدام است؟

4 ندارد

3 ۳

2 ۲

1 $\frac{1}{2}$

گزینه ۱

عدد ۴ را چایگزین می‌کنیم:


$$4 + a = \sqrt{20 - 16} \Rightarrow a = 2 - 4 = -2$$

اکنون با توان‌رسانی دو طرف معادله:

$$x - 2 = \sqrt{5x - x^2} \rightarrow x^2 - 4x + 4 = 5x - x^2 \rightarrow 2x^2 - 9x + 4 = 0$$

$$\xrightarrow{-x^2} (2x)^2 - 9(2x) + 4 = 0 \rightarrow (2x-1)(2x-8) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = 4$$

---  ---

 معادله‌ی $\sqrt{1 - \sqrt{3x - 5}} - \sqrt{4 - x} = 0$ چند جواب حقیقی دارد؟

○ 4

۱ 3

۲ 2

۳ 1

 گزینه ۴


مشابه قبیل می‌نویسیم:

$$\sqrt{1 - \sqrt{3x - 5}} = \sqrt{4 - x} \rightarrow 1 - \sqrt{3x - 5} = 4 - x \rightarrow x - 3 = \sqrt{3x - 5}$$

$$\rightarrow x^2 - 6x + 9 = 3x - 5 \rightarrow x^2 - 9x + 14 = 0 \Rightarrow x = 2, 7$$

هیچ‌کدام از دو مقدار در معادله صادق نیستند.

---  ---

 جواب‌های معادله‌ی $1 + \sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + x}$ چگونه است؟

2 فقط یک جواب منفی

1 فقط یک جواب مثبت

4 جواب ندارد

3 یک جواب دارد


 گزینه ۴

طرفین به توان دو و سپس ساده کردن:

$$1 + 1 + x^2 + 2\sqrt{1 + x^2} = 1 + x \Rightarrow x^2 - x + 1 + 2\sqrt{1 + x^2} = 0$$

عبارت $x^2 - x + 1$ دارای $\Delta < 0$ و همیشه مثبت بوده و عبارت $2\sqrt{1 + x^2}$ نیز همیشه مثبت است؛ پس معادله جواب ندارد.

---  ---

 جواب معادله‌ی $\sqrt{x} + \sqrt{x - a} = a$ یک عدد طبیعی دو رقمی است. حداقل مقدار طبیعی a کدام است؟

۱۰ 4

۷ 3

۶ 2

۵ 1

 گزینه ۳

معادله را با توان‌رسانی به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\sqrt{x - a} = a - \sqrt{x} \rightarrow x - a = a^2 + x - 2a\sqrt{x} \xrightarrow{-a} 2\sqrt{x} = a + 1$$

باید دو شرط برقرار باشد:

۱) x مجذور کامل باشد تا a طبیعی شود.

۲) x کمترین مقدار ممکن باشد تا a حداقل شود.

واضح است که $x = 16$ بوده و در نتیجه:

$$a = 2\sqrt{x} - 1 \xrightarrow{x=16} 2(4) - 1 = 7$$

---  ---

یک حالت ویژه: (توجه به دامنه)

❖ معادله $\sqrt{2x-3} = \sqrt{x+\sqrt{x-2}} - \sqrt{2-x}$ چند ریشه‌ی حقیقی دارد؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۲)

- ۱ ○ ۲ ③ ۳ ④ ۴ ○

گزینه ۱

با توجه به وجود $\sqrt{2-x}$ باید $x \leq 2$ و با توجه به وجود $\sqrt{x-2}$ لازم است $x \geq 2$ باشد. پس فقط $x = 2$ امکان دارد چوای معادله باشد که با جایگزینی در معادله رد می‌شود:

$$\sqrt{2(2)-3} = \sqrt{2+\sqrt{2-2}} - \sqrt{2-2} \rightarrow \sqrt{1} \neq \sqrt{2} - 0$$

--- ❖ ---

تمرین تست (۵)



