TEST

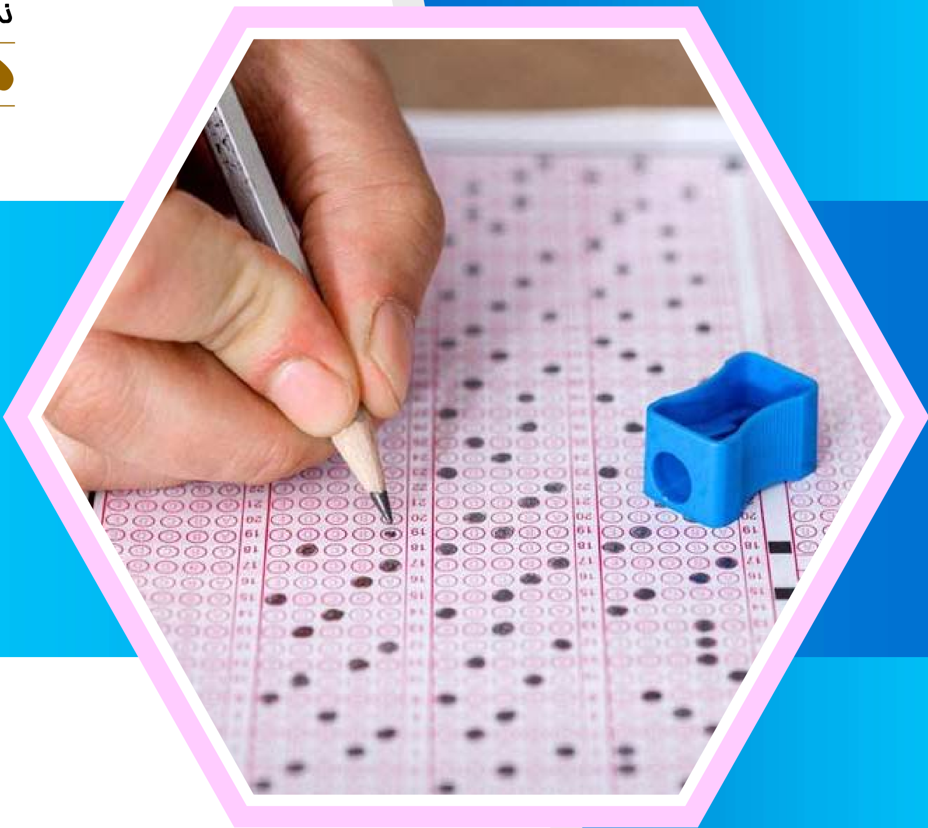
درسنامه ریاضیات کنکور

نمونه نکته و تست:

# هندسه دوازدهم

**Dr. Ali Reza Nooreddiny**

PhD in pure mathematics



۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴

The Best
Quality in Education
D&A - Since 2012

گروه علمی درس‌آموز

مرجع تخصصی تولید محتوای آموزشی

«ریاضیات» & «هوش و استعداد تحلیلی»

«اهداف مجموعه ما»

**ثبت بهترین سابقه تحصیلی و عملکرد برای دانش‌آموزان کشور (نهایی ۲۰)**

**کسب رتبه‌های برتر کنکور و ورودی سمپاد و نمونه** 100%

**در ۴ سطح و زمینه گوناگون:**

آموزش مفهومی کتاب و آمادگی نهایی؛

آموزش نکته و تست پیشرفته کنکور؛

آموزش ریاضیات تیزهوشان؛

و:

# آموزش هوش و استعداد تحلیلی

(لیست کامل در انتهای فایل)

Up to date

**درس‌آموز:** (منحصر به‌فرد)

## جزئیات این مجموعه

**آموزش کنکور**

(درسنامه محور)

هسته اصلی این پک آموزشی، یک درسنامه دقیق و مفهومی، نکات و تکنیک‌های سریع با پوشش کامل از محتوای آموزشی مربوطه است.

**سطح نرمال آموزش کنکوری**

جهت آمادگی شرکت در آزمون‌ها و کنکور

**سطح پیشرفته آموزش**

ویژه کسب نمره کامل ۱۰۰٪ در آزمون‌ها و کنکور

**طرح و تشریح**

صدها مثال و تست متوسط، دشوار و دشوارتر

**بانک تمرین تست**

شامل صدها تست متوسط و دشوار (پاسخنامه تشریحی جداگانه دارد.)

**پوشش آزمون‌های آزمایشی و آخرین کنکورها**

**Up to date**

TEST

# فهرست

TEST

۲

## ماتریس (۲)

| فهرست | صفحه |
|---|---|
| دترمینان و کاربرد | ۳۲ |
| وارون ماتریس‌ها | ۴۲ |
| دستگاه معادلات | ۵۱ |
| ویژه صد درصدی‌ها | ۵۵ |
| تمرین تست | ۵۹ |

## ۱ دترمینان و کاربرد

به هر ماتریس مربعی مانند $A$، طبق روش‌هایی خاص، عددی به نام **«دترمینان»** و دارای نماد $|A|$ نسبت داده می‌شود.

محاسبه‌ی دترمینان را با ماتریس‌های ساده‌تر شروع می‌کنیم.

**نکته ۱**

**دترمینان:**

برای یک ماتریس مربعی مرتبه ۲ مانند $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$، دترمینان برابر است با:

$$|A|=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=ad-bc$$

برای نمونه؛

$$A=\begin{bmatrix} ۳ & -۱ \\ ۲ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۳(۰)-(-۱)(۲)=۲$$

حالت خیلی خاص:

دترمینان ماتریس مرتبه‌ی ۱×۱ با درایه‌ی داخل آن یکسان است. نمونه‌ها:

$$\underbrace{[۳]}_{\text{ماتریس}}=\underbrace{|۳|}_{\text{دترمینان}}=\underbrace{۳}_{\text{درایه}} \quad \text{و} \quad [-\tfrac{۱}{۲}]=|-\tfrac{۱}{۲}|=-\tfrac{۱}{۲}$$

اگر با اضافه کردن دو واحد به درایه‌های ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & a \end{bmatrix}$ دترمینان آن تغییر نکند، مقدار $a$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۳ ❸ ۵ ❹ ۷

**گزینه ۴**

باید داشته باشیم:

$$\begin{vmatrix} ۳ & ۴ \\ ۶ & a \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & a+۲ \end{vmatrix} \to ۳a-۲۴=۵(a+۲)-۴۸ \to ۳a-۵a=۲۴+۱۰-۴۸$$

$$\to -۲a=-۱۴ \Rightarrow a=۷$$

---

برای ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ با درایه‌های صحیح و ماتریس $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & a \\ ۰ & \sqrt{۲}b & ۰ \\ c & ۰ & d \end{bmatrix}$، اگر $|A|=۲$ و $B^۲=۲I$ باشد، حاصل‌ضرب درایه‌های غیرصفر ماتریس $B^۳$ کدام است؟ (نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

❶ $۳۲\sqrt{۲}$ ❷ $۲\sqrt{۲}$ ❸ $-۲\sqrt{۲}$ ❹ $-۳۲\sqrt{۲}$

**گزینه ۴**

می‌دانیم $ad-bc=۲$ است و:

$$B^۲=\begin{bmatrix}۱+ac & ۰ & a+ad\\ ۰ & ۲b^۲ & ۰\\ c+cd & ۰ & ac+d^۲\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}\to ac=۱\,,\ \underbrace{a(۱+d)=۰}_{(\text{I})}\,,\ \underbrace{c(۱+d)=۰}_{(\text{II})}\,,\ b=\pm۱$$

باید $d=-۱$ باشد، در غیر این صورت، طبق (I) و (II)، باید $a=c=۰$ که با توجه به $|A|=۲$، غیرممکن است.

اکنون با توجه به $ac=۱$، دو حالت ممکن است:

۱) $a=c=۱$: در این‌صورت طبق $ad-bc=۲$ باید $-۱-b=۲$ باشد که غیرممکن است.

۲) $a=c=-۱$: در این‌صورت باید $۱+b=۲$ باشد که مقدار مجاز $b=۱$ را خواهد داشت.

در نتیجه:

$$B^۳=BB^۲=B\times۲I=۲B=\begin{bmatrix}۲ & ۰ & -۲\\ ۰ & ۲\sqrt{۲} & ۰\\ -۲ & ۰ & -۲\end{bmatrix}\Rightarrow ۲(-۲)(۲\sqrt{۲})(-۲)(-۲)=-۳۲\sqrt{۲}$$

---

### دترمینان ۳×۳:

بسط (محاسبه) دترمینان ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۳: $A=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}$ را بر حسب سطر دوم ببینید:

**نکته ۲**

- اولین درایه‌ی سطر دوم ۴ است، علامتِ شروع محاسبات توسط شماره‌ی سطر و ستون این درایه که ۲ و ۱ هستند، تعیین می‌شود:

$(-۱)^{۲+۱}=-۱\ \rightarrow$ اولین علامت منفی است.

- از ماتریس $A$، سطر و ستونی که درایه‌ی ۴ در آن قرار دارد را حذف می‌کنیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۳\\ ۴ & ۵ & ۶\\ ۷ & ۸ & ۹\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{bmatrix}۲ & ۳\\ ۸ & ۹\end{bmatrix}$$

درایه‌ی ۴ و دترمینان ماتریس ۲×۲ بالا با علامت منفی یا مثبت مرحله‌ی قبل در هم ضرب می‌شوند:

$$-(۴)\begin{vmatrix}۲ & ۳\\ ۸ & ۹\end{vmatrix}=-۴(۲\times۹-۳\times۸)=۲۴$$

- برای دو درایه‌ی دیگر ۵ و ۶ واقع در سطر دوم نیز مقادیر مانند بالا حساب شده و سه عدد حاصل با هم جمع می‌شوند تا دترمینان ماتریس حساب شود.

(نیاز به تکرار مرحله‌ی اول نیست، علامت‌ها را یک در میان مثبت و منفی بگیرید.)

پس:

$$|A|=-(۴)\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix}+(۵)\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۷ & ۹ \end{vmatrix}-(۶)\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۷ & ۸ \end{vmatrix}=۲۴-۶۰+۳۶=۰$$

دترمینان را به چند روش دیگر می‌نویسیم:

- **بر حسب سطر سوم:**

اولین علامت $(-۱)^{۳+۱}=+۱$ مثبت است و بقیه یک در میان:

$$|A|=+(۷)\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix}-(۸)\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۶ \end{vmatrix}+(۹)\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix}=-۲۱+۴۸-۲۷=۰$$

- **بر حسب ستون اول:**

اولین علامت $(-۱)^{۱+۱}=+۱$ مثبت است و بقیه یک در میان:

$$|A|=+(۱)\begin{vmatrix} ۵ & ۶ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix}-(۴)\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۸ & ۹ \end{vmatrix}+(۷)\begin{vmatrix} ۲ & ۳ \\ ۵ & ۶ \end{vmatrix}=-۳+۲۴-۲۱=۰$$

روش دیگری برای محاسبه‌ی دترمینان در ادامه‌ی همین بخش خواهیم دید.