۱- معادله $\frac{3x-2}{x^2-6} + \frac{1}{3} = \frac{x^2-6}{2-3x}$ چند جواب حقیقی دارد؟

- ۱ ○ ۲ ③ ۳ ④ ۴ ○

۲- اگر یکی از جواب‌های معادله $\frac{x+6}{k+4} + \frac{x}{2x-4} = 3$ برابر ۴ باشد، جواب دیگر کدام است؟

- ۱/۵ ① ۳ ② ۴/۵ ③ ندارد ④

۳- چند عدد حقیقی متمایز در معادله $\frac{x-1}{x+1} - \frac{x+1}{x-1} = 2x(1 - \frac{x-1}{x+1})$ صدق می‌کند؟

- ۱ ○ ۲ ③ ۳ ④ ۴ ○

۴- رضا و مهدی با هم کاری را در ۱۵ ساعت انجام می‌دهند. اگر رضا بخواهد به تنهایی این کار را انجام دهد، ۴۰ ساعت زودتر از مهدی این کار را انجام خواهد داد. رضا این کار را به تنهایی در چند ساعت انجام می‌دهد؟

- ۴۰ ① ۳۰ ② ۲۵ ③ ۲۰ ④

۵- برای انجام یک کار سه کارگر داریم: سرعت A سه برابر سرعت B و سرعت B دو برابر سرعت C است. وقتی این سه نفر با هم کار کنند، کار در طی ۶۰ روز تمام می‌شود. A و C دوتایی تقریباً در چند روز کار را تمام می‌کنند؟

- ۷۷ ① ۷۹ ② ۸۱ ③ ۸۳ ④

۶- نگار و زهرا در حال تایپ کتابی ۳۰۰ صفحه‌ای هستند. اگر نگار به تنهایی کار کند، تکمیل کار ۲۰ ساعت طول می‌کشد، ولی اگر هر دو همزمان کار کنند، ۱۲ ساعت. آن‌ها کار را با هم شروع می‌کنند، ولی بعد از ۴ ساعت، نگار کار را رها می‌کند. بقیه تایپ توسط زهرا چند ساعت طول خواهد کشید؟

- ۲۰ ① ۲۴ ② ۲۲ ③ ۱۸ ④

۷- نسبت طول به عرض یک مستطیل، ۵ به ۴ است. با افزایش طول مستطیل، یک مستطیل طلایی خواهیم داشت. نسبت مساحت مستطیل طلایی به مستطیل اولیه کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

- ① $o/3 + \sqrt{5}$ ② $o/2(1 + \sqrt{5})$ ③ $o/6 + 2\sqrt{5}$ ④ $o/4(1 + \sqrt{5})$

۸- اگر $1 = 2a + \sqrt{3a + 16}$ باشد، مقدار $4a + 9$ کدام است؟

- ① ۲۱ ② ۱۵ ③ ۶ ④ ۴

۹- اگر $x = 5$ یکی از جواب‌های معادله $x = 2\sqrt{2x-1} + a$ باشد، اختلاف a و ریشه‌ی دیگر آن کدام است؟

- ① $\frac{1}{2}$ ② ۲ ③ ۱ ④ $\frac{3}{2}$

۱۰- اگر معادله $\sqrt{x-2} + 2\sqrt{4-2x} + k = x + 3$ دارای جواب حقیقی برابر a باشد، مقدار $a + k$ کدام است؟

- ① ۷ ② ۶ ③ ۵ ④ ۴

۱۱- کدام یک از معادلات زیر دو ریشه دارد؟

- ① $(x^2 - 1)\sqrt{x+2} = 0$ ② $x\sqrt{x-3} = 0$
③ $(x-4)\sqrt{x+2} = 0$ ④ $(x+2)\sqrt{x+1} = 0$

۱۲- حاصل ضرب ریشه‌های حقیقی معادله $x^2 + 4x + 3 = \sqrt{x^2 + 4x + 5}$ کدام است؟

- ① ۱ ② -۲ ③ ۴ ④ ۲

۱۳- معادله $\sqrt{x^3} - x + \sqrt{x+2} = 0$ چند جواب دارد؟

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۴- معادله $\sqrt{\frac{3x+1}{x-4}} + \sqrt{\frac{x-4}{1+3x}} = 2$ چند جواب دارد؟

- ① ۴ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۵- معادله $(x^2 + x + 1) - 3\sqrt{x^2 + x + 1} + 2 = 0$ دارای:

- ① چهار ریشه‌ی حقیقی است. ② دو ریشه‌ی حقیقی است.
③ دو ریشه‌ی مضاعف است. ④ هیچکدام

۱۶- معادله $\sqrt{3x^2 + 2x - 1} + \sqrt{2x + 2 + 3x^2} = 1$ چند جواب دارد؟

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۷- فاصله‌ی نقطه‌ی تلاقی منحنی‌های $2y = x^2$ و $x = \sqrt{y+3} - \sqrt{y-3}$ تا مبدأ مختصات کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

- ① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{6}$ ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{15}$

۱۸- معادله $\sqrt{5x-4} = \sqrt{3x} + \sqrt{x-2} - \sqrt{4-2x}$ دارای چند جواب است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴

۱۹- معادله $\sqrt{x-1} + 2\sqrt{3-x} = -5x + 4$ دارای چند جواب است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴

۲۰- معادله $\sqrt{x+1} + \sqrt{x+3} = \sqrt{x+2} + \sqrt{x+4}$ دارای چند جواب است؟

- ۱ ۳ ۲ ۴

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برفی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری درصد ۱۰۰ در آزمون‌ها»

ADVANCED

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید . . .

خط‌های $y = 2x$ و $y = x + 3$ شامل دو ضلع یک متوازی‌الاضلاع هستند که قطرهاش در $M(2, 1)$ متقاطع‌اند. مساحت این چهارضلعی کدام است؟

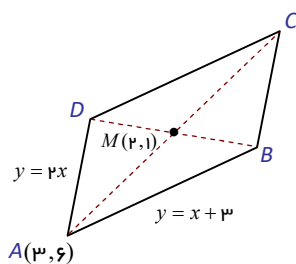
۴۰ ④

۳۲ ③

۴۴ ②

۴۸ ①

گزینه ۱



نقطه‌ی تقاطع دو خط: $(3, 6)$ باید یک رأس متوازی‌الاضلاع باشد.
رسم شکل تقریبی:

تعیین چوای طی چند مرحله:

① رأس C قرینه‌ی A نسبت به M است:

$$C = (2(2) - 3, 2(1) - 6) \rightarrow C(1, -4)$$

② معادله‌ی BC توسط نقطه‌ی C و شیب 2 به صورت $y = 2x - 6$ نوشته شده و تقاطع آن با ضلع $y = x + 3$ ، مختصات $B(9, 12)$ را حاصل خواهد کرد. در نتیجه:

$$AB = \sqrt{(9-3)^2 + (12-6)^2} = \sqrt{72} = 6\sqrt{2}$$

③ واضح است که ارتفاع برابر فاصله‌ی نقطه‌ی C از خط $y = x + 3$ (یا: $x - y + 3 = 0$) است:

$$h = \frac{|1 - (-4) + 3|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2}} = \frac{8}{\sqrt{2}}$$

بنابراین:

$$S = h \times AB = \frac{8}{\sqrt{2}} \times 6\sqrt{2} = 48$$

---◇---

دو ضلع روبه‌روی یک مستطیل روی دو خط به معادله‌های $ax + 3y = 1$ و $4x + (a-1)y = 3$ قرار دارند. اگر اندازه‌ی قطر مستطیل $\frac{1}{p}$ باشد، مساحت آن کدام است؟

۵/۱۵ ④

۵/۱۲ ③

۵/۱ ②

۵/۵۸ ①

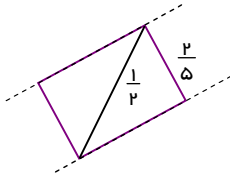
گزینه ۳

چون دو ضلع مقابل موازی هستند:

$$\frac{4}{a} = \frac{a-1}{3} \rightarrow a^2 - a - 12 = 0 \Rightarrow a = 4, -3$$