اگر حاصل دترمینان $\begin{vmatrix} -۱ & ۱ & -a \\ ۰ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۰ & a \end{vmatrix}$ برابر ۸ باشد، مقدار $a$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۴ ❸ ۲ ❹ ۳

**گزینه ۴**

دترمینان را بر حسب سطر سوم بسط می‌دهیم:

$$۲[(۱)(۱)-(-a)(۲)]-۰[(-۱)(۱)-(-a)(۰)]+a[(-۱)(۲)-(۱)(۰)]=۲(۱+۲a)+a(-۲)=۲a+۲$$

بنابراین: $۲a+۲=۸$ و در نتیجه خواهیم داشت: $a=۳$.

---

**توجه کنید: (مهم)**

برای سرعت بیشتر و در صورت امکان، دترمینان را بر حسب سطر یا ستونی بسط دهید که درایه‌های صفر بیشتری در آن قرار دارد.

جواب‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} -۴ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۲-x & ۱ \\ ۳ & ۲ & ۳-x \end{vmatrix}=۰$ کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ ۱ و $-۴$ ❷ ۱ و ۴ ❸ ۱ و ۵ ❹ ۲ و ۵

**گزینه ۳**

بسط دترمینان بر حسب سطر اول:

$$-4[(2-x)(3-x)-(1)(2)]-1[(1)(3-x)-(1)(3)]+1[(1)(2)-(2-x)(3)]=0$$
$$\rightarrow\ -4(x^2-5x+4)-1(-x)+1(3x-4)=0\ \rightarrow\ -4x^2+24x-20=0$$
$$\xrightarrow{\div(-4)}\ x^2-6x+5=0\ \rightarrow\ (x-5)(x-1)=0\ \Rightarrow\ x=5\,,1$$

---

معادله‌ی $\begin{vmatrix} 0 & x-a & x-b \\ a-x & 0 & x-c \\ b-x & c-x & 0 \end{vmatrix}=0$ دارای چند جواب حقیقی است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ بی‌شمار

**گزینه ۴**

دترمینان را بر حسب سطر اول بسط می‌دهیم:

$$0-(x-a)[(a-x)(0)-(b-x)(x-c)]+(x-b)[(a-x)(c-x)-(b-x)(0)]=0$$
$$\rightarrow\ (x-a)(b-x)(x-c)+(x-b)(a-x)(c-x)=0$$

اگر داخل پرانتزهای سه ضرب آخر، از منفی فاکتور بگیریم:

$$(x-a)(b-x)(x-c)+(-(x-b))(-(a-x))(-(c-x))=0$$
$$\rightarrow\ (x-a)(b-x)(x-c)-(b-x)(x-a)(x-c)=0$$

تساوی خود به خود برقرار بوده و در نتیجه هر $x$ جواب خواهد بود.

---

روشی دیگر برای محاسبه‌ی دترمینان ماتریس مرتبه سه:

**نکته ۳**

**روش ساروس:**

❖ ستون‌های اول و دوم ماتریس را دوباره به ترتیب در سمت راست آن بنویسید:

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} \Rightarrow \left|\begin{matrix} -1 & 1 & -3 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \end{matrix}\right|\begin{matrix} -1 & 1 \\ 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

از سمت چپ، سه قطر اصلی و از سمت راست، سه قطر فرعی در آن مشخص کنید.

**سپس:**

- درایه‌های هر کدام از سه قطر اصلی را در هم ضرب کرده و سه عدد حاصل را جمع می‌کنیم.
- درایه‌های هر قطر فرعی را هم ضرب کرده و سه عدد حاصل را جمع می‌کنیم.

❖ در پایان عدد دوم از عدد اول کم می‌شود.

برای نمونه؛

مقدار دترمینان ماتریس بالا برابر است با:

$$(-۶+۲+۰)-(۰+۰-۱۲)=-۴+۱۲=۸$$

مساحت محدود به نمودار معادله‌ی $\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}=۰$ و محورهای مختصات کدام است؟

❶ $۱۶$ ❷ $\frac{۵۰}{۳}$ ❸ $\frac{۱۰۰}{۳}$ ❹ $۳۴$

**گزینه ۲**

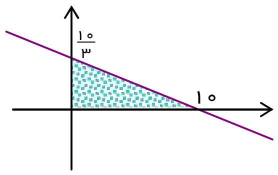
طبق روش ساروس:

$$۰=\begin{vmatrix} x & y & ۲ \\ ۳ & -۱ & ۰ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}\begin{matrix} x & y \\ ۳ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{matrix}=(-x+۰+۶)-(۳y+۰-۴) \Rightarrow x+۳y=۱۰$$

نمودار مورد نظر خط است و باید برخورد آن با محورها تعیین گردد:

$$x=۰: \quad ۳y=۱۰ \Rightarrow y=\frac{۱۰}{۳}$$
$$y=۰: \quad \Rightarrow x=۱۰$$

بنابراین مساحت خواسته شده برابر است با:




$$\frac{۱}{۲}(۱۰\times\frac{۱۰}{۳})=\frac{۵۰}{۳}$$

استفاده از ویژگی‌هایی دترمینان معمولاً سرعت زیادی به محاسبات می‌دهد.

این ویژگی‌ها در مورد ماتریس مربعی از هر مرتبه‌ای برقرار هستند.

**نکته ۴**

**ویژگی ۱:**

بدیهی است که:

اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون صفر باشند، دترمینان برابر صفر است.

در حالت خاص:

$$|\overline{O}|=۰$$

برای نمونه:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & -۳ \\ ۳ & ۰ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۳ \end{vmatrix}=۰$$

برای بیان نکته‌ی بعد:

دترمینان ماتریس زیر را با بسط بر حسب سطر سوم حساب می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ ۰ & d & e \\ ۰ & ۰ & f \end{bmatrix} \Rightarrow |A|=۰-۰+f\begin{vmatrix} a & b \\ ۰ & d \end{vmatrix}=f(ad-۰)=adf$$

**می‌بینید که:**

**دترمینان از ضرب درایه‌های روی قطر اصلی به‌دست آمد.**

**نکته ۵**

**ویژگی ۲:**

مانند نمونه قبل، اگر همه‌ی درایه‌های بالا یا همه‌ی درایه‌های پایین قطر اصلی صفر باشند:

**دترمینان برابر است با ضرب درایه‌های قطر اصلی.**

نمونه‌ی دیگر:

$$\begin{vmatrix} -۱ & ۰ & ۰ \\ ۳ & -۲ & ۰ \\ ۲ & ۵ & ۳ \end{vmatrix}=(-۱)(-۲)(۳)=۶$$

**نتیجه:**

دترمینان هر ماتریس قطری برابر است با ضرب درایه‌های قطر اصلی.

$$\begin{vmatrix} a & ۰ & ۰ \\ ۰ & b & ۰ \\ ۰ & ۰ & c \end{vmatrix}=abc$$

بویژه:

دترمینان ماتریس همانی همواره برابر عدد یک است.

$$|I_۳|=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۱\times۱\times۱=۱ \quad \text{و} \quad |I_۲|=\begin{vmatrix} ۱ & ۰ \\ ۰ & ۱ \end{vmatrix}=۱\times۱=۱$$

**نکته ۶**

**ویژگی ۳:**

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی هم مرتبه باشند:

$$|AB|=|A|\times|B|$$

نتایج:

همواره $|A^n|=|A|^n$ است؛ زیرا:

$$|A^n|=|\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{\text{بار } n}|=\underbrace{|A|\times|A|\times\cdots\times|A|}_{\text{بار } n}=|A|^n$$

همچنین؛

با وجودی‌که تساوی $AB=BA$ ممکن است برقرار نباشد، تساوی $|AB|=|BA|$ برای ماتریس‌های مربعی صحیح است.

**توجه کنید:**

در مورد دترمینان جمع و تفریق ماتریس‌ها، روابطی مشابه ضرب برقرار نیست:

$$|A+B|\neq|A|+|B| \quad \text{و} \quad |A-B|\neq|A|-|B|$$

ماتریس $A=\begin{bmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\4&1&2\end{bmatrix}$ داده شده، دترمینان ماتریس $\frac{1}{2}(A^3-A^4)$ کدام است؟

❶ $-1$ ❷ $-4$ ❸ $-9$ ❹ $-16$

گزینه ۳

می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{1}{2}(A^3-A^4)=\frac{1}{2}A^3(I-A)$$

چون:

$$|A|=\begin{vmatrix}1&0&1\\1&-1&1\\4&1&2\end{vmatrix}=1(-2-1)-0+1(1+4)=2 \quad \text{و} \quad |I-A|=\begin{vmatrix}0&0&-1\\-1&2&-1\\-4&-1&-1\end{vmatrix}=-1(1+8)=-9$$

در نتیجه داریم:

$$|\frac{1}{2}A^3(I-A)|=(\frac{1}{2})^3|A|^3|I-A|=\frac{1}{8}\times2^3\times(-9)=-9$$

---

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی، $AB=\begin{bmatrix}0&5\\5&0\end{bmatrix}$ و $BA=5\begin{bmatrix}1&0\\-1&a\end{bmatrix}$ باشند، مقدار $a$ کدام است؟

❶ $-2$ ❷ $2$ ❸ $1$ ❹ $-1$

گزینه ۴

کافی است تساوی $|AB|=|BA|$ را به‌کار ببریم:

$$\xrightarrow{BA=\begin{bmatrix}5&0\\-5&5a\end{bmatrix}} 0-25=25a-0 \Rightarrow a=-1$$

---

اگر $|A|=-3$ و تساوی $(A-I)^3=I+3A-2A^2$ برقرار باشد، $|A^3-2I|$ کدام است؟

❶ $9$ ❷ $-9$ ❸ $-27$ ❹ $27$

گزینه ۱

با استفاده از اتحاد مکعب دو جمله‌ای و تساوی داده شده، ماتریس $A^3-2I$ را مشخص می‌کنیم:

$$A^3-3A^2+3A-I=I+3A-2A^2 \quad \rightarrow \quad A^3-2I=A^2$$

بنابراین:

$$|A^3-2I|=|A^2|=|A|^2=(-3)^2=9$$

---

**توجه کنید:**

وقتی $A$ و $B$ مربعی نباشند، دترمینان آن‌ها معنی ندارد؛ ولی $AB$ و $BA$ در صورت مربعی بودن، دترمینانشان دارای معنی است. (ولی روابط $|AB|=|A||B|$ و $|AB|=|BA|$ به ترتیب بی‌معنی و نادرست هستند؛ بیان دقیق و کامل‌تر در بخش پایانی!)