فاصله‌ی این دو خط، اندازه یک ضلع است که البته فقط به ازای $a = 4$ اندازه ضلع از اندازه قطر کوچک‌تر خواهد شد:

$$a = 4 \rightarrow \begin{cases} 4x + 3y - 3 = 0 \\ 4x + 3y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow \frac{|-3+1|}{\sqrt{16+9}} = \frac{2}{5}$$



$$\text{توسط فیثاغورس ضلع دیگر} = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{2}{5}\right)^2} = \sqrt{\frac{25-16}{100}} = \frac{3}{10}$$

$$.S = \frac{2}{5} \times \frac{3}{10} = \frac{6}{50} = 0.12 \text{ مساحت: و مساحت}$$



قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2,1)$ نسبت به خط $y = x - 2$ ، با مبدأ جقدر فاصله دارد؟

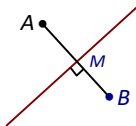
4

3

2

1

گزینه 1



مطابق شکل، قرینه را به صورت مجهول $B(a, b)$ می‌گیریم.

اولاً: باید AB بر خط عمود باشد. پس:

$$m_{AB} = -\frac{1}{1} \rightarrow \frac{b-1}{a-2} = -1 \rightarrow a+b=3$$

ثانیاً: نقطه‌ی وسط AB باید روی خط باشد. پس:

$$M\left(\frac{2+a}{2}, \frac{1+b}{2}\right) \xrightarrow{y=x-2} \frac{1+b}{2} = \frac{2+a}{2} - 2 \xrightarrow{\times 2} a-b=3$$

از حل دستگاه، $B(3, 0)$ حاصل شده و داریم:

$$OB = \sqrt{3^2 + 0^2} = 3$$

به فرض x_1 و x_p ریشه‌های معادله $x = 5 - x^2$ باشند. $\frac{1}{(x_1+1)^3}$ و $\frac{1}{(x_p+1)^3}$ ریشه‌های کدام معادله‌اند؟ (کنکور ۱۴۰۰)

$$125x^2 = 16x + 1 \quad 2$$

$$125x^2 + 16x = 1 \quad 1$$

$$125x^2 + 12x = 1 \quad 4$$

$$125x^2 = 12x + 1 \quad 3$$

گزینه 1

در معادله‌ی داده شده $s = -1$ و $p = -5$ است. معادله را می‌توان به صورت $x+1 = \frac{5}{x}$ نوشت و در نتیجه: $\frac{1}{(x+1)^3} = \frac{x^3}{125}$ پس

باید معادله‌ای بنویسیم که ریشه‌هایش $\frac{x_1^3}{125}$ و $\frac{x_p^3}{125}$ باشند. در معادله‌ی مورد نظر:

$$S = \frac{x_1^3}{125} + \frac{x_p^3}{125} = \frac{s^3 - 3sp}{125} = \frac{-1-15}{125} = -\frac{16}{125}$$

$$P = \frac{x_1^3}{125} \times \frac{x_p^3}{125} = \frac{p^3}{125^2} = \frac{-125}{125^2} = -\frac{1}{125}$$

در نتیجه:

$$x^2 - 5x + P = 0 \rightarrow x^2 + \frac{16}{125}x - \frac{1}{125} = 0 \xrightarrow{\times 125} 125x^2 + 16x - 1 = 0$$

---  ---

❓ α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 - 3x + 1 = m$ هستند و $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha - \beta} = 1$ کدام معادله دو ریشه‌ی منفی دارد؟

- ❶ $6x^2 + x + m + 3 = 0$ ❷ $-6x^2 - 9x + m - 1 = 0$
 ❸ $6x^2 - 9x + m + 3 = 0$ ❹ $-6x^2 + 9x + m^2 + 3 = 0$

گزینه ۲ 

تساوی داده شده به صورت $\frac{\beta^2 + 3\alpha - \alpha\beta}{\beta(3 - \beta)} = 1$ بوده و اطلاعات زیر از α و β طبق معادله در دسترس است:

$$\alpha\beta = 1 - m \quad \text{و} \quad \beta(3 - \beta) = 3\beta - \beta^2 = 1 - m \quad \text{و} \quad \beta^2 = 3\beta + m - 1$$

چایگذاری در رابطه‌ی بالا:

$$\frac{3\beta + m - 1 + 3\alpha - 1 + m}{1 - m} = 1 \xrightarrow{3\alpha + 3\beta = 3(-\frac{b}{a}) = 9} \frac{7 + 2m}{1 - m} = 1 \Rightarrow m = \frac{1}{4}$$

در گزینه‌ی چهارم، به ازای $m = \frac{1}{4}$ باید $\frac{c}{a} > 0$ و $-\frac{b}{a} < 0$ باشد، توجه:

فقط در گزینه‌های اول و دوم شرایط اخیر برقرار است که البته در گ، دلتا منفی است.

---  ---

❓ اگر α و β ریشه‌های معادله‌ی $x^2 + 2x - 7 = 0$ باشند و بین ریشه‌ها رابطه‌ی $\frac{49\alpha + \beta^5}{3\beta^2} = m - \frac{2}{3}$ برقرار باشد، کدام

معادله دارای دو ریشه‌ی $m - 1$ و $m + 2$ کدام است؟

- ❶ $x^2 - 31x + 238 = 0$ ❷ $x^2 + 31x + 238 = 0$
 ❸ $x^2 + 31x - 238 = 0$ ❹ $x^2 - 31x - 238 = 0$

گزینه ۲ 

داریم: $\alpha + \beta = -2$ ، بعلاوه $\alpha\beta = -7$ بوده و با استفاده از آن:

$$\alpha^2 \beta^2 = 49 \rightarrow \alpha^2 = \frac{49}{\beta^2}$$

مقادیر را در تساوی داده شده به کار می‌گیریم:

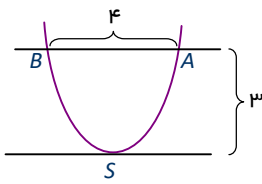
$$\frac{1}{3} \left(\frac{49}{\beta^2} \alpha + \beta^5 \right) = \frac{1}{3} \underbrace{(\alpha^3 + \beta^3)}_{s^3 - 3sp} = m - \frac{2}{3} \rightarrow \frac{1}{3} (-8 - 3(14)) = m - \frac{2}{3}$$

$$\xrightarrow{\times 3} -50 = 3m - 2 \Rightarrow m = -16$$

معادله‌ی مورد نظر باید دارای ریشه‌های -17 و -14 باشد و بنابراین:

$$\xrightarrow{s = -31, p = 238} x^2 + 31x + 238 = 0$$

---  ---



شکل مقابل نمودار تابع $y = ax^2 - 6x + 2$ و دو خط افقی را نشان می‌دهد. معادله‌ی محور تقارن نمودار، $x = \dots$ است.

2 $-\frac{3}{4}$

1 $\frac{3}{4}$

4 $-\frac{4}{3}$

3 $\frac{4}{3}$

گزینه 3

طول رأس $x = \frac{3}{a}$ است. با دقت در نمودار، اطلاعات زیر در مورد A قابل فهم است:

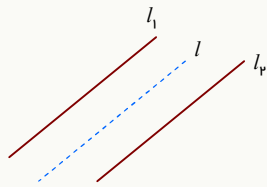
$$x_A = x_S + 2 = \frac{3}{a} + 2 \quad \text{و} \quad y_A = y_S + 3$$

با توجه به تساوی سمت راست:

$$a\left(\frac{3}{a} + 2\right)^2 - 6\left(\frac{3}{a} + 2\right) + 2 = a\left(\frac{3}{a}\right)^2 - 6\left(\frac{3}{a}\right) + 2 + 3 \rightarrow a\left(\frac{6}{a} + 4\right) - 12 = 3 \xrightarrow{4a=9} a = \frac{9}{4}$$

پس محور تقارن $x = -\frac{-6}{\frac{9}{4}} = \frac{4}{3}$ است.