یک نمونه‌ی مرتبط ببینید.

برای ماتریس‌های $A=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-1&0\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-1&0&1\\0&1&0\end{bmatrix}$، اگر $C=A\times B$ و $D=B\times C\times A$ باشد، $|D|$ کدام است؟

(نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

1) ۱
2) ۲
3) ۴
4) ۰

**گزینه ۳**

با قدری دقت دیده می‌شود که:

$$D=B\times \underbrace{C}_{A\times B}\times A=(B\times A)^2$$

با محاسبه ضرب داریم: $B\times A=\begin{bmatrix}2&0\\0&1\end{bmatrix}$ و در نتیجه:

$$|D|=|(B\times A)^2|=|B\times A|^2=2^2=4$$

---

**نکته ۷**

**فاکتورگیری:**

از درایه‌های یک سطر یا یک ستون می‌توان فاکتور گرفت:

$$\begin{vmatrix}a&b&rc\\d&e&rf\\g&h&ri\end{vmatrix}=r\begin{vmatrix}a&b&c\\d&e&f\\g&h&i\end{vmatrix}$$

بنابراین:

اگر تمام درایه‌های یک سطر یا یک ستون را در عدد $r$ ضرب کنیم، مقدار دترمینان $r$ برابر می‌شود.

از این ویژگی، موارد زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

❖ اگر ماتریس $A$ از مرتبه‌ی ۳ باشد، در دترمینان ماتریس $rA$، سه بار می‌توان از عدد $r$ فاکتور گرفت:

$$\begin{vmatrix} ra & rb & rc \\ rd & re & rf \\ rg & rh & ri \end{vmatrix} = r\begin{vmatrix} a & b & c \\ rd & re & rf \\ rg & rh & ri \end{vmatrix} = r\times r\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ rg & rh & ri \end{vmatrix} = r\times r\times r\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = r^{۳}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$$

بنابراین: $|rA| = r^{۳}|A|$.

❖ در حالت کلی، اگر ماتریس $A$ مربعی از مرتبه‌ی $n$ باشد، آنگاه:

$$|rA| = r^{n}|A|$$

اگر $|A| = ۴$ و $A$ یک ماتریس $۲\times ۲$ باشد، آنگاه $\left|\frac{|A|}{۲}A\right| + \left|\frac{۲}{|A|}A\right|$ کدام است؟

❶ ۱۸ ❷ ۱۷ ❸ ۱۶ ❹ ۱۵

گزینه ۲

مشابه تست قبل عمل می‌کنیم:

$$\left|\frac{|A|}{۲}A\right| + \left|\frac{۲}{|A|}A\right| = \left|\frac{۴}{۲}A\right| + \left|\frac{۲}{۴}A\right| = |۲A| + \left|\frac{۱}{۲}A\right| = ۲^{۲}|A| + (\frac{۱}{۲})^{۲}|A|$$

$$= ۴(۴) + \frac{۱}{۴}\times ۴ = ۱۷$$

---

اگر $A$ ماتریس مربعی مرتبه سه بوده، $|A| = -۴$ و $(A-I)^{۲} = -۴A$ باشد، حاصل $|A^{۲}+I|$ کدام است؟

❶ ۳۲ ❷ ۱۶ ❸ ۸ ❹ $-۳۲$

گزینه ۱

با توجه به اطلاعات داده شده:

$$A^{۲} - ۲A + I = -۴A \quad \rightarrow \quad A^{۲} + I = -۲A$$

بنابراین:

$$|A^{۲}+I| = |-۲A| = (-۲)^{۳}|A| = -۸(-۴) = ۳۲$$

---

برای ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۲ \\ ۲ & ۱ & ۲ \\ ۲ & ۲ & ۱ \end{bmatrix}$، اگر $|A^{۲} + kA - A| = ۱۲۵$ باشد، دترمینان $(k+۱)I_{۳}$ کدام است؟ ($k \in \mathbb{Z}$)

(نوبت ۱- کنکور ۱۴۰۴)

❶ ۶۴ ❷ ۸ ❸ $-۸$ ❹ $-۶۴$

گزینه ۳

با محاسبه $|A| = ۵$ حاصل شده و چون $A^{۲} + kA - A = A(A + kI - I) = A(A + (k-۱)I)$ است، می‌توان نوشت:

$$۱۲۵ = |A||A + (k-۱)I| \xrightarrow{|A|=۵} |A + (k-۱)I| = ۲۵$$

به آسانی خواهیم دید که $A+(k-1)I=\begin{bmatrix} k & 2 & 2 \\ 2 & k & 2 \\ 2 & 2 & k \end{bmatrix}$. بسط دترمینان بر حسب سطر اول:

$$k(k^2-4)-2(2k-4)+2(4-2k)=25$$

با فاکتورگیری از $k-2$ و مرتب سازی، به معادله‌ی $(k-2)^2(k+4)=25$ و یا با ساده سازی معادله، به $k^3-12k-9=0$ خواهیم رسید. در هر دو صورت، با قدری بررسی و جایگذاری مقادیر، $k=-3$ حاصل خواهد شد. در نتیجه:

$$(k+1)I_3=-2I_3 \Rightarrow |-2I_3|=(-2)^3\times 1=-8$$

**توجه کنید:**

وقتی مانند $k^3-12k-9=0$ ضرایب صحیح هستند، اگر معادله جواب صحیح داشته باشد، باید جواب یک مقسوم علیه عـدد ثابـت معادله (در این‌جا $-9$) باشد؛ پس آن‌ها را در معادله امتحان کنید!

## ۲ وارون ماتریس

برخی از ماتریس‌ها دارای وارون هستند؛ ماتریس وارون، کاربردی مشابه وارون عددها دارد.

**نکته ۸**

**وارون ماتریس:**

اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد، ماتریس $B$ هم مرتبه‌ی آن «**وارون**» یا «**معکوس**» $A$ است، هرگاه:

$$AB = BA = I$$

در این‌صورت $B$ با $A^{-1}$ نشان داده می‌شود؛ واضح است که $A$ هم معکوس $B$ است.

قبل از بیان روش تعیین ماتریس معکوس، به نمونه‌هایی از کاربرد مفهوم ماتریس وارون توجه کنید.

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس بوده و $A$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه $(A^{-1}BA)^{2}$ کدام است؟

❶ $A^{-1}BA$ ❷ $I$ ❸ $A^{-1}B^{2}A$ ❹ $AB^{2}A^{-1}$

**گزینه ۳**

به راحتی می‌نویسیم:

$$(A^{-1}BA)^{2} = A^{-1}B\underbrace{AA^{-1}}_{=I}BA = A^{-1}BIBA = A^{-1}BBA = A^{-1}B^{2}A$$

---

اگر $A^{2} = A + 2I$ باشد، وارون ماتریس $A$ کدام است؟

❶ $A - \frac{I}{2}$ ❷ $\frac{A-I}{2}$ ❸ $\frac{A}{2} - I$ ❹ $\frac{A}{3} + I$

**گزینه ۲**

کافی است عبارت بالا را به صورتی بنویسید که:

ضرب ماتریس $A$ در یک عبارتِ ماتریسی، برابر $I$ شده باشد.

به آسانی می‌توان نوشت:

$$A^{2} - A = 2I \xrightarrow{\div 2} \frac{1}{2}A^{2} - \frac{1}{2}A = I \rightarrow A(\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I) = I$$

پس باید $\frac{1}{2}A - \frac{1}{2}I = \frac{A-I}{2}$ وارون ماتریس $A$ باشد.

---

اگر $A$ یک ماتریس مربع با شرط $A^{2} = 2I$ باشد، ماتریس $(A-I)^{-1}$ کدام است؟

❶ $I$ ❷ $A^{2}$ ❸ $A - I$ ❹ $I + A$

**گزینه ۴**

رابطه‌ی داده شده‌ی $A^{۲}=۲I$ را می‌توان به صورت $A^{۲}=I+I$ و یا $A^{۲}-I=I$ نوشت که در نتیجه داریم:

$$(A-I)(A+I)=I$$

بنابراین طبق تعریف، وارون ماتریس $A-I$، ماتریس $A+I$ است.

---

$A$ ماتریسی مربع است که $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۴ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۴ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۴ \end{bmatrix}$. وارون ماتریس $A^{۲}-A+I$ کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۵}(A-I)$ ❷ $\frac{۱}{۵}(A+I)$ ❸ $\frac{۱}{۳}(A-I)$ ❹ $\frac{۱}{۳}(A+I)$

**گزینه ۲**

با اضافه کردن ماتریس $I$ به دو طرف رابطه‌ی داده شده‌ی $A^{۳}=۴I$، آن را به صورت $A^{۳}+I=۵I$ می‌نویسیم. طبق اتحاد چاق و لاغر:

$$A^{۳}+I=۵I \rightarrow (A+I)(A^{۲}-AI+I^{۲})=(A+I)(A^{۲}-A+I)=۵I$$

با تقسیم دو طرف تساوی بر عدد ۵ خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۵}(A+I)(A^{۲}-A+I)=I$$

طبق تعریف، ماتریس $\frac{۱}{۵}(A+I)$ وارون ماتریس $A^{۲}-A+I$ محسوب خواهد شد.

---

ماتریس‌های $A$ و $B$ هم‌مرتبه و وارون‌پذیر بوده و داریم $A-B=-۳AB$. آنگاه $B^{-۱}-A^{-۱}$ کدام است؟

❶ $I$ ❷ $۳I$ ❸ $-۳I$ ❹ $-I$

**گزینه ۳**

تساوی داده شده‌ی $A-B=-۳AB$ را یک‌بار از سمت چپ در $A^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$A-B=-۳AB \xrightarrow{\times A^{-۱}} \underbrace{A^{-۱}A}_{=I}-A^{-۱}B=-۳\underbrace{A^{-۱}A}_{=I}B \Rightarrow I-A^{-۱}B=-۳B$$

اکنون طرفین تساوی به‌دست آمده را از راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$I-A^{-۱}B=-۳B \xrightarrow{\times B^{-۱}} IB^{-۱}-A^{-۱}\underbrace{BB^{-۱}}_{=I}=-۳BB^{-۱} \Rightarrow B^{-۱}-A^{-۱}=-۳I$$

---

## نکته ۹

**وارون ماتریس ۲×۲:**

اگر $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ داده شده باشد:

❖ شرط این‌که ماتریس $A$ دارای معکوس باشد این است که:

$$|A|=ad-bc\neq ۰$$

❖ در این صورت معکوس $A$ از رابطه‌ی زیر تعیین می‌شود:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

**توجه کنید:**

شرط وارون‌پذیری ماتریس مربع $A$ از هر مرتبه‌ای این است که $|A|\neq ۰$ باشد.

برای نمونه؛

اگر $\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}+X$ باشد، وارون ماتریس $X$ را حساب می‌کنیم.