ایستگاه ۱: خط مابین



برای دو خط موازی l_1 و l_2 :

نقاط خطی چون l موازی آن دو در بین‌شان، فاصله‌ی برابر تا آن دو خط دارند.

بعلاوه:

نوشتن معادله‌ی l در دو حالت بر حسب ظاهر معادلات خطها:

$$\begin{cases} l_1: ax + by + c = 0 \\ l_2: ax + by + c' = 0 \end{cases} \Rightarrow l: ax + by + \frac{c + c'}{2} = 0$$

$$\begin{cases} l_1: y = mx + h \\ l_2: y = mx + h' \end{cases} \Rightarrow l: y = mx + \frac{h + h'}{2}$$

خطی که از دو خط $2x - y + m = 0$ و $x = \frac{y-n}{2}$ به یک فاصله است، خط l به معادله‌ی $my - nx + 6 = 0$ را در نقطه-

ای به طول ۲ روی نیمساز ربع اول و سوم قطع کرده؛ مقدار $m - 2n$ کدام است؟

4 $-2/5$

3 $-3/5$

2 $3/5$

1 $2/5$

گزینه 4

دو خط اول را شبیه هم نوشته تا خط وسط آنها تعیین شود:

$$\begin{cases} y = 2x + m \\ y - n = 2x \end{cases} \Rightarrow y = 2x + \frac{m+n}{2}$$

نقطه‌ی تقاطع $(2, 2)$ باید روی این خط و خط l واقع باشد:

$$2m - 2n + 6 = 0 \rightarrow n - m = 3 \quad \text{و} \quad 2 = 4 + \frac{m+n}{2} \rightarrow m+n = -4$$

از حل دستگاه $m = -\frac{7}{2}$ و $n = -\frac{1}{2}$ بوده و در نتیجه $m - 2n = -\frac{5}{2}$ است.

--- ❖ ---

ایستگاه ۲: دو حالت ویژه

۱) در معادله‌ی با ظاهر درجه اول به شکل $ax = b$:

اگر $a = 0$ باشد، دو حالت رخ می‌دهد:

- وقتی $b \neq 0$ باشد، معادله به شکل $0 \times x = b$ تبدیل شده و هیچ جوابی ندارد.
- وقتی $b = 0$ باشد، معادله به شکل $0 \times x = 0$ بوده و هر عددی جواب معادله است. (بی‌شمار جواب).

۲) گاهی مجموع چند عبارت نامنفی (رادیکال، قدرمطلق، توان زوج) برابر صفر می‌شود. در این صورت:

جواب باید تک‌تک این عبارات را صفر کند تا پذیرفته شود.

$$2\sqrt{2+x} + |4-x^2| = 0$$

برای نمونه، در معادله‌ی مقابل:

فقط $x = -2$ جواب است، چون:

$$2+x=0 \Rightarrow x=-2 \quad \text{و} \quad 4-x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$$

تیب سوالات

❖ به ازای چند مقدار a ، معادله‌ی $\frac{3x-2}{x} + \frac{2x+a}{x+3} = 5$ فاقد جواب است؟

۴ بی‌شمار

۲

۱

۰

گزینه ۳

تمام عبارات را در $x(x+3)$ ضرب کرده و حاصل را ساده می‌کنیم:

$$(3x-2)(x+3) + x(2x+a) = 5x(x+3) \rightarrow 3x^2 + 7x - 6 + 2x^2 + ax = 5x^2 + 15x$$

$$\rightarrow ax - 8x = 6 \Rightarrow (a-8)x = 6$$

اکنون حالت‌هایی که معادله‌ی اصلی جواب نخواهد داشت، را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر جواب یکی از ریشه‌های معرجه کسرهای موجود در معادله به دست آید:

$$x=0 \rightarrow (a-8) \times 0 = 6 \quad \text{غیر ممکن}$$

$$x=-3 \rightarrow (a-8) \times (-3) = 6 \rightarrow a-8 = -2 \Rightarrow a=6 \quad \text{یک جواب}$$

ب) اگر معادله‌ی $(a-8)x = 6$ هیچ جوابی نداشته باشد:

$$a-8=0 \Rightarrow a=8 \quad \text{یک جواب}$$

--- ❖ ---

مجموع جواب‌های معادله‌ی $\sqrt{x^4 - 4x^2} + \sqrt{4x - x^3} = 0$ کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

گزینه ۱

عبارت ساده‌تر برای حل را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$x^4 - 4x^2 = 0 \rightarrow x^2(x^2 - 4) = 0 \Rightarrow x = 0, x = 2, x = -2$$

فقط جواب‌های ۰ و ۲ رادیکال دوم را هم صفر کرده و قابل قبول هستند. پس:

$$0 + 2 = 2$$

اگر معادله‌ی $\sqrt{x^3 - x} + \sqrt{ax^2 + (b-1)x - 3} = 0$ دارای دو ریشه‌ی حقیقی باشد، مقدار ab کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

گزینه ۴

ریشه‌های رادیکال اول:

$$x^3 - x = 0 \Rightarrow x = 0, 1, -1$$

عدد ۰ رادیکال دوم را صفر نمی‌کند، بنابراین جواب‌ها دو عدد دیگرند؛ باید ۱ و -۱ رادیکال دوم را صفر کنند:

$$a + b - 1 - 3 = 0 \Rightarrow a + b = 4 \quad \text{و} \quad a - b + 1 - 3 = 0 \Rightarrow a - b = 2$$

پس $a = 3$ و $b = 1$ بوده و بنابراین:

$$ab = 3$$



ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱- دو ضلع یک مربع روی دو خط به معادله‌های $y = \frac{x}{p} - \frac{5}{4}$ و $8y - 4x = K$ قرار دارند. اگر مساحت این مربع $1/8$ واحد مربع باشد، آنگاه مقدار مثبت K کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

۲- قرینه‌ی نقطه‌ی $A(2, a-4)$ نسبت به خط $2y = x + 1$ ، روی نیمساز نواحی دوم و چهارم قرار دارد؛ مقدار a کدام است؟

- ۱ ۲ ۳ ۴ ۵ ۶ ۷ ۸

۳- نقطه‌ی $H(2, 1)$ را روی خط $3x - y = 5$ در نظر بگیرید. مثلث متساوی الاضلاع ABC را با ارتفاع AH می‌سازیم، به طوری که محیط مثلث $\sqrt{27}$ واحد باشد. مختصات یک رأس A کدام است؟ (کنکور ۱۴۰۰)

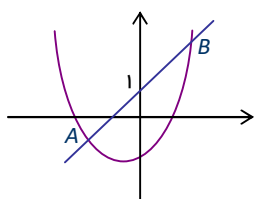
- ۱ $(\frac{5}{p}, \frac{1}{p})$ ۲ $(\frac{13}{p}, -\frac{1}{p})$ ۳ $(\frac{1}{p}, \frac{3}{p})$ ۴ $(-\frac{1}{p}, \frac{11}{p})$

۱۲- معادله $x^4 - ax^2 + b = 0$ چهار ریشهی غیرصفر دارد. اگر «مجموع دو ریشهی بزرگتر آن برابر m » و «مجموع دو ریشهی کوچکتر آن برابر n » باشند، معادلهی درجه دومی که ریشههای آن m و n باشند به صورت $x^2 + (a - \gamma)x - a - b = 0$ باشد، مقدار $b - a$ برابر کدام است؟

- ① -۱ ② ۱ ③ ۳ ④ -۳

۱۳- حدود m کدام باشد تا هیچ نقطه‌ای از تابع $y = x^2 - 4x + m$ دارای فاصله‌ی ۵ از محور x ها نباشد؟