از تساوی داده شده نتیجه می‌شود که:

$$X=\begin{bmatrix} ۳ & ۵ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & ۵ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۲ \\ ۲ & -۳ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$X^{-۱}=\frac{۱}{۲\times۲-(-۳)\times(-۱)}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$$

«کاربردهای بسیار زیادی از روش بالا را، در ادامه‌ی مبحث ماتریس خواهیم دید.»

## نکته ۱۰

**کاربرد اصلی:**

مهم‌ترین کاربرد ماتریس معکوس در حل معادلات ماتریسی است.

فرض کنید داشته باشیم: $AB=C$؛

- برای تعیین $A$، کافی است $B^{-۱}$ را از راست در دو طرف تساوی ضرب کنیم:

$$AB=C \;\rightarrow\; ABB^{-۱}=CB^{-۱} \;\Rightarrow\; A=CB^{-۱}$$

- برای تعیین $B$، کافی است $A^{-۱}$ را از چپ در دو طرف تساوی ضرب کنیم:

$$AB=C \;\rightarrow\; A^{-۱}AB=A^{-۱}C \;\Rightarrow\; B=A^{-۱}C$$

**به صورت مشابه؛**

در معادله‌ی $AXB=C$، اگر معکوس ماتریس‌های $A$ و $B$ را داشته باشیم، آنگاه:

$$X=A^{-۱}CB^{-۱}$$

**یعنی:**

معکوس $A$ را از چپ و معکوس $B$ را از راست در دو طرف تساوی ضرب می‌کنیم.

اگر $A=\begin{bmatrix}۱&-۱&-۳\\۴&۱&۲\\۲&۱&۳\end{bmatrix}$ و ماتریس $X$ در رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲|A|&|A|\\۱&\frac{۲}{|A|}\end{bmatrix}X=\begin{bmatrix}۳&۰\\-۲&۱\end{bmatrix}$ صدق کند، کوچک‌ترین درایه‌ی قطر اصلی ماتریس $X$ کدام است؟ **(کنکور ۱٤۰۱)**

❶ $-۱۵$ ❷ $-۳$ ❸ $۶$ ❹ $۸$

**گزینه ۳**

با محاسبه داریم: $|A|=۳$؛ پس معادله به صورت $\underbrace{\begin{bmatrix}۶&۳\\۱&\frac{۲}{۳}\end{bmatrix}}_{B}X=\begin{bmatrix}۳&۰\\-۲&۱\end{bmatrix}$ است. اکنون کافی است طرفین معادله را از چپ در $B^{-۱}$ ضرب کنیم:

$$X=B^{-۱}\begin{bmatrix}۳&۰\\-۲&۱\end{bmatrix}=\frac{۱}{۴-۳}\begin{bmatrix}\frac{۲}{۳}&-۳\\-۱&۶\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰\\-۲&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۸&-۳\\-۱۵&۶\end{bmatrix}$$

پس جواب برابر عدد ۶ است.

---

از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۱\end{bmatrix}A\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}$، سطر اول ماتریس $A$ کدام است؟

❶ $[۱۲\quad -۱۷]$ ❷ $[-۲۱\quad ۳۰]$

❸ $[-۱۷\quad ۳۰]$ ❹ $[۱۲\quad -۲۱]$

**گزینه ۴**

معکوس ماتریس‌های دو طرف $A$:

$$\begin{bmatrix}۵&۲\\۳&۱\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{-۱}\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix} \quad و \quad \begin{bmatrix}۴&۳\\۲&۱\end{bmatrix}^{-۱}=\frac{۱}{-۲}\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}$$

طبق نکته‌ی قبل:

$$A=\frac{۱}{۲}\underbrace{\begin{bmatrix}۱&-۳\\-۲&۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۳&۰\\-۱&۲\end{bmatrix}}\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۶&-۶\\-۱۰&۸\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۱&-۲\\-۳&۵\end{bmatrix}$$

$$=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix}۲۴&-۴۲\\--&--\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۱۲&-۲۱\\--&--\end{bmatrix}$$

---

برای دو ماتریس $A$ و $B$ داریم: $A^{۲}-AB+BA-B^{۲}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ و $A-B=\begin{bmatrix} ۳ & ۰ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$. مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $A+B$ کدام است؟

۱) $\frac{۱}{۲}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $-\frac{۱}{۶}$ ۴) $-\frac{۱}{۲}$

**گزینه ۱**

تساوی اول را به صورت $(A+B)(A-B)=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}$ نوشته و مشابه قبل عمل می‌کنیم:

$$A+B=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}(A-B)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\times\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ & ۰ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۶}\begin{bmatrix} ۱ & ۳ \\ ۰ & ۶ \end{bmatrix}$$

مقدار مورد نظر $\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۶}+۰$ است.

---

## نکته ۱۱

**ویژگی‌های وارون:**

- اگر ماتریس $A$ معکوس‌پذیر باشد، آنگاه: $(A^{-۱})^{-۱}=A$.
- معکوس ماتریس همانی خودش است، یعنی: $I^{-۱}=I$.
- توان و وارون را می‌توان جابجا کرد:

$$(A^{n})^{-۱}=(A^{-۱})^{n}$$

- اگر ماتریس‌های $A$ و $B$ معکوس‌پذیر باشند، ماتریس $AB$ نیز معکوس‌پذیر است و:

$$(AB)^{-۱}=B^{-۱}A^{-۱}$$

- **مهم:** اگر ماتریس $A$ معکوس‌پذیر و $r$ عددی غیرصفر باشد، آنگاه: $(rA)^{-۱}=\frac{۱}{r}A^{-۱}$.

**خاصیت ویژه:**

برای ماتریس معکوس‌پذیر $A$ همواره داریم: $|A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$.

زیرا:

$$A^{-۱}A=I \rightarrow |AA^{-۱}|=|I| \rightarrow |A||A^{-۱}|=۱ \Rightarrow |A^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}$$

اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & -۲ \\ ۲ & ۲ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix}$ باشد، ماتریس $A\times B$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱۳ & \frac{۲۱}{۲} \end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix} ۱ & -۲ \\ -۱۸ & -۲۶ \end{bmatrix}$

❸ $\begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix} -۱۹ & ۸ \\ ۲۲ & -۶ \end{bmatrix}$

**گزینه ۳**

ابتدا وارون $A^{-۱}$ را مشخص می‌کنیم تا $A$ معلوم شود:

$$A=(A^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{-۲+۴}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}=-\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$$

اکنون ضرب حساب می‌شود:

$$A\times B=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲ & ۲ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۸ & -۵ \end{bmatrix}=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} ۲۲ & -۶ \\ -۱۴ & ۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱۱ & -۳ \\ -۷ & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}$$

---

اگر $(A-۲I)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}$، مجموع درایه‌های ستون دوم ماتریس $A(A-۲I)^{-۱}$ کدام است؟

❶ ۱۱ ❷ ۹ ❸ ۵ ❹ ۱۶

**گزینه ۳**

از ماتریس داده شده وارون گرفته و سپس $A$ را معلوم می‌کنیم:

$$A-۲I=((A-۲I)^{-۱})^{-۱}=\frac{۱}{۲-۳}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۳ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow\quad A=\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۳ & -۲ \end{bmatrix}+۲I=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}$$

بنابراین:

$$A(A-۲I)^{-۱}=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ ۳ & ۰ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ ۱ & ۳ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۲ & ۵ \\ ۳ & ۶ \end{bmatrix}\Rightarrow\quad ۲+۳=۵$$

---

اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & ۴ \\ -\frac{۱}{۲} & ۱ \end{bmatrix}$ و $۲I-۳A^{-۱}B^{-۱}=\begin{bmatrix} -۴ & -۲ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $۲A-۳B^{-۱}$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۳)

❶ $-۴$ ❷ $-۳$ ❸ $-۲$ ❹ $-۱$

**گزینه ۳**

از $A^{-۱}$ وارون می‌گیریم تا $A$ مشخص شود:

$$A=\frac{۱}{-۲+۱}\begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & ۱ \\ -۱ & ۴ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -۱ \\ ۱ & -۴ \end{bmatrix}$$

اکنون کافی است $A$ را از سمت چپ در تساوی داده شده‌ی دوم ضرب کنیم:

$$\underbrace{A(۲I-۳A^{-۱}B^{-۱})}_{۲AI-۳\underbrace{AA^{-۱}}_{I}B^{-۱}}=A\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}\rightarrow ۲A-۳B^{-۱}=\begin{bmatrix}\frac{۱}{۲} & -۱\\ ۱ & -۴\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-۲ & -۴\\ ۱ & -۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-۲ & -\\ - & ۰\end{bmatrix}\xrightarrow{+}-۲$$

---◈---

اگر $A=\begin{bmatrix}۳ & ۱\\ ۵ & ۲\end{bmatrix}$، دترمینان ماتریس $(A^{-۱})^۲$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۵ ❸ ۲ ❹ ۳

**گزینه ۱**

با استفاده از نکات بالا می‌توان نوشت:

$$|(A^{-۱})^۲|=|A^{-۱}|^۲=\left(\frac{۱}{|A|}\right)^۲\xrightarrow{|A|=۶-۵=۱}|(A^{-۱})^۲|=\left(\frac{۱}{۱}\right)^۲=۱$$

---◈---

اگر $A-B=\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}$ و $|AB|=-۳$ باشد، دترمینان ماتریس $A^{-۱}-B^{-۱}$ کدام است؟

❶ $-۳$ ❷ $-۱$ ❸ ۱ ❹ ۳

**گزینه ۳**

طرفین تساوی ماتریسی را از چپ در $A^{-۱}$ و سپس از راست در $B^{-۱}$ ضرب می‌کنیم:

$$\underbrace{A^{-۱}A}_{=I}-A^{-۱}B=A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}\xrightarrow{\times B^{-۱}}B^{-۱}-\underbrace{A^{-۱}BB^{-۱}}_{=A^{-۱}}=A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}B^{-۱}$$

$$\Rightarrow B^{-۱}-A^{-۱}=A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}B^{-۱}$$

طرفین آخرین تساوی را در منفی ضرب کرده و از دو طرف دترمینان می‌گیریم:

$$A^{-۱}-B^{-۱}=-A^{-۱}\begin{bmatrix}-۱ & ۵\\ ۲ & -۷\end{bmatrix}B^{-۱}=A^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & -۵\\ -۲ & ۷\end{bmatrix}B^{-۱}\rightarrow|A^{-۱}-B^{-۱}|=|A^{-۱}\begin{bmatrix}۱ & -۵\\ -۲ & ۷\end{bmatrix}B^{-۱}|$$

$$=|A^{-۱}|\begin{vmatrix}۱ & -۵\\ -۲ & ۷\end{vmatrix}|B^{-۱}|=\frac{۱}{|A|}\times(-۳)\times\frac{۱}{|B|}=\frac{-۳}{|A||B|}=\frac{-۳}{|AB|}=\frac{-۳}{-۳}=۱$$

---◈---

اگر $A$ و $B$ دو ماتریس مربعی مرتبه‌ی ۲ بوده، $|A+B|=۵$ و $|B|=۲$ باشد، دترمینان ماتریس $AB^{-۱}+I$ کدام است؟

❶ ۱۰ ❷ $\frac{۲}{۵}$ ❸ $\frac{۵}{۲}$ ❹ ۵

**گزینه ۳**

مشابه نمونه‌ی قبلی می‌نویسیم:

$$|AB^{-1}+I|=|AB^{-1}+BB^{-1}|=|(A+B)B^{-1}|=|A+B||B^{-1}|$$
$$=۵\times\frac{۱}{|B|}=\frac{۵}{۲}$$

---

اگر $A^۲-I=-A$ باشد، وارون ماتریس $A^۲$ کدام است؟

❶ $I+A$ ❷ $۲I+A$ ❸ $۲I-A$ ❹ $I-A$

گزینه ۲

طبق فرض داریم:

$$A^۲+A=I \;\rightarrow\; A(A+I)=I \;\Rightarrow\; A^{-۱}=A+I$$

در نتیجه:

$$(A^۲)^{-۱}=(A^{-۱})^۲=(A+I)^۲=\underbrace{A^۲}_{=I-A}+۲A+I=۲I+A$$

---

اگر $(A+I)^{-۱}A=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}$ باشد، سطر دوم ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

❶ $[۳ \quad -۲]$ ❷ $[-۳ \quad ۲]$ ❸ $[۱ \quad ۳]$ ❹ $[-۲ \quad ۳]$

گزینه ۴

از دو طرف تساوی معکوس می‌گیریم. طبق خواص قبل:

$$[(A+I)^{-۱}A]^{-۱}=\begin{bmatrix}۱ & ۱\\ ۲ & ۳\end{bmatrix}^{-۱} \rightarrow A^{-۱}(A+I)=\frac{۱}{۱}\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}$$
$$\rightarrow I+A^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix} \Rightarrow A^{-۱}=\begin{bmatrix}۳ & -۱\\ -۲ & ۱\end{bmatrix}-I=\begin{bmatrix}۲ & -۱\\ -۲ & ۰\end{bmatrix}$$

---

اگر $|A|=۱$ و $|I+A|=۳$ باشد، آنگاه $|I+A^{-۱}|$ کدام است؟

❶ ۳ ❷ ۲ ❸ $\frac{۱}{۳}$ ❹ $\frac{۱}{۲}$

گزینه ۱

به جای $I$ در عبارت خواسته شده قرار داده $A^{-۱}A$ و خواص ماتریس‌ها، وارون و دترمینان را بکار می‌بریم:

$$|A^{-۱}A+A^{-۱}|=|A^{-۱}(A+I)|=|A^{-۱}||A+I|=\frac{۱}{|A|}\times ۳=\frac{۳}{۱}=۳$$

---

## تَرانَهادهی ماتریس:

اگر در ماتریس $A$، درایه‌ی $ij$ـاُم را به درایه‌ی $ji$ـاُم تبدیل کنیم، «تَرانَهاده» ماتریس $A$ حاصل و با نماد $A^t$ نمایش داده می‌شود. به زبان ساده:

سطرها در ماتریس $A$ ، با همان ترتیب به ستون‌ها در ماتریس $A^t$ تبدیل شوند.

برای نمونه؛

$$A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}\Rightarrow A^t=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B=\begin{bmatrix}-9&3\\2&1\end{bmatrix}\Rightarrow B^t=\begin{bmatrix}-9&2\\3&1\end{bmatrix}$$

فرض کنید $A=\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}$. اگر $BA^tA=52I$ باشد، ماکزیمم مقدار درایه‌های ماتریس $B$ کدام است؟ **(کنکور ۱۴۰۰)**

❶ ۱۴ ❷ ۱۸ ❸ ۲۴ ❹ ۲۸

**گزینه ۴**

ماتریس $A^tA$ را مشخص می‌کنیم:

$$A^tA=\begin{bmatrix}1&2&3\\-1&1&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-1\\2&1\\3&1\end{bmatrix}=\underbrace{\begin{bmatrix}14&4\\4&3\end{bmatrix}}_{C}$$

تساوی داده شده را به صورت مناسبی می‌نویسیم:

$$BC=52I\xrightarrow{\div 52}B\times\frac{1}{52}C=I\Rightarrow B^{-1}=\frac{1}{52}C$$

پس با معکوس گرفتن از تساوی سمت راست، ماتریس $B$ و مقدار خواسته شده معلوم می‌شود:

$$B=(\frac{1}{52}C)^{-1}=\frac{1}{\frac{1}{52}}C^{-1}=52\times\frac{1}{42-16}\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}\Rightarrow B=2\begin{bmatrix}3&-4\\-4&14\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6&-8\\-8&28\end{bmatrix}$$

---

**توجه کنید: (مهم)**

وجود ماتریس وارون، برخی خواص ماتریس‌ها را قوی‌تر می‌کند. دو مورد معروف:

- اگر $AB=\overline{O}$ یا $BA=\overline{O}$ بوده و بدانیم $A$ وارون دارد، باید $B=\overline{O}$ باشد:

$$(AB=\overline{O} \quad \text{و} \quad |A|\neq 0)\Rightarrow B=\overline{O}$$

زیرا:

$$AB=\overline{O}\xrightarrow{A^{-1}\times}A^{-1}AB=A^{-1}\overline{O}\Rightarrow B=\overline{O}$$

- قانون حذف برای ماتریس وارون‌پذیر $A$ برقرار است:

$$(AB=AC \quad \text{و} \quad |A|\neq 0)\Rightarrow B=C$$

زیرا:

$$AB=AC\xrightarrow{A^{-1}\times}A^{-1}AB=A^{-1}AC\Rightarrow B=C$$

## ۳ دستگاه معادلات

در این بخش، کاربرد ماتریس‌ها را در حل دستگاه معادلات خواهیم دید.

**بیان ماتریسی:**

شکل کلی دستگاه دو معادله و دو مجهول به صورت زیر است:

$$\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$$

دستگاه معادلات دو مجهولی فوق را می‌توان به‌صورت معادله‌ی ماتریسی $\underbrace{\begin{bmatrix} a & b \\ a' & b' \end{bmatrix}}_{A}\underbrace{\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}}_{X}=\underbrace{\begin{bmatrix} c \\ c' \end{bmatrix}}_{B}$ یا به‌طور ساده $AX=B$ نوشت.

در این نمایش، $A$ ماتریس «**ضرایب**»، $X$ ماتریس «**مجهولات**» و $B$ ماتریس «**مقادیر معلوم**» است.

**نکته ۱۲**

**روش حل دستگاه:**

در دستگاه معادله‌ی $AX=B$، اگر ماتریس $A$ دارای معکوس باشد، ماتریس جواب عبارت است از:

$$X=A^{-1}B$$

زیرا:

$$AX=B \xrightarrow{A^{-1}\times} \underbrace{A^{-1}A}_{=I}X=A^{-1}B \Rightarrow X=A^{-1}B$$

در دستگاه $\begin{cases} ax+by=۲ \\ cx+dy=-۱ \end{cases}$ معکوس ماتریس ضرایب مجهولات به‌صورت $\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ است. $x+y$ کدام است؟

❶ $-۴$ ❷ $-۲$ ❸ $۲$ ❹ $۴$

**گزینه ۴**

توجه کنید که ماتریس $A^{-1}$ داده شده است. پس:

$$X=A^{-1}B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۲ \\ -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۱ \\ ۳ \end{bmatrix} \Rightarrow x+y=۱+۳=۴$$

در مورد تعداد جواب‌های دستگاه $\begin{cases} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{cases}$ و با بیان ماتریسی $AX=B$ سه حالت ممکن است رخ دهد:

**نکته ۱۳**

**حالت ۱:**

اگر $|A|=ab'-a'b\neq 0$، یعنی: $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$، آنگاه دستگاه **«دقیقاً یک جواب»** برای $x$ و $y$ دارد که از رابطه‌ی:

$$X=A^{-1}B$$

یا روش‌های دیگر به‌دست می‌آیند.

**بیان هندسی:**

در این حالت، خط‌های $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ دقیقاً در یک نقطه متقاطع هستند کـه مختـصات آن نقطـه، همـان جواب دستگاه است.

**نکته ۱۴**

**حالت ۲:**

اگر $|A|=ab'-a'b=0$، یعنی: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، و بعلاوه داشته باشیم:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$$

آنگاه دستگاه **«بی‌شمار»** جواب برای $x$ و $y$ دارد.

**بیان هندسی:**

در این حالت، خط‌های $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ بر هم منطبق بوده و تمام نقاط روی خط، جواب‌های دستگاه هستند.

به‌ازای کدام مقدار $a$، دستگاه معادلات $\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ y=a(x-۲) \end{cases}$ بی‌شمار جواب دارد؟

❶ $-\frac{۳}{۲}$ ❷ $-\frac{۲}{۳}$ ❸ $\frac{۲}{۳}$ ❹ $\frac{۳}{۲}$

**گزینه ۲**

ابتدا دستگاه را استاندارد کرده و سپس طبق نکته‌ی قبل عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} ۲x+۳y=۴ \\ -ax+y=-۲a \end{cases} \rightarrow \frac{۲}{-a}=\frac{۳}{۱}=\frac{۴}{-۲a} \rightarrow -۳a=۲ \Rightarrow a=-\frac{۲}{۳}$$

اگر دستگاه معادلات $\begin{cases} ax-۳y=۱ \\ ۲۰x+by=۵ \end{cases}$ بی‌شمار جواب داشته باشد، کدام دستگاه معادلات، جواب منحصر به‌فرد دارد؟

❶ $\begin{cases} ۱۵x-۴y=۱ \\ bx+ay=۳ \end{cases}$ ❷ $\begin{cases} ax-۱۵y=۱ \\ ۴x+by=۵ \end{cases}$ ❸ $\begin{cases} ax+۱۵y=۵ \\ bx+ay=۳ \end{cases}$ ❹ $\begin{cases} ax+by=۲ \\ ۳ax+۳by=۵ \end{cases}$

**گزینه ۳**

باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{۲۰}=\frac{-۳}{b}=\frac{۱}{۵} \Rightarrow a=۴\ ,\ b=-۱۵$$

فقط در مورد سوم، شرط $\frac{a}{a'}\neq\frac{b}{b'}$ برقرار است:

$$\frac{۴}{-۱۵}\neq\frac{۱۵}{۴}$$

---

**نکته ۱۵**

**حالت ۳**

اگر $|A|=ab'-a'b=۰$، یعنی: $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$، ولی:

$$\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}\neq\frac{c}{c'}$$

آنگاه دستگاه **«بدون جواب»** است.