- ① $m > 9$ ② $m < -2$ ③ $-2 < m < 3$ ④ $-5 < m < -2$



۱۴- شکل مقابل نمودار سهمی $y = x^2 + 2x - 1$ را نشان می‌دهد. اگر محور عرض پاره-خط AB را نصف کرده باشد، معادلهی خط AB کدام است؟

- ① $y = 2x + 1$ ② $2y = x + 1$
③ $y = -2x + 1$ ④ $2y = -2x + 1$

۱۵- معادلهی $(x-2)\sqrt{x^2-9} - (x-3)\sqrt{x^2-4} = 0$ چند جواب دارد؟

- ① ۰ ② ۱ ③ ۲ ④ ۳

۱۶- معادلهی $x^3 - 6x^2 + 10x - 4 = 0$ سه ریشهی α ، β و γ (با شرط $\beta < \alpha < \gamma$) دارد. مقدار $\frac{1}{\sqrt{2\alpha - \beta}} + \frac{1}{\sqrt{2\alpha - \gamma}}$ برابر کدام است؟ (می‌دانیم: چند جمله‌ای بر $x - 2$ بخش‌پذیر است.)

- ① $\sqrt{2 + \sqrt{2}}$ ② $\sqrt{1 + \sqrt{2}}$ ③ $2 + \sqrt{2}$ ④ $1 + \sqrt{2}$

۱۷- عدد صحیح x جوابی از معادلهی $\sqrt{a + 2\sqrt{x-2}} + \sqrt{6+x-x^2} = a$ است. مجموع مقادیر ممکن برای a کدام است؟

- ① ۸ ② ۷ ③ ۶ ④ ۵

۱۸- برای مقادیر a و b ، معادلهی $\frac{a-3}{3x-2-x^2} + \frac{bx+1}{x-2} = 1$ فقط یک مقدار $x = 3$ به عنوان جواب دارد. مجموع مقادیر

ممکن برای b کدام است؟

- ① $3/2$ ② $1/4$ ③ $2/4$ ④ $2/2$

لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

ریاضی تیزهوشان	متوسطه اول (عادی)	دوره ابتدایی (عادی)
ریاضی تیزهوشان ششم	جزوه ریاضی هفتم	جزوه ریاضی پنجم
ریاضی تیزهوشان هفتم	جزوه ریاضی هشتم	جزوه ریاضی ششم
ریاضی تیزهوشان هشتم	جزوه ریاضی نهم	
ریاضی تیزهوشان نهم		

استعداد تحلیلی (ششم به هفتم)	استعداد تحلیلی (نهم به دهم)
جزوه هوش کلامی (ادبی)	جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)
جزوه هوش غیرکلامی (تصویری)	جزوه هوش ریاضی و محاسبات
جزوه هوش ریاضی - منطقی و سرعتی	جزوه هوش منطقی و استدلال (شامل تحلیل متن)

متوسطه دوم (تجربی: کنگوری)	متوسطه دوم (تجربی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور ریاضی یازدهم	جزوه تشریحی ریاضی یازدهم
جزوه کنکور ریاضی دوازدهم	جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم
جزوه جامع کنکور تجربی	

متوسطه دوم (ریاضی: کنگوری)	متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی)
جزوه کنکور ریاضی دهم	جزوه تشریحی ریاضی دهم
جزوه کنکور مسابان (۱)	جزوه تشریحی هندسه (۱)
جزوه کنکور آمار و احتمال	جزوه تشریحی هندسه (۲)
جزوه کنکور هندسه (۲)	جزوه تشریحی مسابان (۱)
جزوه کنکور مسابان (۲)	جزوه تشریحی آمار و احتمال
جزوه کنکور ریاضیات گسسته	جزوه تشریحی ریاضیات گسسته
جزوه کنکور هندسه (۳)	جزوه تشریحی هندسه (۳)
جزوه جامع کنکور ریاضی	جزوه تشریحی مسابان (۲)

رشته انسانی
جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)
جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده)

ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴
 ۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