**بیان هندسی:**

در این حالت، خط‌های $ax+by=c$ و $a'x+b'y=c'$ موازی و از هم جدا بوده و چون نقطه‌ی مشترک ندارند، هیچ جوابی برای دستگاه وجود نخواهد داشت.

دستگاه معادلات $\begin{cases} (m-۳)x+۳y=m \\ ۴x+(m+۱)y=۲ \end{cases}$ به‌ازای کدام مقدار $m$ بدون جواب است؟

❶ $-۵$ ❷ $۵$ ❸ $۳$ ❹ $-۳$

**گزینه ۲**

ابتدا شرط $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}$ را برقرار می‌کنیم:

$$\frac{m-۳}{۴}=\frac{۳}{m+۱} \rightarrow m^۲-۲m-۳=۱۲ \rightarrow m^۲-۲m-۱۵=۰ \Rightarrow m=-۳\ ,\ m=۵$$

برای $m=-۳$ داریم: $\frac{a}{a'}=\frac{-۶}{۴}$ و $\frac{c}{c'}=\frac{-۳}{۲}$ و بنابراین $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. پس $m=-۳$ قابل قبول نبوده و $m=۵$ جواب است.

---

در پایان این بخش، به حالت خاصی توجه کنید.

در معادله‌ی ماتریسی $AX=B$، اگر $B=\overline{O}$ (ماتریس صفر) باشد، دستگاه به صورت $AX=\overline{O}$ تبدیل شده که به آن دستگاه «**هَمگِن**» گفته می‌شود. چون $X=\overline{O}$ همیشه یک جواب این دستگاه است، بنابراین:

دستگاه معادلات همگن $AX=\overline{O}$ حداقل یک جواب دارد.

تعیین دقیق وضعیت جواب‌های دستگاه همگن:

**نکته ۱۶**

**دستگاه همگن:**

برای دستگاه معادله‌ی همگن $AX=\overline{O}$ فقط دو حالت وجود دارد:

- اگر $|A|\neq 0$ باشد، آنگاه فقط یک جواب $X=\overline{O}$ برای دستگاه وجود دارد.
- اگر $|A|=0$ باشد، آنگاه دستگاه بی‌شمار جواب دارد.

**توجه کنید:**

در حالت $|A|\neq 0$، ماتریس $A^{-1}$ موجود بوده و خواهیم داشت:

$$AX=\overline{O}\xrightarrow{A^{-1}\times}X=A^{-1}\times\overline{O}=\overline{O}$$

## ۴ ویژه صد درصدی‌ها

«بررسی نمونه‌هایی پیشرفته‌تر و برخی نکات تکمیلی این مبحث با هدف گذاری درصد ۱۰۰ در آزمون‌ها»

**ADVANCED**

با هدف یادگیری عمیق‌تر و پیشرفت بیشتر، این بخش را دنبال کنید . . .

اگر $\begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix} = m$ باشد، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ \frac{۱}{b} & ۱ & b \\ \frac{۱}{c} & ۱ & c \end{vmatrix}$ کدام است؟ $(a,b,c \neq ۰)$

❶ $m+a+b+c$ ❷ $\frac{m}{abc}$ ❸ $mabc$ ❹ $a$

**گزینه ۲**

در تساوی داده شده، در سطر اول از $a$، در سطر دوم از $b$ و در سطر سوم از $c$ فاکتور می‌گیریم:

$$m = \begin{vmatrix} ۱ & a & a^۲ \\ ۱ & b & b^۲ \\ ۱ & c & c^۲ \end{vmatrix} = abc \begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ \frac{۱}{b} & ۱ & b \\ \frac{۱}{c} & ۱ & c \end{vmatrix} \xrightarrow{\div abc} \begin{vmatrix} \frac{۱}{a} & ۱ & a \\ \frac{۱}{b} & ۱ & b \\ \frac{۱}{c} & ۱ & c \end{vmatrix} = \frac{m}{abc}$$

گاهی یک درایه از ماتریس تغییر کرده و تغییرِ دترمینان ماتریسِ جدید خواسته می‌شود:

### نکته ۱۷

در ماتریس مربعی $A$ مرتبه‌ی ۳، فرض کنید درایه‌ی $a_{ij}$ با عدد $k$ جمع شود.
سطر و ستون شامل درایه‌ی $a_{ij}$ را حذف کنید تا ماتریس $M$ از مرتبه‌ی ۲ باقی بماند.
در این صورت:
دترمینان ماتریس جدید برابر $|A| + k(-۱)^{i+j}|M|$ خواهد شد.

در دترمینان $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix}$، اگر به عنصر واقع در سطر سوم و ستون سوم ۴ واحد اضافه شود و مقدار دترمینان تغییر نکند، آنگاه $a$ کدام است؟

❶ $-\frac{۲}{۳}$ ❷ $-\frac{۳}{۲}$ ❸ $\frac{۲}{۳}$ ❹ $\frac{۳}{۲}$

گزینه ۲

طبق فرض داریم $\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲+۴ \end{vmatrix}$ و لذا با استفاده از نکته‌ی گفته شده در بالا:

$$\begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} + ۴A_{۳,۳} = \begin{vmatrix} ۲ & ۱ & ۳ \\ -۳ & a & ۱ \\ ۴ & ۲ & -۲ \end{vmatrix} \rightarrow A_{۳,۳} = ۰ \rightarrow (-۱)^{۶}\begin{vmatrix} ۲ & ۱ \\ -۳ & a \end{vmatrix} = ۰$$

$$\rightarrow ۲a + ۳ = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۳}{۲}$$

---

با افزودن یک واحد به کدام درایه‌ی ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۱۲ \\ ۳ & ۷ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل دترمینان تغییر نمی‌کند؟

❶ $a_{۲۳}$ ❷ $a_{۳۳}$ ❸ $a_{۲۲}$ ❹ $a_{۳۲}$

گزینه ۴

طبق نکته‌ی قبل، باید مقدار دترمینان $|M|$ مربوط به آن درایه صفر باشد:

درایه‌ی $a_{۳۳}$: $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۴ & ۵ \end{vmatrix} = -۳ \neq ۰$

درایه‌ی $a_{۲۳}$: $\begin{vmatrix} ۱ & ۲ \\ ۳ & ۷ \end{vmatrix} = ۱ \neq ۰$

درایه‌ی $a_{۳۲}$: $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۴ & ۱۲ \end{vmatrix} = ۰$

درایه‌ی $a_{۲۲}$: $\begin{vmatrix} ۱ & ۳ \\ ۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۸ \neq ۰$

---

برخی دیگر از ویژگی‌های دترمینان و کاربردهایی از آن‌ها:

**نکته ۱۸**

**برابری دو سطر یا ستون:**

اگر دو سطر (یا دو ستون) ماتریس با هم برابر باشند، آنگاه دترمینان برابر صفر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = ۰$$

با استفاده از ویژگی فوق، موارد زیر استنتاج می‌شود:

- اگر در یک ماتریس، یک سطر یا ستون مضربی از سطر یا ستون دیگر باشد، دترمینان آن صفر است:

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ ra & rb & rc \end{vmatrix} = r \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ a & b & c \end{vmatrix} = r \times ۰ = ۰$$

- اگر درایه‌های یک سطر (ستون) با درایه‌های یک سطر (ستون) دیگر نظیر به نظیر متناسب باشند، دترمینان برابر صفر است. مانند دترمینان زیر که درایه‌های سطر اول و سوم متناسب‌اند:

$$\begin{vmatrix} a+b+c & a+b+c & a+b+c \\ a & b & c \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{vmatrix} = ۰$$

زیرا با فاکتورگیری از $a+b+c$ در سطر اول و عدد ۲ در سطرسوم خواهیم داشت:

$$(a+b+c)(۲)\underbrace{\begin{vmatrix} ۱ & ۱ & ۱ \\ a & b & c \\ ۱ & ۱ & ۱ \end{vmatrix}}_{=۰} = ۲(a+b+c) \times ۰ = ۰$$

**توجه کنید:**

از خاصیت ضربی دترمینان:

$$|AB| = |A| \times |B|$$

نتیجه‌ای مهم حاصل می‌شود که بدون ذکر دلیل، آن را بیان می‌کنیم. فرض کنیم $m$ و $n$ دو عدد طبیعی و $m > n$ باشد.

اگر $A_{m\times n}$ و $B_{n\times m}$ دو ماتریس (غیر مربعی) دلخواه باشند، آنگاه:

- ❖ $AB$ ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی $m$ بوده و دترمینان آن همواره صفر است.
- ❖ $BA$ نیز ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی $n$ است، ولی در مورد دترمینان آن چیز خاصی نمی‌توان گفت.

در واقع:

| |
|---|
| در بین ماتریس‌های $AB$ و $BA$ ، هر کدام که مرتبه‌ی بزرگ‌تری دارد، دترمینانش برابر صفر است. |

دو ماتریس $A = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix}$ داده شده‌اند. حاصل $|AB| + |BA|$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۰ ❸ ۲ ❹ ۳

**گزینه ۴**

ماتریس $AB$ از مرتبه‌ی ۲ و ماتریس $BA$ از مرتبه‌ی ۳ است؛ پس طبق نکته‌ی قبل $|BA| = ۰$ است. بعلاوه:

$$AB = \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & -۱ \\ ۲ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ ۱ & -۱ \\ ۲ & ۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۳ & ۴ \end{bmatrix} \to |AB| = ۰ + ۳ = ۳ \Rightarrow |AB| + |BA| = ۳ + ۰ = ۳$$

---

**نکته‌ی پایانی:**

برای سه عدد دلخواه $a$، $b$ و $c$، دترمینان زیر را دترمینان «واندِرموند» گویند و مقدار آن نیز به صورت گفته شده قابل محاسبه است:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (a-b)(b-c)(c-a)$$

معادله‌ی $\begin{vmatrix} a^2 & b^2 & x^2 \\ a & b & x \\ a^3 & b^3 & x^3 \end{vmatrix} = 0$ که در آن $(a > b > 0)$ چند ریشه دارد؟

❶ هیچ
❷ سه ریشه‌ی متمایز
❸ یک
❹ یک ریشه‌ی مضاعف و یک ریشه‌ی ساده

گزینه ۲

ابتدا از ستون‌های اول تا سوم به ترتیب از $a$، $b$ و $x$ فاکتور می‌گیریم:

$$abx\begin{vmatrix} a & b & x \\ 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{vmatrix} = -abx\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & x \\ a^2 & b^2 & x^2 \end{vmatrix}$$

اکنون طبق فرمول واندرموند می‌توان نوشت:

$$-abx(a-b)(b-x)(x-a) = 0 \Rightarrow \quad x = 0 \; , \; x = a \; , \; x = b$$

## TEST تمرین تست

۱– اگر $A=\begin{bmatrix} ۲ & -۱ \\ ۳ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۱ & ۷ \\ ۲ & ۳ \end{bmatrix}$، حاصل $|AB|+|A+B|$ کدام است؟

❶ $-۱۹$ ❷ $۱۹$ ❸ $۱۰۵$ ❹ $-۳۷$

۲– اگر $A=\begin{bmatrix} ۰ & ۱ \\ ۱ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، در ماتریس $(۲A)^{-۱}$ درایه‌ی سطر دوم و ستون اول کدام است؟

❶ $-۱$ ❷ $۱$ ❸ $۲$ ❹ $-\frac{۱}{۲}$

۳– اگر $A=\begin{bmatrix} -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۰ & -۱ \\ ۱ & ۰ \end{bmatrix}$، حاصل $(A+B)^{-۱}-A^{-۱}-B^{-۱}$ کدام است؟

❶ $B=\begin{bmatrix} ۰ & ۲ \\ -۲ & ۰ \end{bmatrix}$ ❷ $\overline{O}$ ❸ $۲I$ ❹ $-۲I$

۴– به‌ازای کدام مقدار $m$ ماتریس $\begin{bmatrix} m-۱ & -۱ \\ -۲ & m \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر است؟

❶ $m\neq -۱,-۲$ ❷ $m\neq ۱,۲$ ❸ $m\neq -۱,۲$ ❹ $m\neq ۱,-۲$

۵– اگر $A^{-۱}=\begin{bmatrix} ۳ & ۲ \\ ۶ & -۷ \end{bmatrix}$، آنگاه دترمینان ماتریس $A$ کدام است؟

❶ $\frac{۱}{۳۳}$ ❷ $\frac{۱}{۹}$ ❸ $۱$ ❹ $۳۳$

۶– برای آن‌که دستگاه $\begin{cases} ۲x+my=۳ \\ x-\frac{m}{۲}y=y \end{cases}$ دارای جواب منحصر به‌فرد باشد باید:

❶ $m\neq -۱$ ❷ $m\neq ۲$ ❸ $m\neq -۲$ ❹ $m=۲$

۷– اگر $A=\begin{bmatrix} -۵ & ۲ \\ ۳ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ \\ c & -۶ \end{bmatrix}$ ماتریسی وارون‌ناپذیر باشد، درایه‌ی سطر اول و ستون دوم ماتریس $A^{-۱}B+BA^{-۱}$ کدام است؟

❶ $۵$ ❷ $۳۸$ ❸ $-۲۸$ ❹ $-۱۰$

۸– اگر $A=\frac{۱}{۲}\begin{bmatrix} -۱ & ۱ \\ ۰ & ۲ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $A^{-۱}$ کدام است؟

❶ $۴$ ❷ $۱$ ❸ $۲$ ❹ $\frac{۱}{۲}$

۹ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 0 & -\tan\alpha \\ \tan\alpha & 0 \end{bmatrix}$ و $I$ ماتریس همانی مرتبه‌ی دو باشد، سطر اول ماتریس $(I-A)^{-1}(I+A)$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & -\sin 2\alpha\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}\cos 2\alpha & \sin 2\alpha\end{bmatrix}$

❸ $\begin{bmatrix}\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}-\sin 2\alpha & \cos 2\alpha\end{bmatrix}$ (کنکور ۹۲)

۱۰ـ اگر $A^k=\begin{bmatrix} 1-3k & -9k \\ k & 1+3k \end{bmatrix}$، $(k\geq 0)$، حاصل $|(A^{-1})^4|$ کدام است؟

❶ $1$ ❷ $\frac{1}{3}$ ❸ $-\frac{1}{3}$ ❹ $-1$

۱۱ـ اگر $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 7 \\ 2 & -1 & 1 \\ x & 1 & 2 \end{vmatrix}=A+x\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$، مقدار $A$ کدام است؟

❶ ۳ ❷ ۴ ❸ ۵ ❹ ۶

۱۲ـ به‌ازای کدام مقدار $k$ معادله‌ی دترمینان $\begin{vmatrix} x & 0 & k \\ 1 & x+1 & 0 \\ 2 & 0 & x+2 \end{vmatrix}=0$ فقط یک ریشه دارد؟

❶ $1$ ❷ $-1$ ❸ $0$ ❹ $2$

۱۳ـ اگر $A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & -a & -2 \\ 1 & a & 1 \end{bmatrix}$ و $|A^4|=25$، مقدار $a$ کدام است؟

❶ فقط $\sqrt{5}$ ❷ فقط $-\sqrt{5}$ ❸ $\pm\sqrt{5}$ ❹ $0$

۱۴ـ مجموع ریشه‌های معادله‌ی $\begin{vmatrix} 2 & 3 & x \\ 4 & 9 & x^2 \\ 8 & 27 & x^3 \end{vmatrix}=0$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۰ ❸ ۶ ❹ ۵

۱۵ـ اگر دترمینان ماتریس $A=\begin{bmatrix} -1 & m & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ با دترمینان ماتریس وارون $A$ برابر باشد، $m$ کدام است؟ (کنکور ۸۴)

❶ ۱ و ۱− ❷ ۰ و ۲− ❸ ۰ و ۲ ❹ ۲ و ۲−

۱۶ـ اگر $C$ یک ماتریس وارون‌پذیر از مرتبه‌ی دو باشد، حاصل $(C^{-1}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}C)^2$ کدام است؟

❶ $C^{-1}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}C$
❷ $C^{-1}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}C$
❸ $(C^{-1})^{2}\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}C^{2}$
❹ $(C^{-1})^{2}\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}C^{2}$

۱۷- اگر $A$ یک ماتریس مربعی باشد به‌طوری که $A^{2} = \bar{o}$ و $A^{3} = \bar{o}$، آنگاه معکوس ماتریس $I - A$ به کدام صورت است؟

❶ $A^{2} - A$
❷ $A^{2} + A$
❸ $A^{2} - A + I$
❹ $A^{2} + A + I$

(کنکور ۸۹)

۱۸- مقادیر $x$ از رابطه‌ی $\begin{vmatrix} 0 & x-3 & x-2 \\ x+3 & 0 & -4 \\ x+2 & 6 & 0 \end{vmatrix} = 0$ کدام است؟ (کنکور ۹۷)

❶ $-1$ و $-6$
❷ $-1$ و $6$
❸ $1$ و $-6$
❹ $1$ و $6$

۱۹- اگر ماتریس $A$ وارون‌پذیر و $A^{-1} = A$ باشد، ماتریس $(A + A^{-1})^{2}$ برابر کدام است؟

❶ $I$
❷ $2I$
❸ $3I$
❹ $4I$

۲۰- اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$، $B = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $A^{-1}B = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ باشد، $a$ کدام است؟

❶ $1$
❷ $2$
❸ $-1$
❹ $-2$

۲۱- اگر $A$ ماتریسی $2 \times 2$ و غیرصفر باشد به طوری که $A^{2} = A$ و $I + \lambda A$ وارون ماتریسی $I - 3A$ باشد، آنگاه $\lambda$ کدام است؟

❶ $-\frac{2}{3}$
❷ $-\frac{3}{2}$
❸ $\frac{3}{4}$
❹ $-\frac{3}{4}$

۲۲- اگر $\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}\left(A - \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 7 & -4 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام است؟

❶ $-9$
❷ $3$
❸ $-3$
❹ $9$

۲۳- اگر $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ و $B^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های $(A+B)^{-1}$ کدام است؟

❶ $-\frac{1}{10}$
❷ $\frac{1}{10}$
❸ $-\frac{1}{5}$
❹ $\frac{5}{6}$

۲۴- اگر $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & -5 & 2 \end{bmatrix} \times A \times \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 6I$ باشد، آنگاه $|A|$ کدام است؟

❶ $-۱$ ❷ ۱ ❸ $-۶$ ❹ ۶

۲۵- اگر $A^{۲}=۴A-۳I$ و $A^{-۱}=mA+nI$ باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۲۶- اگر $A^{۳}=\begin{bmatrix} ۸ & ۰ \\ a & ۱ \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $|A|A^{۲}$ چقدر است؟

❶ ۴ ❷ ۲ ❸ ۱۶ ❹ ۸

۲۷- ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & ۱ \\ \frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$ در تساوی $A=A^{-۱}B$ صدق می‌کند. مجموع درایه‌های قطر فرعی ماتریس $B$ چقدر است؟

❶ $\frac{۳}{۴}$ ❷ $\frac{۳}{۲}$ ❸ $\frac{۱}{۲}$ ❹ ۰

۲۸- معادله‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix} -۲ & m+۶ \\ ۳m-۱ & ۳+۲m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸-m \\ m+۴ \end{bmatrix}$ به ازای کدام مقدار $m$ نمایانگر دو خط منطبق است؟

❶ $-۹$ ❷ ۹ ❸ $-۷$ ❹ ۰

۲۹- اگر $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}=\frac{۱}{۵۴۰}$ باشد، مقدار $\begin{vmatrix} ۱۰a & ۶b & ۱۲c \\ ۳۵d & ۲۱e & ۴۲f \\ ۱۵g & ۹h & ۱۸i \end{vmatrix}$ کدام است؟

❶ ۲ ❷ $\frac{۳}{۲}$ ❸ ۷ ❹ ۱۴

۳۰- اگر $A$ ماتریسی وارون‌پذیر از مرتبه‌ی دو و $|B-I|=۲$ باشد، دترمینان ماتریس $I-A^{-۱}BA$ کدام است؟

❶ $-۲$ ❷ $-\frac{۱}{۲}$ ❸ $\frac{۱}{۲}$ ❹ ۲

۳۱- اگر $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۱ \\ -۲ & -۱ \end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix} ۳ & ۱ \\ ۰ & ۱ \end{bmatrix}$، حاصل $(BAB^{-۱})^{۱۳۹۸}$ کدام است؟

❶ $I$ ❷ $-I$ ❸ $A$ ❹ $-A$

۳۲- مقدار $\begin{vmatrix} x & ۱۲ & ۶+۷x \\ y & ۲۸ & ۱۴+۷y \\ z & ۴ & ۲+۷z \end{vmatrix}$ برابر کدام است؟

❶ $x+y+z$ ❷ $۷(x+y+z)$ ❸ ۴۴ ❹ صفر

۳۳- اگر $A=\begin{bmatrix} ۴ & ۲ \\ ۱۱ & ۶ \end{bmatrix}$ و $B^{-۱}C=۵I$ باشد، مجموع درایه‌های قطر اصلی ماتریس $(CA)^{-۱}B$ کدام است؟

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۵۰ ❹ ۲۵

**نکته:** اگر $A$ و $B$ وارون‌پذیر باشند، ماتریس $AB$ نیز چنین است و داریم: $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$

۳۴– از رابطه‌ی ماتریسی $\begin{bmatrix}۲&۳\\۴&۵\end{bmatrix}X\begin{bmatrix}۲&-۱\\-۴&۳\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۴&۰\\۰&۸\end{bmatrix}$، ماتریس $X$ کدام است؟ (کنکور ۹۹)

❶ $\begin{bmatrix}۷&۹\\۴&۴\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}-۹&-۷\\۴&۴\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}۹&۷\\-۴&-۴\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}۷&۹\\۲&-۲\end{bmatrix}$

۳۵– اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۱\\۴&۳\end{bmatrix}$، از رابطه‌ی ماتریسی $AX=A-۲I$ ماتریس $X$ کدام است؟ (کنکور ۹۸)

❶ $\begin{bmatrix}-۲&۲\\۳&-۱\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}-۲&۱\\۴&-۱\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}۲&-۱\\۴&۲\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}۱&۲\\۴&-۱\end{bmatrix}$

۳۶– اگر $A=\begin{bmatrix}۲&۳\\-۲&-۱\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱&۱\\۳&۱\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $-\frac{۱}{۴}A^{-۱}B^{۳}$ برابر کدام است؟

❶ $-\frac{۱}{۱۶}$ ❷ $-\frac{۱}{۸}$ ❸ $\frac{۱}{۸}$ ❹ $\frac{۱}{۱۶}$

۳۷– در کدام ماتریس اگر به همه‌ی درایه‌ها مقدار دلخواه و یکسانی اضافه کنیم، دترمینان تغییر نمی‌کند؟

❶ $\begin{bmatrix}۷&۹\\۴&۶\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}-۹&۷\\-۲&۴\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}۷&۸\\-۹&-۶\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}۵&۹\\۹&-۵\end{bmatrix}$

۳۸– اگر $\sqrt{۳}A=\begin{bmatrix}|A|+۲&|A|-۲\\|A|&|A|+۱\end{bmatrix}$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $A$ کدام است؟

❶ $-\sqrt{۳}$ ❷ $-\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ❸ $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ❹ $\sqrt{۳}$

۳۹– اگر $A$ یک ماتریس وارون‌پذیر مرتبه‌ی دو و $A=\begin{bmatrix}۱&۲\\۰&۱\end{bmatrix}-A\begin{bmatrix}۲&۵\\۲&۲\end{bmatrix}$ باشد، سطر اول ماتریس $A$ کدام است؟

❶ $\begin{bmatrix}۱&-۱\end{bmatrix}$ ❷ $\begin{bmatrix}۲&-۱\end{bmatrix}$ ❸ $\begin{bmatrix}-۱&۲\end{bmatrix}$ ❹ $\begin{bmatrix}-۱&-۲\end{bmatrix}$

۴۰– اگر $A$ ماتریسی مربعی و $(A+I)^{۳}=o$ باشد، حاصل $A^{-۱}+۷I$ برابر کدام است؟

❶ $(A-I)(A-۴I)$ ❷ $-(A+I)(A+۴I)$
❸ $-(A-I)(A+۴I)$ ❹ $(A-I)(A+۴I)$

۴۱– اگر $A+۳A^{-۱}=o$ باشد، ماتریس $A^{۷}$ برابر کدام است؟

❶ $۸۱A$ ❷ $-۲۷A$ ❸ $-۸۱A$ ❹ $۲۷A$

۴۲– اگر $A=\begin{bmatrix}\log_۶ ۳&\log_۶ ۲\\\log_۶ ۲&\log_۶ ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۶^{|A|}&۲^{|A|}\\۳^{|A|}&۳۶^{|A|}\end{bmatrix}$ باشد، مقدار دترمینان $B$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۲)

❶ $\frac{15}{4}$ ❷ $\frac{9}{4}$ ❸ $\frac{9}{8}$ ❹ $\frac{15}{8}$

۴۳– اگر $A$ ماتریس $3\times3$ باشد و $|A|=4$، آنگاه دترمینان ماتریس $A|A|$ کدام است؟ (کنکور ۹۸)

❶ ۶۴ ❷ ۹۶ ❸ ۱۲۸ ❹ ۲۵۶

۴۴– اگر $A=\begin{bmatrix}-1 & 4 & 0\\ 0 & \frac{1}{2} & 5\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}-2 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس $D=BA^{3}B$ کدام است؟ (نوبت ۲- کنکور ۱۴۰۴)

❶ $8$ ❷ $\frac{8}{3}$ ❸ $-\frac{8}{3}$ ❹ $-8$

## ویژه‌ی داوطلبان سرآمد

۱– حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}a & b+c & c\\ b & a+c & b\\ c & a+b & a\end{vmatrix}$ کدام است؟

❶ $(a+b+c)(a-c)(a+c)$
❷ $(a+b+c)(a-c)(a+c-2b)$
❸ $(a+b+c)(a-c)$
❹ $(a+b+c)(a-c)(a+c+2b)$

۲– اگر $a+b+c=0$، آنگاه حاصل $\begin{vmatrix}a & b & c\\ b & c & a\\ c & a & b\end{vmatrix}$ کدام است؟

❶ $abc$ ❷ $3abc$ ❸ $a^2b^2c^2$ ❹ $0$

۳– اگر $D=\begin{vmatrix}2 & 1 & 3\\ a & 0 & b\\ -1 & 1 & -2\end{vmatrix}$ باشد، آنگاه مقدار $\begin{vmatrix}2-a & 1 & 3-b\\ -1 & 1 & -2\\ 2a & 0 & 2b\end{vmatrix}$ کدام است؟

❶ $2D$ ❷ $-D$ ❸ $-2D$ ❹ $D$

۴– اگر $D=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ bc & ac & ab\\ ac & ab & bc\end{vmatrix}$ باشد، حاصل دترمینان $\begin{vmatrix}a+b & b & ab\\ b+c & c & bc\\ a+c & a & ac\end{vmatrix}$ کدام است؟ (کنکور ۹۳)

❶ $-D$ ❷ $D$ ❸ $(a+b+c)D$ ❹ $abcD$

۵– اگر به تمام درایه‌های ستون دوم ماتریس $A=\begin{bmatrix} ۲ & ۳ & ۴ \\ ۵ & a & ۷ \\ ۳ & b & ۶ \end{bmatrix}$ یک واحد اضافه شود، به مقدار دترمینان ماتریس اولیه چه عددی اضافه می‌شود؟ (کنکور ۹۶)

❶ $-۳$ ❷ $-۲$ ❸ ۳ ❹ ۶

۶– اگر $A$ ماتریسی مربعی از مرتبه‌ی دو و $A^۲=-I$ باشد، آنگاه $|I-A|$ کدام می‌تواند باشد؟ ($|A|>۰$)

❶ ۱ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۷– اگر $B$ وارون ماتریس مربعی $A$ از مرتبه‌ی دو و $A-B=۲I$ باشد، آنگاه مجموع درایه‌های ماتریس $(A+B)(A^۲-B^۲)$ کدام است؟

❶ ۱۶ ❷ ۳۲ ❸ ۴۸ ❹ ۶۴

۸– اگر $A$ و $B$ ماتریس‌های مربعی مرتبه دو، $A=\begin{bmatrix} ۱ & ۲ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$ و $A+B=AB$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $AB$ کدام است؟

❶ ۶ ❷ ۲ ❸ ۳ ❹ ۴

۹– ماتریس $A$ مربعی از مرتبه ۳ در تساوی $I+A^۲=A$ صدق می‌کند. مقدار $|A|$ برابر کدام است؟

❶ ۱ ❷ $-۱$ ❸ $\frac{۱}{۲}$ ❹ $-\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۱۰– اگر $A^۲+۵A-۶I=O$ باشد، وارون ماتریس $A+۴I$ کدام است؟

❶ $-\frac{A+I}{۱۰}$ ❷ $\frac{A-I}{۱۰}$ ❸ $\frac{A+I}{۱۰}$ ❹ $-\frac{A-I}{۱۰}$

## لیست کامل مجموعه‌های آموزشی

| دوره ابتدایی (عادی) | متوسطه اول (عادی) | ریاضی تیزهوشان |
|---|---|---|
| جزوه ریاضی پنجم | جزوه ریاضی هفتم | ریاضی تیزهوشان ششم |
| جزوه ریاضی ششم | جزوه ریاضی هشتم | ریاضی تیزهوشان هفتم |
| | جزوه ریاضی نهم | ریاضی تیزهوشان هشتم |
| | | ریاضی تیزهوشان نهم |

| استعداد تحلیلی (ششم به هفتم) | استعداد تحلیلی (نهم به دهم) |
|---|---|
| جزوه هوش کلامی (ادبی) | جزوه هوش غیرکلامی (تصویری) |
| جزوه هوش غیرکلامی (تصویری) | جزوه هوش ریاضی و محاسبات |
| جزوه هوش ریاضی – منطق و سرعتی | جزوه هوش منطق و استدلال (شامل تحلیل متن) |

| متوسطه دوم (تجربی: کنکوری) | متوسطه دوم (تجربی: تشریحی) |
|---|---|
| جزوه کنکور ریاضی دهم | جزوه تشریحی ریاضی دهم |
| جزوه کنکور ریاضی یازدهم | جزوه تشریحی ریاضی یازدهم |
| جزوه کنکور ریاضی دوازدهم | جزوه تشریحی ریاضی دوازدهم |
| **جزوه جامع کنکور تجربی** | |

| متوسطه دوم (ریاضی: کنکوری) | متوسطه دوم (ریاضی: تشریحی) |
|---|---|
| جزوه کنکور ریاضی دهم | جزوه تشریحی ریاضی دهم |
| جزوه کنکور حسابان (۱) | جزوه تشریحی هندسه (۱) |
| جزوه کنکور آمار و احتمال | جزوه تشریحی هندسه (۲) |
| جزوه کنکور هندسه (۲) | جزوه تشریحی حسابان (۱) |
| جزوه کنکور حسابان (۲) | جزوه تشریحی آمار و احتمال |
| جزوه کنکور ریاضیات گسسته | جزوه تشریحی ریاضیات گسسته |
| جزوه کنکور هندسه (۳) | جزوه تشریحی هندسه (۳) |
| **جزوه جامع کنکور ریاضی** | جزوه تشریحی حسابان (۲) |

| رشته انسانی |
|---|
| جزوه ریاضی و آمار پایه دهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |
| جزوه ریاضی و آمار پایه یازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |
| جزوه ریاضی و آمار پایه دوازدهم (تشریحی + کنکور در یک مجموعه، البته تفکیک شده) |

## ما متمرکز بر ارتقای کیفیت آموزش هستیم.

سپاس از توجهتان


۰۹۳۵ ۶۰۰ ۸۴۵۴

۰۹۲۰ ۶۰۰ ۸۴۵۴